

CALCUL NUMERIQUE DES ETATS RESONNANTS DU  
PROBLEME BIDIMENSIONNEL DE TENUE A LA MER

C. HAZARD, M. LENOIR

Groupe Hydrodynamique Navale \* , E.N.S.T.A.  
Chemin de la Hunière, 91120 PALAISEAU, FRANCE

(\* URA D0853 du CNRS associée à l'Université P. & M. Curie)

**Résumé.** Cette étude concerne les problèmes d'interaction fluide-structure tels que le comportement d'un navire sur la houle ou la diffraction d'une onde acoustique par un obstacle élastique. Pour de tels problèmes, l'une des questions fondamentales réside en la recherche des fréquences d'excitation correspondant à des maxima d'amplitude du mouvement de la structure: ces fréquences sont appelées "fréquences de résonance". Soulignons que, contrairement au cas des systèmes conservatifs, ce ne sont pas des "fréquences propres" (car l'amplitude de la réponse reste finie), ce qui interdit l'emploi des techniques classiques pour leur recherche. On décrit ici, dans le cas du problème bidimensionnel de tenue à la mer, une méthode pratique pour la détermination numérique de ces fréquences: elle est basée sur le prolongement aux fréquences complexes du problème.

**Summary.** This study deals with fluid-structure interacting systems such as the behaviour of a ship under the action of swell or the scattering of an acoustic wave by an elastic body. For such problems, one of the most important question is the determination of the excitation frequencies which makes maximum the amplitude of the motion of the structure: these frequencies are called "resonance frequencies". Let us stress that these are not "eigenvalues" as for conservative systems, for the amplitude of the response remains finite: this prevents using the classical techniques for their computation. The purpose of this work is to describe, in the case of the 2-dimensional sea-keeping problem, a practical method for the numerical calculation of these frequencies: it is based on the extension of the problem to complex frequencies.

## Introduction.

Dans le cas d'un corps flottant à un degré de liberté, X.J. WU, Y. WANG et W.G. PRICE [1] montrent, par une approche asymptotique, comment évaluer les fréquences de résonance si on connaît les courbes de masses ajoutées et de coefficients d'amortissement du système: ils recherchent des fréquences propres complexes du système en supposant que leurs parties imaginaires sont "petites" et obtiennent ainsi une approximation des fréquences de résonance.

Notre approche est quelque peu différente, mais elle repose sur la même idée de base: on va montrer tout d'abord qu'on peut prolonger le problème de tenue à la mer au cas de fréquences complexes, et que ce prolongement peut devenir singulier en des points isolés du plan complexe. Nous verrons que ces singularités (appelées "fréquences de scattering") sont solutions d'un problème aux valeurs propres non linéaire qui peut être résolu numériquement. En effectuant ensuite un développement de la solution du problème au voisinage d'une de ces fréquences, on peut alors estimer la position de la "résonance" et l'amplitude de la réponse associée. Les techniques utilisées sont décrites de façon plus détaillées dans [2] (dans le cas de la diffraction d'une onde acoustique par un obstacle).

### 1. Le problème de tenue à la mer: approche classique.

On considère un corps rigide (C) flottant librement (sans vitesse d'avance) à la surface libre de l'océan. Lorsque le système est au repos, le fluide occupe un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  non borné dont la frontière  $\partial\Omega$  est définie par la "surface libre non perturbée" (SL), le fond (F) supposé rectiligne, et la carène ( $\Gamma$ ) du corps (figure 1); on note  $n$  la normale unitaire sortante à la frontière  $\partial\Omega$ .

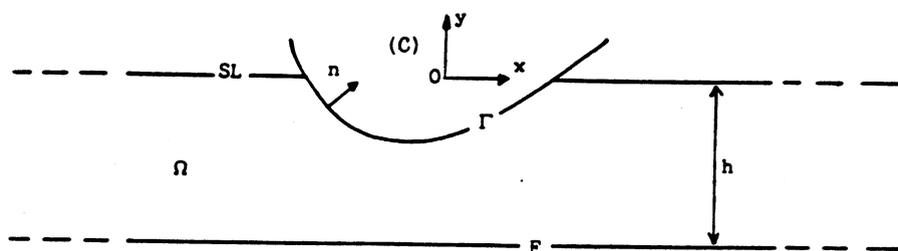


Figure 1

Le repère (Oxy) est défini comme indiqué sur la figure 1. Le fluide est supposé parfait, incompressible et en écoulement irrotationnel; on note  $\varphi$  le potentiel des vitesses. Les mouvements du corps autour de sa position d'équilibre sont repérés par un vecteur  $s \in \mathbb{R}^3$  dont les composantes caractérisent ses 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation).

On étudie le cas du "problème stationnaire linéarisé", c'est-à-dire les

mouvements périodiques du système dans le cas d'une onde incidente monochromatique de fréquence  $\omega$  et de faible amplitude. On est alors conduit (cf. JOHN [3]) au problème suivant (écrit ici sous forme adimensionnelle):

$$\mathcal{P}(\omega^2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ (2) \quad \partial_y \varphi - \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{sur } SL, \\ (3) \quad \partial_y \varphi = 0 \quad \text{sur } F, \\ (4) \quad \partial_n \varphi + \omega \underline{n}^* s = f_1 \quad \text{sur } \Gamma, \\ (5) \quad (-\omega^2 M + K)s + \omega \int_{\Gamma} \varphi \underline{n} \, d\Gamma = f_2, \\ (6) \quad \int_{-h}^0 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} - i\nu_0 \varphi \right|^2 dy \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{condition de rayonnement}), \\ \text{où } \nu_0 \text{ est la solution positive de: } \nu_0 \text{th}(\nu_0 h) = \omega^2. \end{array} \right.$$

$M$  est la "matrice (3x3) de masse généralisée" du corps (définie positive) et  $K$  la matrice de rappel hydrostatique (positive);  $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$  désigne la "normale généralisée" à  $(\Gamma)$ :  $\underline{n}(M) = (n, OM \wedge n)$ . Enfin  $f_1$  et  $f_2$  définissent les efforts extérieurs (ils dépendent de l'onde incidente).

On peut montrer que ce problème est bien posé sauf pour une suite de fréquences  $(\omega_n)$  (qui peut éventuellement être finie ou même vide). Différentes méthodes numériques peuvent être mises en oeuvre pour le résoudre: la traditionnelle méthode des équations intégrales, la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale [4] ou la méthode des éléments finis localisés ([5],[6]). C'est cette dernière que nous utiliserons pour exposer notre démarche.

## 2. La méthode des éléments finis localisés.

Soit  $\hat{\Omega} \subset \Omega$  le domaine borné délimité par deux segments verticaux  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  choisis tels que  $\Gamma \subset \partial \hat{\Omega}$ . On désigne par  $\hat{SL}$  et  $\hat{F}$  les parties de  $SL$  et  $F$  contenues dans  $\partial \hat{\Omega}$  et par  $\check{\Omega}_\ell$ ,  $\check{SL}_\ell$  et  $\check{F}_\ell$  (pour  $\ell=1,2$ ) respectivement les parties "gauche" et "droite" de  $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ ,  $SL \setminus \hat{SL}$  et  $F \setminus \hat{F}$  (figure 2).

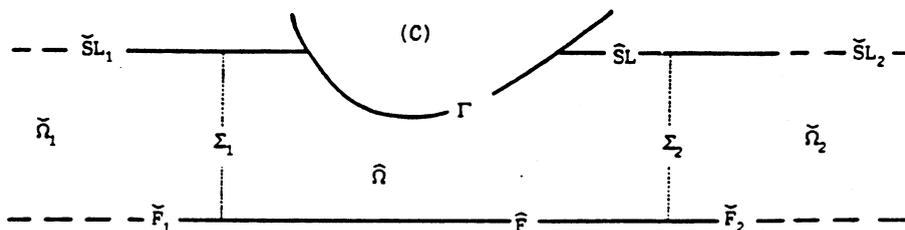


Figure 2

Considérons, pour  $\ell=1,2$ , l'opérateur  $C_\ell(\omega^2)$  qui, à toute fonction  $\chi$  définie sur  $\Sigma_\ell$ , associe la dérivée normale (sur  $\Sigma_\ell$ ) de la solution du "problème de Dirichlet extérieur", c'est-à-dire la fonction  $\check{\varphi}_\ell$  qui satisfait: (1) dans  $\check{\Omega}_\ell$ , (2) sur  $\check{S}L_\ell$ , (3) sur  $\check{F}_\ell$ , la condition de rayonnement (6) et  $\check{\varphi}_\ell = \chi$  sur  $\Sigma_\ell$ . On montre aisément que la solution  $(\hat{\varphi}, \hat{s})$  du nouveau problème (posé dans le domaine borné  $\hat{\Omega}$ ):

$$\hat{\mathcal{P}}(\omega^2) \begin{cases} (1) \text{ dans } \hat{\Omega}, & (2) \text{ sur } \hat{S}L, & (3) \text{ sur } \hat{F}, & (4) \text{ sur } \Gamma, & (5), \\ (6) \quad \partial_n \hat{\varphi} = -C_\ell(\omega^2) (\hat{\varphi}|_{\Sigma_\ell}) & \text{ sur } \Sigma_\ell & (\ell=1,2), \end{cases}$$

est telle que  $\hat{\varphi}$  est la restriction à  $\hat{\Omega}$  de la solution  $\varphi$  de  $\mathcal{P}(\omega^2)$  et  $\hat{s} = s$ . L'écriture d'une formulation variationnelle de  $\hat{\mathcal{P}}(\omega^2)$  nous conduit au problème suivant ( $H^1(\hat{\Omega})$  désignant classiquement l'espace de Sobolev des fonctions  $\hat{\varphi}$  telles que  $\hat{\varphi}$  et  $\nabla \hat{\varphi}$  appartiennent à  $L^2(\hat{\Omega})$ ):

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu(\omega^2): \text{ Trouver } (\hat{\varphi}, \hat{s}) \in H^1(\hat{\Omega}) \times \mathbb{C}^3 \text{ tel que: } \hat{A}(\omega^2) (\hat{\varphi}, \hat{s}) = \mathcal{F}(\omega^2),$$

où  $\mathcal{F}(\omega^2)$  dépend linéairement des données  $(f_1, f_2)$  et  $\hat{A}(\omega^2)$  est l'opérateur linéaire (agissant sur l'espace de Hilbert  $H^1(\hat{\Omega}) \times \mathbb{C}^3$ ) défini par:

$$\begin{aligned} (\hat{A}(\omega^2) (\hat{\varphi}, \hat{s}), (\hat{\psi}, \hat{t}))_{H^1(\hat{\Omega}) \times \mathbb{C}^3} &= \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\varphi} \cdot \overline{\nabla \hat{\psi}} \, d\Omega + \hat{t}^* K \hat{s} - \omega^2 \int_{\hat{S}L} \hat{\varphi} \overline{\hat{\psi}} \, dSL \\ &- \omega^2 \hat{t}^* M \hat{s} + \omega \int_{\Gamma} (\hat{n}^* \hat{s} \overline{\hat{\psi}} + \hat{\varphi} \overline{\hat{n}^* \hat{t}}) \, d\Gamma + \sum_{\ell=1,2} \int_{\Sigma_\ell} C_\ell(\omega^2) (\hat{\varphi}|_{\Sigma_\ell}) \overline{\hat{\psi}} \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Tout l'intérêt du nouveau problème  $\hat{\mathcal{P}}(\omega^2)$  réside dans le fait qu'on sait expliciter l'opérateur  $C_\ell(\omega^2)$  sous forme d'une série (qui sera tronquée pour les applications numériques). En utilisant la méthode de séparation des variables (rendue possible par le choix des frontières  $\Sigma_\ell$ ), on montre en effet (cf. LENOIR [6]) que  $C_\ell(\omega^2)$  s'exprime sous la forme:

$$C_\ell(\omega^2) (\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)} \left[ \int_{-h}^0 \chi(y) x^{(k)}(y) \, dy \right] x^{(k)},$$

où les  $z^{(k)} \in \mathbb{C}$  sont les solutions de l'équation de dispersion:

$$(ED(\omega^2)): z \operatorname{tg}(zh) = -\omega^2,$$

choisies telles que:

- $z^{(0)}$  est imaginaire pur et  $\operatorname{Im}(z^{(0)}) < 0$  (en fait:  $z^{(0)} = -iv_0$  où  $v_0$  est le réel positif apparaissant dans la condition de rayonnement (6)),
- $z^{(k)}$ , pour tout  $k > 0$ , est réel positif et appartient à l'intervalle  $](2k-1)\pi/2h, (2k+1)\pi/2h[$ .

Enfin, les "fonctions de base"  $x^{(k)}$  sont définies par:

$$\chi^{(k)}(y) = \left[ \frac{\sin(2z^{(k)}h)}{4z^{(k)}} + \frac{h}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} \cos(z^{(k)}(y+h)).$$

Le problème  $\hat{\mathcal{P}}_\nu(\omega^2)$  peut être résolu numériquement par éléments finis. Pour une fréquence d'excitation  $\omega$  donnée, on peut alors déterminer l'énergie totale du corps:

$$E(\omega^2) = \frac{1}{2} \hat{s}^* [\omega^2 M + K] \hat{s}.$$

Par un "balayage en fréquence" sur un domaine fréquentiel donné, on construit ainsi la "courbe de réponse" du système: notre objectif consiste à localiser a priori les maxima de cette courbe (les "états résonnants") sans calculer la totalité de la courbe de réponse.

### 3. Prolongement du problème aux fréquences complexes.

Soit  $\nu \in \mathbb{C}^* = \{\nu \in \mathbb{C} / \text{Im}(\nu) > 0\}$ . On considère le problème suivant, obtenu en remplaçant formellement  $\omega^2$  par  $\nu$  dans  $\mathcal{P}(\omega^2)$ :

$$\mathcal{P}(\nu) \begin{cases} (1') & \Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ (2') & \partial_y \varphi - \nu \varphi = 0 \text{ sur } SL, \\ (3') & \partial_y \varphi = 0 \text{ sur } F, \\ (4') & \partial_n \varphi + \sqrt{\nu} \underline{n}^* s = f_1 \text{ sur } \Gamma, \\ (5') & (-\nu M + K)s + \sqrt{\nu} \int_{\Gamma} \varphi \underline{n} \, d\Gamma = f_2, \end{cases}$$

où  $\sqrt{\nu}$  désigne la détermination principale de la fonction "racine carrée":

$$\sqrt{\nu} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\theta/2} \text{ si } \nu = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0, |\theta| < \pi).$$

Notons que la condition de rayonnement a disparu dans ce nouveau problème: nous allons la remplacer par une condition de décroissance à l'infini en imposant à  $\varphi$  d'appartenir à  $H^1(\Omega)$ . On démontre alors aisément que  $\mathcal{P}(\nu)$  admet une solution et une seule dans  $H^1(\Omega) \times \mathbb{C}^3$ ; de plus, si  $\mathcal{P}(\omega^2)$  est bien posé, la solution de  $\mathcal{P}(\nu)$  tend "localement" (c'est-à-dire dans  $H^1(\Omega') \times \mathbb{C}^3$  pour tout domaine borné  $\Omega' \subset \Omega$ ) vers la solution de  $\mathcal{P}(\omega^2)$  lorsque  $\nu \in \mathbb{C}^*$  tend vers  $\omega^2$ : cette propriété est connue sous le nom de "principe d'absorption limite" (LENOIR [6]).

De la même façon qu'au paragraphe 2, ce problème peut être réduit à un problème posé en milieu borné en considérant, pour  $\ell=1$  et  $2$ , l'opérateur  $C_\ell(\nu)$  qui, à toute fonction  $\chi$  définie sur  $\Sigma_\ell$ , associe la dérivée normale (sur  $\Sigma_\ell$ ) de la solution du nouveau "problème de Dirichlet extérieur",

c'est-à-dire la fonction  $\check{\varphi}_\ell \in H^1(\check{\Omega}_\ell)$  qui satisfait: (1') dans  $\check{\Omega}_\ell$ , (2') sur  $\check{S}L_\ell$ , (3') sur  $\check{F}_\ell$  et  $\check{\varphi}_\ell = \chi$  sur  $\Sigma_\ell$ . On montre de même que la solution  $(\hat{\varphi}, \hat{s})$  de:

$$\hat{\mathcal{P}}(\nu) \begin{cases} (1') \text{ dans } \hat{\Omega}, & (2') \text{ sur } \hat{S}L, & (3') \text{ sur } \hat{F}, & (4') \text{ sur } \Gamma, & (5'), \\ (6') \quad \partial_n \hat{\varphi} = -C_\ell(\nu) (\hat{\varphi}|_{\Sigma_\ell}) & \text{sur } \Sigma_\ell & (\ell=1,2), \end{cases}$$

est telle que  $\hat{\varphi}$  est la restriction à  $\hat{\Omega}$  de la solution  $\varphi$  de  $\mathcal{P}(\nu)$  et  $\hat{s} = s$ . Enfin,  $\hat{\mathcal{P}}(\nu)$  va s'écrire sous la forme:

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu(\nu): \text{ Trouver } (\hat{\varphi}, \hat{s}) \in H^1(\hat{\Omega}) \times \mathbb{C}^3 \text{ tel que: } \hat{A}(\nu) (\hat{\varphi}, \hat{s}) = \mathcal{F}(\nu),$$

où  $\hat{A}(\nu)$  est défini par la même expression que  $\hat{A}(\omega^2)$  en remplaçant  $\omega^2$  par  $\nu$ , soit:

$$\begin{aligned} (\hat{A}(\nu) (\hat{\varphi}, \hat{s}), (\hat{\psi}, \hat{t}))_{H^1(\hat{\Omega}) \times \mathbb{C}^3} &= \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\varphi} \cdot \overline{\nabla \hat{\psi}} \, d\Omega + \hat{t}^* K \hat{s} - \nu \int_{\hat{S}L} \hat{\varphi} \overline{\hat{\psi}} \, dSL \\ &- \nu \hat{t}^* M \hat{s} + \sqrt{\nu} \int_{\Gamma} (\underline{n}^* \hat{s} \overline{\hat{\psi}} + \hat{\varphi} \overline{\underline{n}^* \hat{t}}) \, d\Gamma + \sum_{\ell=1,2} \int_{\Sigma_\ell} C_\ell(\nu) (\hat{\varphi}|_{\Sigma_\ell}) \overline{\hat{\psi}} \, d\Sigma. \end{aligned}$$

#### 4. Analyticité du prolongement. Conséquences.

Nous allons voir ici que l'opérateur  $\hat{A}(\nu)$  (défini jusqu'à maintenant pour tout  $\nu \in \mathbb{C}^* \cup \mathbb{R}^*$ ) dépend analytiquement de  $\nu$  et qu'il admet de plus un prolongement analytique dans  $\mathbb{C}^- = \{\nu \in \mathbb{C} / \text{Im}(\nu) < 0\}$ . Dans l'expression de  $\hat{A}(\nu)$ , il est clair que la seule difficulté provient du "terme de couplage" faisant apparaître l'opérateur  $C_\ell(\nu)$ . Nous allons montrer que l'expression de  $C_\ell(\nu)$  sous forme d'un développement en série (§2.) définit en fait son prolongement analytique dans le plan complexe.

La première étape consiste à prolonger les solutions  $z^{(k)}(\omega^2)$  de l'équation de dispersion  $ED(\omega^2)$  pour  $\nu \in \mathbb{C}$ . On utilise pour cela les résultats d'analyticité des racines d'une équation du type  $f(z) = \nu$ , où  $f$  est une fonction analytique (HENRICI [7]). On en déduit que chacune des racines  $z^{(k)}(\omega^2)$  de  $ED(\omega^2)$  se prolonge analytiquement en une racine  $z^{(k)}(\nu)$  de  $ED(\nu)$  dans tout domaine simplement connexe de  $\mathbb{C} \setminus f(E)$  où  $E$  désigne l'ensemble des racines (complexes) de l'équation  $d_z f(z) = 0$ , soit ici:

$$\sin(2zh) + 2zh = 0.$$

On montre aisément que les solutions de ce problème forment une suite dénombrable de "points exceptionnels"  $(\tilde{z}_n)$ . De plus, au voisinage de l'un des points  $\tilde{\nu}_n = f(\tilde{z}_n) \in f(E)$ , l'équation  $ED(\nu)$  admet deux racines distinctes

qui tendent vers  $\tilde{z}_n$  lorsque  $\nu$  tend vers  $\tilde{\nu}_n$ ; ces deux solutions sont représentées par les deux branches d'une fonction du type:

$$\tilde{z}_n + \theta_n((\nu - \tilde{\nu}_n)^{\frac{1}{2}}),$$

où  $\theta_n$  est une fonction analytique sur un voisinage de 0 et  $\theta_n(0) = 0$ . La présence de ces points exceptionnels nous amène à considérer un domaine simplement connexe  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  ne contenant aucun point de  $f(E)$ : un tel domaine est représenté sur la figure 3. Chacune des racines  $z^{(k)}(\nu)$  de  $ED(\nu)$  est alors analytique dans  $\mathbb{D}$  (notons que la position des coupures est choisie de telle sorte que les  $z^{(k)}$  soient analytiques dans un voisinage de l'axe réel positif).

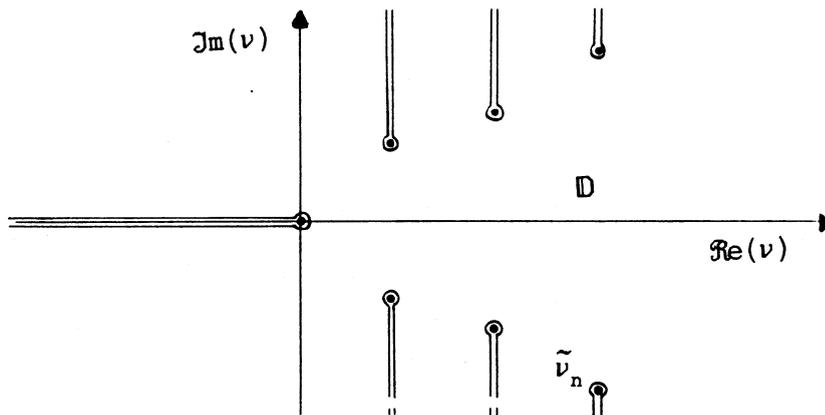


Figure 3

On considère alors, pour tout  $\nu \in \mathbb{D}$ , la série (formelle) obtenue à partir de celle de  $C_\rho(\omega^2)$  en remplaçant  $\omega^2$  par  $\nu$ . La démonstration de la convergence de cette série et du fait qu'elle définit bien le prolongement analytique de  $C_\rho$  dans  $\mathbb{D}$  est assez "technique": contentons-nous de dire qu'elle est basée sur des propriétés de perturbation d'une famille orthonormale dans un espace de Hilbert (KATO [8]). Intuitivement, ce résultat s'explique par le fait que les "fonctions de base"  $\chi^{(k)}(\omega^2)$  sont "peu perturbée" par le remplacement de  $\omega^2$  par  $\nu$  lorsque  $k$  tend vers  $\infty$ ; on montre en effet que les racines  $z^{(k)}(\nu)$  de  $ED(\nu)$  admettent un développement asymptotique de la forme:

$$z^{(k)}(\nu) = \frac{\pi}{h} k - \frac{\nu}{\pi} k^{-1} + o(k^{-2}).$$

Ainsi, la famille d'opérateur  $\hat{A}(\nu)$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ . Considérons alors, pour tout  $\nu \in \mathbb{D}$ , l'opérateur  $\hat{R}(\nu) = (\hat{A}(\nu))^{-1}$  (qui associe à la donnée  $\mathcal{F}(\nu)$  la solution de  $\hat{\mathcal{P}}(\nu)$ ). Nous avons vu que  $\mathcal{P}(\nu)$  est bien posé (et donc  $\hat{\mathcal{P}}(\nu)$  aussi d'après l'équivalence entre ces deux problèmes) si  $\text{Im}(\nu) > 0$ : il s'ensuit (KATO [8]) que  $\hat{R}(\nu)$  est analytique dans  $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^*$ . Par contre, si  $\text{Im}(\nu) < 0$ , on ne sait pas si  $\hat{A}(\nu)$  est inversible: on démontre en fait (cf. STEINBERG [9]) que  $\hat{R}(\nu)$  est une fonction méromorphe dans  $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}^*)$ ; en d'autres termes, le problème  $\hat{\mathcal{P}}(\nu)$  est bien posé sauf pour des singularités isolées qui constituent des pôles de  $\hat{R}(\nu)$ . Ces pôles sont

appelés les "fréquences de scattering" du système: ils sont solution du problème aux valeurs propres non linéaire suivant (qui revient à dire que  $\nu$  est tel que 0 est valeur propre de  $\hat{A}(\nu)$ ):

Trouver  $\nu \in \mathbb{C}$  tel qu'il existe  $(\hat{\phi}, \hat{s}) \neq 0$  solution de  $\hat{A}(\nu)(\hat{\phi}, \hat{s}) = 0$ ;

### 5. Approximation des états résonnants.

La discrétisation par éléments finis de  $\hat{\mathcal{P}}_\nu(\nu)$  nous conduit à un problème matriciel du type:  $\hat{A}(\nu) X = F(\nu)$ , où  $\hat{A}(\nu)$  est une famille de matrices complexes dépendant holomorphiquement de  $\nu$ . Une fréquence de scattering approchée  $\tilde{\nu}$  sera alors solution du problème aux valeurs propres matriciel (non linéaire):  $\hat{A}(\tilde{\nu}) X = 0$  qui sera traité numériquement par une méthode itérative (point fixe ou méthode de Newton).

La théorie de perturbation des opérateurs linéaires (KATO [8]) nous permet de construire explicitement le développement de  $R(\nu) = (\hat{A}(\nu))^{-1}$  au voisinage d'une fréquence de scattering  $\tilde{\nu}$ : si  $\tilde{\nu}$  est proche de l'axe réel positif, ce développement va naturellement nous fournir celui de la solution du problème stationnaire:  $X = R(\omega^2) F(\omega^2)$ . Par exemple, si  $\tilde{\nu}$  est simple (autrement dit, si 0 est une valeur propre simple de  $\hat{A}(\tilde{\nu})$ ), on obtient:

$$X(\omega^2) = \frac{1}{\omega^2 - \tilde{\nu}} \frac{\tilde{Y}^* F^{(0)}}{\tilde{Y}^* \hat{A}^{(1)} \tilde{X}} \tilde{X} + O(1),$$

où  $F^{(0)}$  et  $\hat{A}^{(1)}$  sont respectivement les termes d'ordre 0 et 1 des développements de  $F(\nu)$  et  $\hat{A}(\nu)$  au voisinage de  $\tilde{\nu}$ :

$$F(\nu) = F^{(0)} + O(\nu - \tilde{\nu}) \quad \text{et} \quad \hat{A}(\nu) = \hat{A}(\tilde{\nu}) + (\nu - \tilde{\nu})\hat{A}^{(1)} + O(\nu - \tilde{\nu})^2,$$

et les vecteurs  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche de  $\hat{A}(\tilde{\nu})$  (choisis tels que:  $\tilde{Y}^* \tilde{X} = 1$ ). Ce développement de  $X(\omega^2)$  exprime l'influence d'une singularité complexe de  $R(\nu)$  sur la réponse du système pour des fréquences réelles: il montre clairement que l'amplitude de la réponse présentera un maximum au voisinage de la partie réelle de la fréquence de scattering  $\tilde{\nu}$ . On peut ainsi localiser les états résonnants du système couplé.

On présentera des résultats numériques dans le cas d'une structure flottante élastique de type "catamaran" (deux flotteurs rigides reliés par une poutre élastique).

Références.

- [1] X.J. WU, Y. WANG and W.G. PRICE: *Multiple Resonances, Responses and Parametric Instabilities in Offshore Structures*, Journal of Ship Research, Vol. 32, N° 4, pp. 285-296 (1988).
- [2] M. LENOIR, M. VULLIERME-LEDARD, C. HAZARD: *Variational Formulations for the Determination of Resonant States in Scattering Problems*, SIAM J. Math. Anal. (à paraître).
- [3] F. JOHN: *On the motions of floating bodies (I)*, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 2, 1949, pp. 13-57.
- [4] A. JAMI, M. LENOIR: *A Variational Formulation for Exterior Problems in Linear Hydrodynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 16, pp. 341-359 (1978).
- [5] K.J. BAI, R. YEUNG: *Numerical Solution of Free-Surface Flow Problems*, Proceedings of the tenth Symposium on Naval Hydrodynamics, Cambridge, pp. 609-647 (1974).
- [6] M. LENOIR: *Méthodes de couplage en Hydrodynamique Navale et application à la résistance de vagues bidimensionnelle*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1982).
- [7] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis (3 vol.)*, JOHN WILEY & SONS (1977).
- [8] T. KATO: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag (1966).
- [9] S. STEINBERG: *Meromorphic Families of Compact Operators*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 31, pp. 372-380 (1968).