

**Evaluation de la résistance de vagues  
d'un sous-marin en immersion totale**

par E.MASSON \* O.DeBAYSER \* et D.MARTIN \*\*

\* ENSTA, Groupe Hydrodynamique Navale  
(UA D0853 du CNRS, associée à l'Université Paris VI)

\*\* Laboratoire d'analyse Numérique, IRMAR  
Université de Rennes I

## Résumé

Nous considérons un sous-marin immergé avançant à vitesse constante dans un fluide non visqueux, calme et illimité. Le calcul de la résistance de vagues (ou problème de Neumann-Kelvin) est réalisé en intégrant les pressions sur la carène.

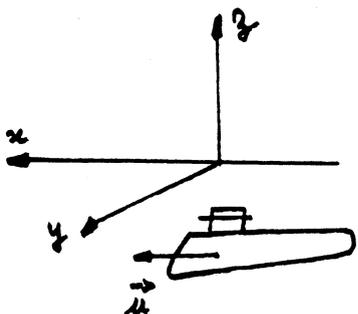
Le problème est ramené à un problème équivalent en domaine borné en construisant une condition aux limites sur une frontière arbitraire entourant le corps. Nous sommes amenés à évaluer rapidement et précisément la Fonction de Green du problème. La résolution numérique est une application du code Melina.

## Summary

We consider an immersed submarine moving with a constant velocity in a non-viscous, steady, unbounded fluid. The calculation of the wave resistance (or Neumann-Kelvin problem) is made by integrating the pressure on the body.

The problem is reduced to an equivalent unbounded problem by building a boundary condition over an arbitrary surface surrounding the body. We are to evaluate the Green function quickly and precisely. The numerical resolution is an application of the program Melina.

## 1. PRESENTATION DU PROBLEME



Nous étudions un corps de longueur caractéristique  $l$ , de surface extérieure  $\Gamma$ , se déplaçant à la vitesse horizontale constante  $u\vec{x}$  dans un fluide non visqueux. L'écoulement est irrotationnel, on notera  $\Phi$  le potentiel des vitesses qui est harmonique.

La résistance de vagues est la résultante suivant  $\vec{x}$  des forces de pression qui s'exercent sur la carène (excepté les forces hydrostatiques) :

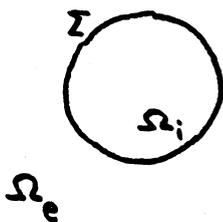
$$R = - \int_{\Gamma} p n_x dS = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla^2 \Phi n_x dS .$$

En repère lié à l'obstacle, notons  $\varphi = \Phi + ux$  le potentiel de perturbation,  $\varphi$  vérifie :

$$\left[ \begin{array}{ll} \Delta \varphi = 0 & \text{(dans le domaine fluide } \Omega) \\ \varphi_n = u(\vec{n} \cdot \vec{x}) & \text{(sur la carène } \Gamma) \\ \varphi_{xx} + \frac{g}{u^2} \varphi_z = 0 & \text{(à la surface libre)} \end{array} \right.$$

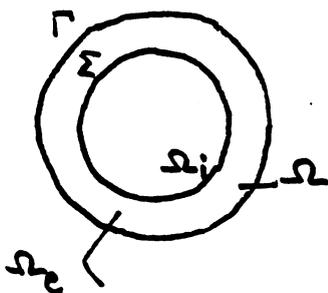
## 2. LA METHODE DE COUPLAGE ELEMENTS FINIS-REPRESENTATION INTEGRALE (JAMI-LENOIR)

Etant donné une surface fermée  $\Sigma$  limitant un domaine intérieur  $\Omega_1$  et un domaine extérieur  $\Omega_e$ , on considère le problème ( $\tilde{P}$ ) consistant à chercher une fonction harmonique  $\tilde{\varphi}$  dans  $\Omega_e$ , vérifiant une condition de Neumann donnée, ainsi qu'une certaine condition à l'infini notée C.I.



$$\tilde{P}(\tilde{\varphi}) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\varphi} = 0 & (\Omega_e) \\ \tilde{\varphi}_n = g & (\Gamma) \\ \text{C.I.} \end{cases}$$

On remplace  $\tilde{P}(\tilde{\varphi})$  sur  $\Omega_e$  non borné en  $P(\varphi)$  sur  $\Omega$  borné en se donnant une surface arbitraire  $\Sigma$  régulière extérieure à  $\Gamma$  et ne la touchant pas :



$$P(\varphi) \quad \begin{cases} \Delta \varphi = 0 & (\Omega) \\ \varphi_n = g & (\Gamma) \\ \text{C.I.} \end{cases}$$

On impose de plus à  $\varphi$  la condition :

$$(2.1.) \quad \forall M \in \Sigma,$$

$$\varphi(M) = \int_{\Gamma} (\varphi(P) G_n(M,P) - g(P) G(M,P)) d\Sigma_p,$$

où  $G$  est la fonction de Green de problème.

$\varphi$  se prolonge alors en  $\tilde{\varphi}$  sur  $\Omega_e$  tout entier grâce à (2.1.).

$\Sigma$  peut être choisi petit (en pratique, une seule couche d'éléments finis suffit). Comme  $M \neq P$  les singularités sur  $\Sigma$  sont observées à distance: rien n'est singulier, on peut donc calculer l'intégrale (2.1) par intégration numérique et utiliser des éléments finis d'ordre plus élevé que les habituelles facettes planes, avec distributions constantes par morceaux des méthodes de singularités. Si bien que la méthode s'avère très efficace.

Ce couplage entre  $\Gamma$  et  $\Sigma$  par n'est pas habituel dans les codes de calcul standard. Nous utilisons pour la résolution le code Melina qui permet de prendre en compte cette particularité.

### 3. LE CODE MELINA (DeBAYSER-MARTIN)

Le code Melina est une bibliothèque de procédures pour la résolution de problèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis en dimension 2 ou 3. Il comporte des modules adaptés à la résolution de problèmes extérieurs dont l'hydrodynamique navale fournit des exemples de choix.

Ainsi les problèmes de tenue à la mer, de la résistance de vagues, ainsi que des problèmes d'acoustique sous-marine, sont-ils résolus par des applications de Melina. Une application de Melina consiste en la rédaction d'un programme principal et de quelques procédures de calcul spécifiques nécessaires à la résolution du problème. Une des principales originalités du code est de piloter l'ensemble du programme à partir du seul programme principal, en manipulant tous les objets (domaines géométriques, matrices, vecteurs, données) par leur nom.

Les méthodes utilisées pour la résolution de problèmes extérieurs sont la méthode de couplage Eléments finis-Représentation intégrale et la méthode des Eléments finis localisés.

### 4. EVALUATION DE LA FONCTION DE GREEN

4.1 On se place dans un repère lié au navire (repère mobile) dont la vitesse constante  $u$  est dirigée suivant les  $x$  croissants. Si on se donne un point  $M$ , point source, et un point  $P$ , point d'observation, la fonction de Green  $G_M(P)$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (4.1) \quad \Delta_P G_M(P) = \delta_M \quad \text{sur } (\Omega) \text{ (domaine fluide)} \\ (4.2) \quad \left( \frac{g}{u^2} \frac{\partial}{\partial z_P} + \frac{\partial^2}{\partial x_P^2} \right) G_M(P) = 0 \quad \text{en } z_P = 0 \text{ (surface libre)} \\ (4.3) \quad \text{des conditions de décroissance à l' infini.} \end{array} \right.$$

#### 4.2 Décomposition en vagues proches et vagues lointaines

Nous retenons celle obtenue par F.Noblesse :

$$4 \pi G_M(P) = S_M(P) + 2 \frac{g}{u^2} N(X) + 4 \frac{g}{u^2} H(-X) W(X);$$

avec :

$$X = (x, y, z) = \frac{g}{u^2} (x_P - x_M, y_P - y_M, z_P + z_M)$$

$x, y, z$  sont des coordonnées adimensionnelles.

$S_M(P)$  est la solution élémentaire de (4.1);

$N(X)$  est dit terme de "vagues proches";

$W(X)$  est dit terme de "vagues lointaines".

#### 4.3 EVALUATION DE $W$ ET $\nabla W$ , TERME DE VAGUES LOINTAINES ET SON GRADIENT, D'APRES BAAR & PRICE

Bessho a donné deux représentations de  $W$  sous forme de séries de Neumann, l'une convergente, l'autre asymptotique :

$$X = (x, y, z) \quad , \quad D = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \beta = \text{Arctg} \frac{y}{z}.$$

$$(4.4) \quad W(X) = H(x) 8 e^{z/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} ' (-1)^n J_{2n}'(x) K_n(D/2) \cos(n\beta)$$

$$(4.5) \quad W(X) = -H(x) 8\pi e^{z/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} ' Y_{2n}'(x) I_n(D/2) \cos(n\beta)$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside,

$I, J, K, Y$  sont les fonctions de Bessel d'ordre entier définies dans A & S ,

Dans la pratique, l'une ou l'autre de ces expressions est utilisée suivant les valeurs de  $x, y, z$  .

Quand aucune d'entre elles ne convient, on utilise la méthode de Romberg [Davis & Rabinowitz - 6.3 p434].

On se ramène donc globalement au calcul d'une somme

$$C(\beta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} ' a_n \cos(n\beta).$$

Comme on le verra par la suite, les termes  $a_n$  deviennent très petits quand  $n$  augmente, et on se limitera aux termes de rang inférieur à un certain  $N$ .

Les sommes de ce type sont évaluables sur le modèle de Goertzel-Clenshaw (Nonweiler p 132), détaillé ci-dessous.

On définit la suite descendante  $b_n$  :

$$\begin{cases} b_{N+1} = b_{N+2} = 0 \\ n \in [0, N] : b_n = a_n + 2\cos\beta b_{n+1} - b_{n+2} \end{cases}$$

Le résultat est alors donné par

$$C(\beta) = \frac{1}{2}(b_0 - b_2).$$

Dans le cas qui nous occupe, on calculera les  $a_n$  par récurrence, l'expression de  $a_{n+1}/a_n$  étant relativement simple.

Dans toute la suite, on désignera

$$\begin{array}{ll} J_n(x) \text{ par } J_n & Y_n(x) \text{ par } Y_n \\ \text{et } K_n(D/2) \text{ par } K_n & I_n(D/2) \text{ par } I_n. \end{array}$$

• Expression convergente (4.2) : Valeur  $W(X)$  :

$$W(X) = 8 e^{z/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n J'_{2n}(x) K_n(D/2) \cos(n\beta).$$

on cherche à évaluer le quotient  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  :

$$n > 0 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = - \frac{J'_{2n+2} K_{n+1}}{J'_{2n} K_n}$$

$$\text{On définit } k_n = \frac{K_{n+1}}{K_n} \quad \text{et } j_n = \frac{J_{2n+1}}{J_{2n-1}} :$$

On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{n+1}}{a_n} = - k_n \frac{j_n(1-j_{n+1})}{1-j_n} \\ a_0 = 8 e^{z/2} J'_0 K_0 = - 8 e^{z/2} J_1 K_0. \end{array} \right.$$

Une fois connus  $a_0, a_1$  et la relation de récurrence, on déduit les  $(a_n)$  puis les  $(b_n)$  qui amènent à  $W$  par la méthode décrite ci-dessus.

la dérivée en  $x$  et la dérivée radiale sont évaluées par la même technique.

Dérivée radiale :

$$W_\beta(X) = -\frac{D}{2} \sin(\beta) W(X) - 8 e^{z/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n J'_{2n}(x) K_n(D/2) \sin(n\beta) n.$$

La démarche varie légèrement :

$$\text{on définit } g_n(\beta) = \frac{d}{d\beta} b_n(\beta)$$

$$\text{on a donc } G(\beta) = \frac{d}{d\beta}(C(\beta)) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\beta} b_0(\beta) - \frac{d}{d\beta} b_2(\beta) \right).$$

et en outre

$$\frac{d}{d\beta} C(\beta) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n \sin(n\beta).$$

L'expression de  $g_n$  est donnée par

$$\begin{cases} n=0, N : g_n(\beta) = 2 \sin(\beta) b_{n+1}(\beta) + g_{n+2}(\beta) - 2 \cos(\beta) g_{n+1}(\beta) \\ g_{N+1} = g_{N+2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } G(\beta) = \frac{1}{2} (g_0(\beta) - g_1(\beta)).$$

- l'Expression asymptotique (4.3) est évaluée par une méthode similaire.

#### Annexe au calcul de $W$ et $\nabla W$

Remarque sur l'évaluation des fonctions de Bessel :

- Les fonctions d'ordre 0 ou 1 sont évaluées par développement en fractions rationnelles.
- Ces fonctions ayant un comportement peu agréable numériquement pour  $n$  grand, on évalue les quotients  $J_{n+1}/J_n$  (resp.  $Y, I, K$ ) plutôt que les fonctions elles-mêmes, en utilisant les relations de récurrence précédentes.

### Régions correspondant au calcul de W

Les développements issus de Bessho (4.4) et (4.5) conviennent dans des régions spécifiques correspondant à certaines valeurs de  $x, y, z$ .

Empiriquement,

l'expression en (JK) converge pour  $\frac{x^2}{D} < 80$  (région 1) ,  
 et celle en (YI) pour  $\frac{x}{D} > 5$  (région 2),  $D = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ .

#### 4.4 EVALUATION PAR INTERPOLATION DE $N$ , $\nabla N$ , TERME DE VAGUES PROCHES ET SON GRADIENT

Cette méthode d'interpolation est inspirée de Noblesse (1988), qui utilise des éléments  $Q_1$ . Nous avons exploité l'idée en interpolant par éléments  $Q_2$ .

Certaines valeurs de  $N$  et  $\nabla N$  en des points bien choisis sont stockées dans des tables. Celles-ci doivent être de dimensions relativement modestes. En effet :

- Ces tables pourront éventuellement être chargées plusieurs fois depuis la mémoire secondaire.
- A un moment donné une table doit pouvoir être entièrement en mémoire centrale pour éviter des échanges incessants avec la mémoire secondaire, échanges extrêmement pénalisants.

On dispose donc de deux méthodes :

1. Interpolation pour des points relativement proches ( $R \leq 50$ ).
2. Expression asymptotique pour les autres points.

On désire donc évaluer  $N(X)$  ainsi que son gradient ;

$$X = (x, y, z); N(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \operatorname{Im} F(A(t)) dt;$$

$$A(t) = [z\sqrt{1-t^2} + yt + i|x|] \sqrt{1-t^2}; F(A) = e^A E_1(A).$$

### Régions d'interpolation

On définit  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ .

On se fixe une quantité  $z_0$ , profondeur maximale ( $z_0 < 0$ )

$ z_0  \leq R \leq 0.5$	:	région 1
$0.5 < R \leq 3$	:	région 2
$3 < R \leq 50$	:	région 3
$50 < R$	:	Expression asymptotique.

A chaque région correspond une table d'interpolation.

Dans chacune des régions, les fonctions interpolées sont différentes, afin de prendre en compte les particularités de N et  $\nabla N$ . De même les variables d'interpolation diffèrent sensiblement mais se ramènent de façon simple à :

- R,
- $\alpha = \frac{|x|}{|x| + \sqrt{y^2 + z^2}}$
- $\beta = - \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$

Le changement de système de coordonnées ne fait appel à aucune fonction trigonométrique, il est très rapide.

### Interpolation quadratique

Pour améliorer la précision par rapport à Noblesse, on pourrait augmenter la taille des tables, autrement dit avoir un maillage plus fin du domaine. Cela n'est pas raisonnable, les dimensions des tables sont déjà très importantes. On a choisi de conserver les mêmes, en augmentant l'ordre d'interpolation. Autrement dit, le maillage fin  $Q_1$  original est considéré comme un nouveau maillage  $Q_2$  grossier. L'élément fini est de taille plus importante que le précédent, mais on gagne en précision.

**Erreurs absolues relevées pour l' interpolation linéaire :**

*Erreur absolue maximale*

sur :     N            $\partial N/\partial x$         $\partial N/\partial y$         $\partial N/\partial z$   
            $0.4 \cdot 10^{-3}$     $0.5 \cdot 10^{-3}$     $0.3 \cdot 10^{-3}$     $0.7 \cdot 10^{-3}$

*Erreur absolue moyenne*

$0.3 \cdot 10^{-4}$     $0.3 \cdot 10^{-4}$     $0.1 \cdot 10^{-4}$     $0.5 \cdot 10^{-4}$

**Erreurs absolues relevées pour l' interpolation quadratique :**

*Erreur absolue maximale*

sur :     N            $\partial N/\partial x$         $\partial N/\partial y$         $\partial N/\partial z$   
            $0.3 \cdot 10^{-4}$     $0.1 \cdot 10^{-3}$     $0.2 \cdot 10^{-4}$     $0.2 \cdot 10^{-3}$

*Erreur absolue moyenne*

$0.4 \cdot 10^{-5}$   $0.7 \cdot 10^{-5}$   $0.1 \cdot 10^{-5}$   $0.5 \cdot 10^{-5}$

## 5. CALCUL DE LA RESISTANCE DE VAGUES

Nous comparons nos résultats avec les expressions semi-analytiques obtenues par Farell, pour un ellipsoïde allongé.

Soient :

a le demi grand-axe, b le demi petit-axe,  
 c la distance focale et d l'enfoncement du corps.

Nous comparons les valeurs obtenues pour  $a/b=6$  et  $c/d=0.5$ , et pour des nombres de Froude allant de 0.26 à 0.80 (voir figure pages suivantes).

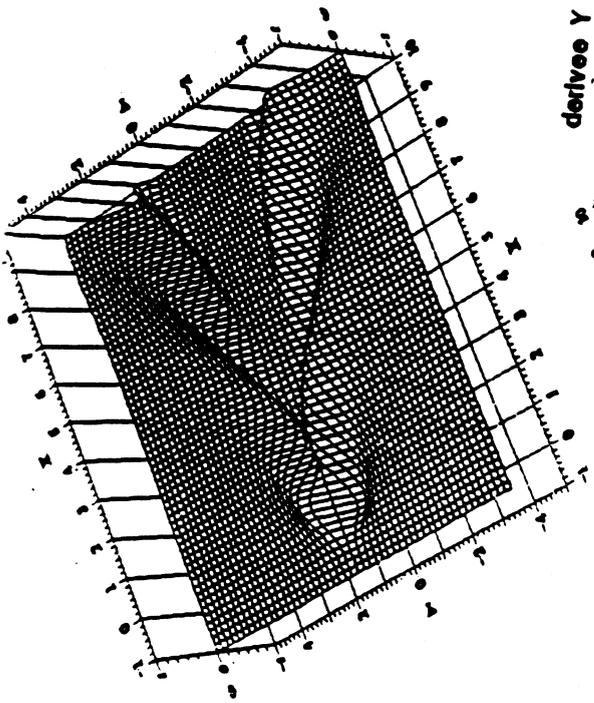
Voici une analyse de l'erreur relative moyenne E avec des maillages de plus en plus fins:

Nous désignons par n le nombre de noeuds du maillage.

Le nombre de noeuds sur la carènes est  $n/3$ .

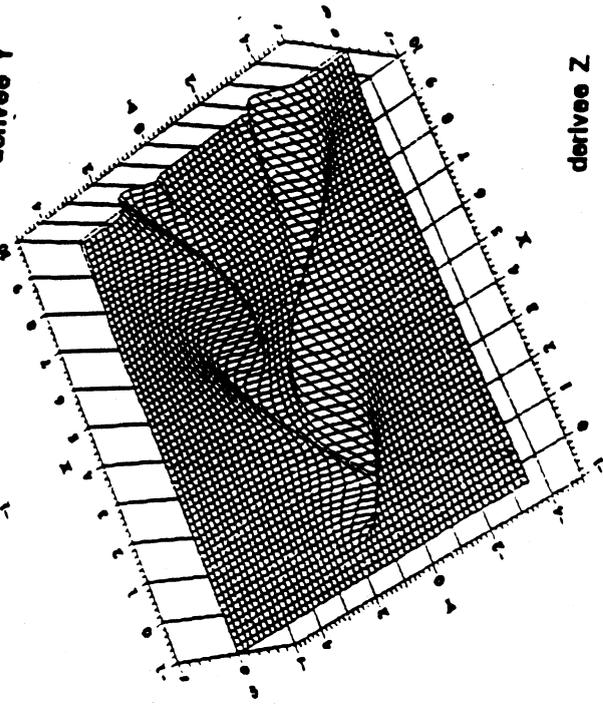
h étant une mesure de la finesse du maillage, on a les ratios suivants :

n	207	327	639
E	0.027	0.020	0.011
E/h	0.011	0.010	0.007
E/h <sup>2</sup>	0.043	0.053	0.054

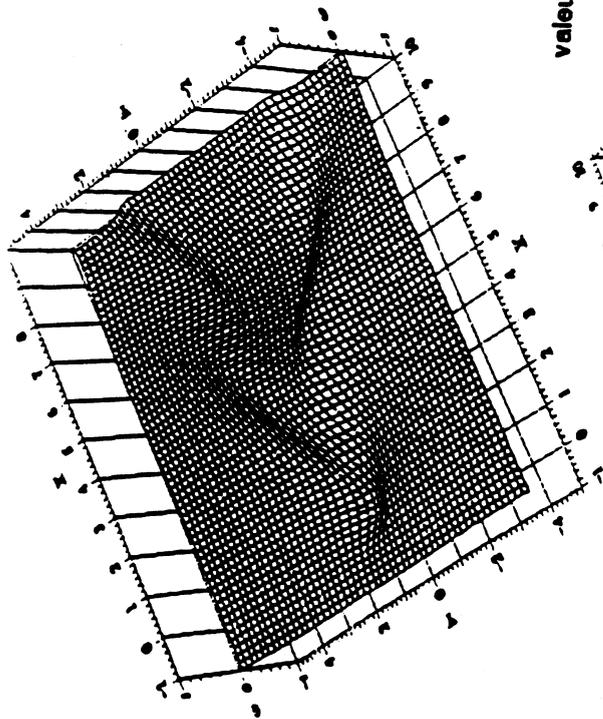


valeur

deriuee Y

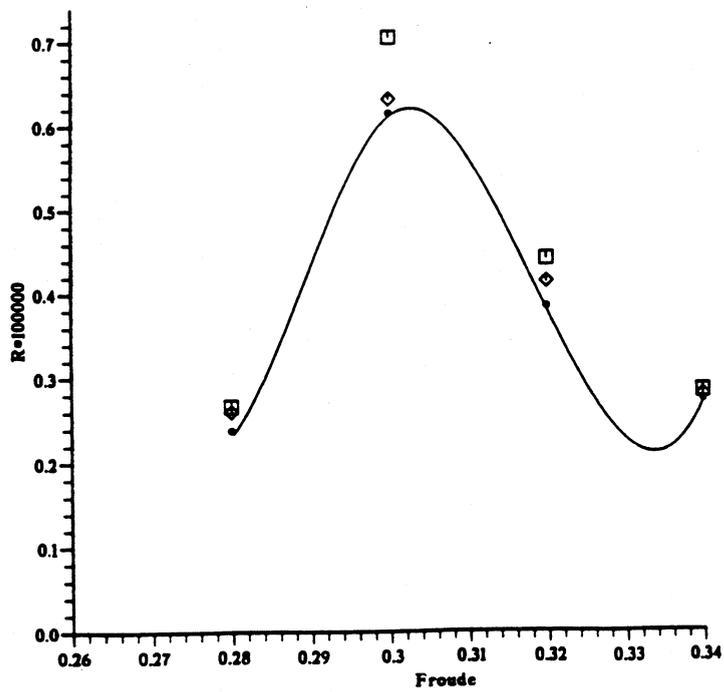
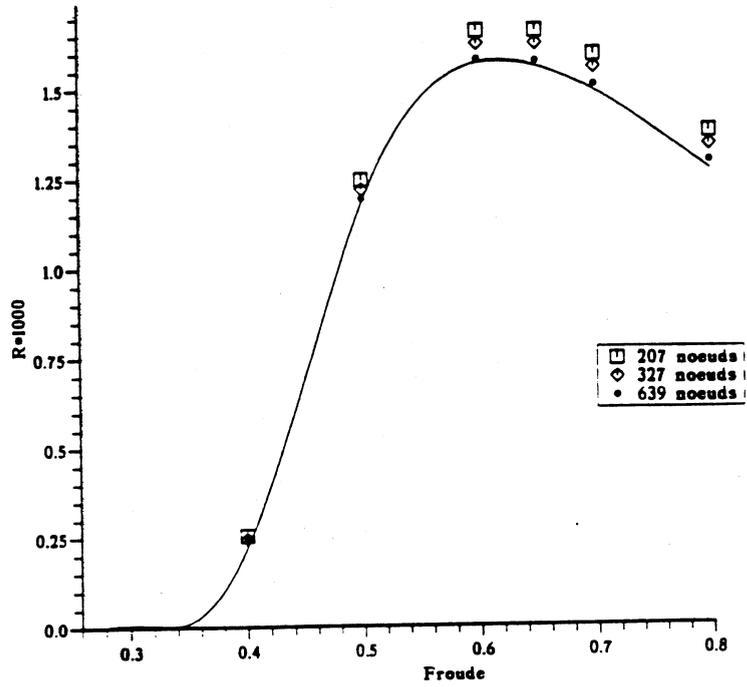


deriuee Z



deriuee X

Representation de  $N+W$ ,  $\nabla N+\nabla W$  à  $z$  constant :  $z = -0.3$



**REFERENCES**

**Abramowitz & Stegun** "Handbook of mathematical functions" Dover Publications, Inc., New York 1972

**JJM.Baar and WG.Price** "Evaluation of the wavelike disturbance in the Kelvin wave source potential" Journal of ship research, Vol 32 1988

**M.Bessho** "On the fundamental function in the theory of the wave-making resistance of ships".  
Memoirs of the defense academy. Japan. Vol. 4. 1964

**PJ.Davis, P.Rabinowitz** "Methods of numerical integration" second edition. Academic press 1984

**C.Farell** "On the wave resistance of a submerged spheroid", Journal of ship research, March 1973

**F.Noblesse** "The nonoscillatory near-field term in the Green function for steady flow about a ship"  
17<sup>th</sup> symposium on naval hydrodynamics, 1988

**Nonweiler, T.N.R.**, "Computational Mathematics"  
Ellis Horwood Publications, Chichester, U.K., 1984