



**Méthodes rapides de calcul des fonctions
de Green des problèmes de Neumann-Kelvin
et de diffraction-radiation avec vitesse d'avance.**

J. Bougis et T. Coudray

Principia Recherche Développement

Le Berlioz, rue A. Caquot - Sophia Antipolis - B.P. 122 - 06561 Valbonne Cedex - France
Téléphone : 93.65.45.25 - Télex : PRINCIP 461 312 F - Fax : 93.65.23.11

Résumé

Dans le cadre d'une formulation potentielle, associée à une méthode intégrale, de nouvelles expressions et méthodes de calculs des fonctions de Green du problème général de tenue à la mer d'un navire se déplaçant sur houle, sont exposées. Des développements analytiques poussés ont été mis en place en particulier pour le problème de Neumann-Kelvin. Pour la diffraction-radiation avec vitesse d'avance, une analyse rigoureuse, complétée d'une meilleure prise en compte des phénomènes physiques, et de développements analytiques, a été menée.

Les résultats sont encourageants puisqu'ils permettent d'évaluer avec une précision satisfaisante et dans des temps de calculs raisonnables les fonctions de Green.

Abstract

New calculation methods for Green's functions of the general problem of seakeeping of a ship on waves with forward speed, in a potential theory associated with an integral method, are presented. Particularly, Neumann-Kelvin Green's function evaluation is performed with advanced analytical developments. For the diffraction-radiation Green's function, a rigorous analysis, coupled with a better consideration of physical phenomenons and analytical developpements, is carried on. Satisfying results are founded regardless to numerical precision and to computer time imperatives.

1. Introduction

Bien que le problème général de la tenue à la mer d'une structure ou d'un engin qui se déplace dans la houle, intéresse maintes applications civiles ou militaires, très peu de solutions ont été proposées pour la résolution numérique du problème complet de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance, dans le cas tridimensionnel.

C'est, dans l'esprit d'améliorer, d'optimiser – vis à vis de la trilogie temps de calcul, place mémoire, précision – et d'intégrer dans un cadre industriel les travaux antérieurs, que les auteurs ont abordé à nouveau ce difficile problème. Parallèlement, la résolution de ce problème constitue une étape indispensable pour la détermination de la résistance ajoutée sur houle, résultant du couplage des problèmes de diffraction-radiation avec vitesse d'avance et du problème de Neumann-Kelvin, ainsi que pour l'étude des phénomènes de basses fréquences.

Naturellement, la première étape à franchir consiste à mettre au point des méthodes efficaces pour l'intégration des fonctions de Green des problèmes tridimensionnels de Neumann-Kelvin et de diffraction-radiation avec vitesse d'avance.

En effet, pour mesurer l'importance que revêt le temps de calcul de la fonction de Green, considérons une carène discrétisée avec une finesse satisfaisante, soit environ 500 éléments. En supposant la carène symétrique, il est possible de se limiter à 250 éléments. En supposant qu'il soit nécessaire d'intégrer la fonction de Green sur chaque élément à l'aide de 9 points de Gauss en moyenne, les calculs conduisent à réaliser $9 * 250 * 500 = 1125000$ appels de la fonction de Green. Pour obtenir des temps de calcul raisonnables, c'est à dire de l'ordre de quelques heures sur un mini ordinateur, il faudra que le temps moyen du calcul d'une fonction de Green soit de l'ordre de 10^{-2} secondes sur une machine de référence (1 Mips).

Cette étude a été décomposée en deux parties. La première concerne la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin, tandis que la seconde est relative à la fonction de Green de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance.

Les travaux intéressants qui ont été réalisés par différentes équipes en ce qui concerne la rapidité et la précision de calcul de la fonction de Green ponctuelle du problème de la diffraction-radiation au point fixe (J.N. Newman, P.D. Sclavounos, D. Euvrard, F. Noblesse, J. Bougis), ont servi de base de réflexion aux auteurs.

2. Hypothèses et définitions

Soit \mathcal{D} le demi-espace de cotes z négatives, occupé par un fluide réputé parfait, isovolume et incompressible, siège d'écoulements irrotationnels.

Soit un flotteur animé d'un mouvement moyen de translation horizontale rectiligne et uniforme à la vitesse C selon l'axe Ox ; il est soumis à l'action d'une houle sinusoïdale plane qui se propage sur la surface libre du domaine \mathcal{D} .

La vitesse de tout point M de la carène est donnée à chaque instant par l'expression :

$$\vec{V}_E(M; t) = \vec{C} + \vec{W}(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overline{O_1M}$$

Les différentes entités seront désignées par les notations suivantes :

- \mathcal{D} : Domaine fluide $z \leq 0$
- : Surface libre d'équation $z = \zeta(x, y; t)$
- $(O_0; X, Y, Z)$: Repère fixe orthonormé dont l'origine O_0 est dans le plan de la surface libre au repos, O_0Z étant l'axe vertical ascendant
- $(O; x, y, z)$: Repère relatif moyen en translation rectiligne uniforme à la vitesse $C\vec{i}$ par rapport au repère fixe avec lequel il coïncide à l'origine des temps
- $(O_1; x_1, y_1, z_1)$: Repère relatif lié à la carène et coïncidant avec le repère moyen à l'origine des temps
- Σ : Carène en mouvement de translation rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{C} = C\vec{i}$
- \vec{n} : Normale extérieure à la carène

| | | |
|--|---|---------------------------------|
| Φ | : | Potentiel des vitesses absolues |
| $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi$ | : | Vitesse absolue dans le fluide |
| P_a | : | Pression atmosphérique |
| ρ | : | Masse volumique du fluide |
| $\vec{W}(t)$ | : | Vitesse absolue du point O_1 |
| $\vec{\Omega}(t)$ | : | Vecteur rotation instantanée |

3. La fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin

3.1. Position du problème

Le problème linéarisé de la détermination de la résistance de vagues d'une carène — dit problème de Neumann-Kelvin — consiste à rechercher une fonction potentiel des vitesses absolues vérifiant les équations suivantes exprimées dans le repère relatif :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0|_{\mathcal{D}} & \text{Equation de continuité} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{\Sigma} = C \vec{n} \cdot \vec{i} |_{\Sigma} & \text{Condition de glissement} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{2\epsilon}{C} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + k_0 \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 & \text{Conditions de surface libre} \\ \zeta(x, y, t) = \frac{C}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{z=0} & \\ \lim \Phi = 0|_{\infty} & \text{Condition de radiation} \end{array} \right.$$

avec : $k_0 = \frac{g}{C^2}$

Expressions dans lesquelles, le concept de fluide presque parfait caractérisé par une viscosité évanescence ϵ a été introduit.

3.2. Définition de la fonction de Green

La résolution du problème par une méthode d'équation intégrale de Fredholm conduit à transformer le problème aux limites en un problème intégral qui permet d'exprimer les caractéristiques de l'écoulement dans tout le domaine \mathcal{D} à partir de ses caractéristiques aux frontières. La portion de frontière intervenant comme support des intégrales peut être réduite grâce à l'utilisation de la fonction de Green du problème.

De nombreux auteurs ont établi diverses formulations de la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin. La formulation classique suivante a été retenue, à l'instar de P. Guével et G. Delhommeau :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(M, M') &= \frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_1|} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k_0 \sec^2\theta G(\zeta) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_1|} - \frac{2}{\pi} k_0 \operatorname{Re} \{ \mathcal{G}_P \} + 4k_0 \operatorname{Re} \{ i\mathcal{G}_L \} \end{aligned}$$

où :

$$\zeta = k_0 \sec^2\theta [z + z' + i[(x - x') \cos\theta + (y - y') \sin\theta]] = \sec^2\theta [Z + iR \sin(\theta - \beta)]$$

La fonction $G(\zeta) = e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta)$ représente la fonction exponentielle intégrale définie par :

$$\begin{cases} G(\zeta) = e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta) & \text{si } \operatorname{Im}(\zeta) > 0 \\ G(\zeta) = e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta + i(0)) & \text{si } \operatorname{Im}(\zeta) = 0 \\ G(\zeta) = e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta) - 2i\pi e^{\zeta} & \text{si } \operatorname{Im}(\zeta) < 0 \end{cases}$$

La fonction E_1 représentant la fonction exponentielle intégrale, elle même définie de la manière suivante :

$$E_1(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad -\pi < \arg \zeta < +\pi$$

Les fonctions G_P et G_L désignent les fonctions de Green dites *proche* et *lointaine* ayant respectivement pour expressions :

$$G_P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \theta e^{\zeta} E_1(\zeta) d\theta \quad ; \quad G_L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\beta} \sec^2 \theta e^{\zeta} d\theta$$

3.3. Découpage du domaine \mathcal{D} et méthodes de calcul.

Le domaine fluide \mathcal{D} est découpé verticalement en trois strates définies respectivement par : $|Z| \geq 1$, $1. \geq |Z| \geq 0.1$ et $0.1 \geq |Z|$. Dans les deux premières strates, la fonction G_P est lissée par polynômes de Gram, tandis que dans la troisième strate, l'intégration est réalisée numériquement par répartition de points.

Il est également découpé en deux cylindres d'axe $O; z$ définis respectivement par $R \geq 20$. et $20. \geq R$.

Dans la première strate, la fonction G_L est lissée par polynômes de Gram sur l'avant de la singularité, et ce dans les deux cylindres, tandis sur l'arrière de la singularité c'est le principe de la phase stationnaire qui est mis en œuvre dans le second cylindre, et une formulation en fonction erreur dans le premier cylindre.

Dans la seconde strate, la fonction G_L est obtenue par la formulation en fonction erreur dans le premier cylindre et par le principe de la phase stationnaire dans le second.

Enfin, dans la troisième strate, la fonction G_L est obtenue par un développement de la fonction exponentielle dans le premier cylindre et par le principe de la phase stationnaire dans le second.

L'ensemble des méthodes utilisées, leur domaine de validité, ainsi que les temps CPU moyens sont regroupés dans les tableaux ci-après.

| $ Z \geq 1$ | FONCTION | METHODE | Temps CPU moyen |
|--------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| $\forall R$ et $\beta \leq 20^\circ$ | Green totale $G_P + G_L$ | Lissage par polynômes de Gram | $3.4 \cdot 10^{-4}$ s |
| $R \leq 20$ et $\beta \geq 20^\circ$ | Green proche G_P | Lissage par polynômes de Gram | $3.4 \cdot 10^{-3}$ s |
| | Green lointaine G_L | Formulation en erf | $3.0 \cdot 10^{-2}$ s |
| $R \geq 20$ et $\beta \geq 20^\circ$ | Green proche G_P | Lissage par polynômes de Gram | $3.4 \cdot 10^{-3}$ s |
| | Green lointaine G_L | Principe de la phase stationnaire | $1.8 \cdot 10^{-3}$ s |

| $0.1 < Z < 1$ | FONCTION | METHODE | Temps CPU moyen |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| $R \leq 20$ et $\forall \beta$ | Green proche G_P | Lissage par polynômes de Gram | $3.4 \cdot 10^{-3}$ s |
| | Green lointaine G_L | Formulation en erf | $3.0 \cdot 10^{-2}$ s |
| $R \geq 20$ et $\forall \beta$ | Green proche G_P | Lissage par polynômes de Gram | $3.4 \cdot 10^{-3}$ s |
| | Green lointaine G_L | Principe de la phase stationnaire | $1.8 \cdot 10^{-3}$ s |

| $ Z \leq 0.1$ | FONCTION | METHODE | Temps CPU moyen |
|------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| $R \leq 20$ et $\forall \beta$ | Green proche G_P | Intégration par répartition de points | $3.0 \cdot 10^{-2}$ s |
| $R \leq 20$ et $\forall \beta > 0$ | Green lointaine G_L | Développement de l'exponentielle | $4.0 \cdot 10^{-1}$ s |
| $R \leq 20$ et $\forall \beta < 0$ | Green lointaine G_L | Développement de l'exponentielle | $1.1 \cdot 10^{-1}$ s |
| $R \geq 20$ et $\forall \beta$ | Green proche G_P | Intégration par répartition de points | $1.0 \cdot 10^{-2}$ s |
| | Green lointaine G_L | Principe de la phase stationnaire | $1.8 \cdot 10^{-3}$ s |

Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants puisqu'ils permettent de calculer la fonction de Green et ses dérivées avec une précision partout meilleure que $5 \cdot 10^{-3}$ et souvent meilleure que 10^{-4} en des temps de calculs moyens de l'ordre de 10^{-2} secondes sur un mini-ordinateur de référence (1 Mips).

3.4. Différentes formulations utilisées

3.4.1. Lissages par polynômes de Gram

Il apparaît que la fonction de Green, bien que définie de manière compliquée, présente des évolutions finalement assez lisses et régulières dans une grande partie du domaine \mathcal{D} (notamment à l'avant de la singularité). Il est donc, a priori, envisageable de construire une approximation de la fonction dans une grande partie du domaine.

Pour ce faire, le choix le plus judicieux est de construire des approximations polynômiales en mettant en œuvre une technique de lissage au sens des moindres carrés par la méthode des polynômes pseudo-orthogonaux de Gram.

Ainsi après avoir constitué les bases de données correspondant au potentiel de source et à ses trois dérivées par rapport à R , β et Z , nous avons pu lisser la fonction de Green dans 80% du domaine à l'aide des polynômes de Gram.

Le degré optimal offrant le meilleur compromis "précision / temps de calcul" correspond le plus souvent à une valeur de 9 pour une précision de 10^{-5} . Le calcul des 65 coefficients du polynôme par un schéma de type Hörner nous permet alors de calculer la fonction ainsi que ses dérivées dans la plus grande partie du domaine, en environ 5 millisecondes.

Comme il était prévisible, le lissage par la méthode précédente n'est plus utilisable dès que les évolutions de la fonction de Green deviennent plus tourmentées, c'est à dire dans le dièdre de kelvin (i.e. $0 \leq \beta \leq 19^\circ 28'$) et même un peu au delà du dièdre.

Il convient cependant de remarquer que si la fonction de Green totale n'est pas lissable dans sa totalité à l'arrière de la singularité, la fonction G_P reste peu tourmentée dans tout le domaine, et a ainsi pu être lissée avec la même précision que précédemment dans tous le domaine, sauf à proximité de la surface libre ($|Z| < 0.1$).

3.4.2. Formulation en fonction erreur (erf)

Lorsque l'intégrand de la fonction de Green lointaine commence à osciller mais que la valeur de Z est suffisante, un changement de variable suivi d'une intégration par partie permet d'obtenir une formulation en fonction erreur (erf). L'intégrand de la nouvelle expression est alors nettement moins fluctuant que le précédent et autorise donc une intégration numérique classique.

La partie oscillante de la fonction de Green devient après avoir effectué le changement de variable $t = \operatorname{tg} \theta$:

$$I = e^Z \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \beta} e^{Zt^2} e^{iR\sqrt{1+t^2}} (t \cos \beta - \sin \beta) dt$$

3.4.2.1. Cas où $\beta \leq 0$, (i.e. devant la singularité)

En changeant alors t en $-t$, cette expression peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$I = \frac{\sqrt{\pi} e^Z}{2\sqrt{|Z|}} \int_{-\operatorname{tg}\beta}^{+\infty} e^{-iR\sqrt{1+t^2}(t\cos\beta+\sin\beta)} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-[\sqrt{-Z}t]^2} d[\sqrt{-Z}t]}_{-d(\operatorname{erfc}[\sqrt{-Z}t])}$$

D'où après une intégration par partie :

$$I = -\frac{\sqrt{\pi} e^Z}{2\sqrt{|Z|}} \left\{ -\operatorname{erfc}[-\sqrt{-Z}\operatorname{tg}\beta] - iR \int_{-\operatorname{tg}\beta}^{+\infty} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{-Z}t)] \frac{(1+2t^2)\cos\beta + t\sin\beta}{\sqrt{1+t^2}} e^{-iR\sqrt{1+t^2}(t\cos\beta+\sin\beta)} dt \right\}$$

Les relations $\sqrt{-Z}t \geq 4 \Rightarrow [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{-Z}t)] \leq 1.6 \cdot 10^{-8}$ montrent qu'il suffit de calculer l'intégrale précédente entre $-\operatorname{tg}\beta$ et $\frac{4}{\sqrt{-Z}}$

3.4.2.2. Cas où $\beta \geq 0$, (i.e. derrière la singularité)

Dans ce cas, nous décomposerons l'intervalle d'intégration en deux parties $]-\infty, 0]$ et $[0, \operatorname{tg}\beta]$. La première intégrale se calcule de manière analogue à celle du paragraphe 3.4.2.1. et s'écrit :

$$I_1 = -\frac{\sqrt{\pi} e^Z}{2\sqrt{|Z|}} \left\{ 1 - ie^{iR\sin\beta} - iR \int_0^{+\infty} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{-Z}t)] \frac{(1+2t^2)\cos\beta + t\sin\beta}{\sqrt{1+t^2}} e^{-iR\sqrt{1+t^2}(t\cos\beta+\sin\beta)} dt \right\}$$

tandis que la seconde intégrale I_2 se met sous la forme suivante :

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi} e^Z}{2\sqrt{|Z|}} \left\{ \operatorname{erf}(\sqrt{-Z}\operatorname{tg}\beta) - iR \int_0^{-\operatorname{tg}\beta} \operatorname{erf}(\sqrt{-Z}t) \frac{(1+2t^2)\cos\beta - t\sin\beta}{\sqrt{1+t^2}} e^{iR\sqrt{1+t^2}(t\cos\beta-\sin\beta)} dt \right\}$$

3.4.3. Principe de la phase stationnaire

La fonction de Green *lointaine* ayant un intégrand très rapidement oscillant, et ce d'autant plus que R est grand, il paraît intéressant de mettre en œuvre le principe de la phase stationnaire, dû à Lord Kelvin, pour obtenir des développements asymptotiques.

Cependant, alors qu'il est d'usage d'utiliser un développement au premier ordre, il est apparu judicieux de le pousser à l'ordre N , afin d'étendre son domaine d'application. Dans la pratique, les développements retenus sont au septième ordre près.

3.4.4. Méthode de la répartition de points

Cette méthode d'intégration proposée par C. Guttman permet de faire face au problème d'intégration de la fonction de Green *proche* pour des Z petits. Elle a le mérite de permettre un contrôle de la précision, dans une certaine mesure, et également de positionner les points d'appuis aux endroits nécessaires.

La méthode consiste à effectuer une intégration par la méthode de Simpson sur l'intervalle $[a, b]$ avec N points, puis de procéder à une intégration avec $2N$ points avant de comparer les deux résultats. Si leur différence est supérieure à un ϵ arbitraire, l'intervalle $[a, b]$ est découpé en deux. Le processus est réitéré jusqu'à trouver un intervalle $[a_p, b_p]$ tel que $|I_{2N}^p - I_N^p| < \epsilon$.

Il est procédé de même sur les autres intervalles en utilisant les N valeurs des points d'appuis calculées à l'itération précédente.

On sait alors, d'après les travaux de C. Guttman, que si ϵ est l'erreur totale tolérée sur l'intervalle $[a, b]$, et h_i la longueur du i ème intervalle, il est possible de tolérer sur ce i ème intervalle une erreur ϵ_i , telle que :

$$\epsilon_i = \frac{(2^p - 1) h_i \epsilon}{b - a}$$

3.4.5. Méthode du développement de l'exponentielle

Lorsque les valeurs de Z tendent vers 0, il est clair que le terme en e^Z ne joue plus son rôle "amortisseur" de l'intégrand. On est alors confronté à des problèmes d'intégrations dans la plus grande partie du domaine \mathcal{D} pour la partie oscillante de la fonction de Green. Une méthode originale fondée sur un développement de la fonction exponentielle permet de calculer précisément la fonction \mathcal{G}_L au voisinage de la surface libre. En revenant à l'expression intégrale de base de la fonction \mathcal{G}_L et en effectuant le changement de variable $t = (1 + \sin\theta)/\cos\theta$ on obtient :

$$G_L = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \int_0^{\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}} e \left[t^2 \frac{Z + iR\cos\beta}{4} - t \frac{iR\sin\beta}{2} \right] \cdot e \left[-\frac{1}{t} \frac{iR\sin\beta}{2} + \frac{1}{t^2} \frac{Z - iR\cos\beta}{4} \right] \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

3.4.5.1. Développements devant la singularité

En se plaçant dans le cas où $\beta \leq 0$, si bien que : $0 \leq t \leq 1$, il est envisageable de découper l'intervalle d'intégration $\left[0, \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} \right]$ en K intervalles de façon à ce que sur chaque intervalle $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ centré sur γ_k , il soit possible de développer en série la première exponentielle de G_L autour de γ_k . D'où :

$$\begin{aligned} e \left[t^2 \frac{Z + iR\cos\beta}{4} - t \frac{iR\sin\beta}{2} \right] &= C(k) e \left[\frac{Z + iR\cos\beta}{4} (t^2 - \gamma_k^2) - \frac{iR\sin\beta}{4} (t - \gamma_k) \right] \\ &= C(k) e \left[\frac{Z + iR\cos\beta}{4} (t - \gamma_k)^2 + (t - \gamma_k) \left(2\gamma_k \frac{Z + iR\cos\beta}{4} - \frac{iR\sin\beta}{2} \right) \right] \\ &= C(k) \sum_{n=1}^N a_n (t - \gamma_k)^{n-1} + \epsilon \end{aligned}$$

avec :

$$C(k) = e \left[\gamma_k^2 \frac{Z + iR\cos\beta}{4} - \gamma_k \frac{iR\sin\beta}{2} \right]$$

G_L s'écrit donc pour finir :

$$G_L = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \sum_{k=1}^K C(k) \sum_{n=1}^N a_n \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-1} t^{n-p} \gamma_k^{p-1} e \left[-\frac{1}{t} \frac{iR\sin\beta}{2} + \frac{1}{t^2} \frac{Z - iR\cos\beta}{4} \right] \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

Le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ conduit à :

$$G_L = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \sum_{k=1}^K C(k) \sum_{n=1}^N a_n \int_{\frac{1}{\alpha_{k+1}}}^{\frac{1}{\alpha_k}} \sum_{p=1}^{n+2} \nu_p \left(\frac{1}{x} \right)^{p-1} e \left[-x \frac{iR\sin\beta}{2} + x^2 \frac{Z - iR\cos\beta}{4} \right] dt$$

Où, les coefficients ν_p sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \nu_1 &= (-\gamma_k)^{n-1} \\ \nu_2 &= (n-1)(-\gamma_k)^{n-2} \\ \nu_p &= C_{n-1}^{n-p} (-\gamma_k)^{n-p} + C_{n-1}^{n-p+2} (-\gamma_k)^{n-p+2} & \text{pour } 3 \leq p \leq n \\ \nu_{n+1} &= -(n-1)\gamma_k \\ \nu_{n+2} &= 1 \end{cases}$$

en posant : $I_p = \int_{\frac{1}{\alpha_{k+1}}}^{\frac{1}{\alpha_k}} \left(\frac{1}{x}\right)^{p-1} e^{\left[-x \frac{iR\sin\beta}{2} + x^2 \frac{Z - iR\cos\beta}{4}\right]} dt$. G_L s'écrit alors simplement

$$G_L = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \sum_{k=1}^K C(k) \sum_{n=1}^N a_n \sum_{p=1}^{n+2} \nu_p I_p$$

Les intégrales I_p pour $n \geq 2$ s'obtiennent facilement en posant : $\lambda = \frac{Z - iR\cos\beta}{4}$, $\mu = -\frac{iR\sin\beta}{2}$ et $y = x(-\lambda)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2(-\lambda)^{\frac{1}{2}}}$ avant d'intégrer par partie.

Le calcul de I_1 est trivial, mais celui de I_2 constitue une des difficultés du problème et nécessite de recourir à un lissage par somme d'exponentielles complexes.

3.4.5.2. Développement derrière la singularité

Dans le cas $\beta > 0$, il est nécessaire de découper l'intervalle d'intégration en deux parties : $[0, 1]$ et $[1, (1 + \sin\beta)/\cos\beta]$ de la façon suivante :

$$G_L = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \left\{ \int_0^1 \dots dt + \int_1^{\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}} \dots dt \right\} \\ = I_{01} + I_{1\beta}$$

La première intégrale se calcule de la même façon qu'au paragraphe 3.4.5.1. avec $\beta = 0$. Le calcul de la seconde se présente d'une manière similaire au calcul précédent, en développant l'autre exponentielle :

$$I_{1\beta} = \frac{e^{\frac{Z}{2}}}{2} \int_1^{\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}} e^{\left[t^2 \frac{Z + iR\cos\beta}{4} - t \frac{iR\sin\beta}{2}\right]} \cdot \underbrace{e^{\left[-\frac{1}{t} \frac{iR\sin\beta}{2} + \frac{1}{t^2} \frac{Z - iR\cos\beta}{4}\right]}}_{\text{à développer}} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

4. La fonction de Green du problème de diffraction-radiation avec vitesse d'avance

4.1. Position du problème

Le problème de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance exprimé dans le repère relatif se présente sous la forme finale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0|_{\mathcal{D}} & \text{Equation de continuité} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = \vec{V}_E(M; t) \cdot \vec{n}\Big|_{\Sigma} & \text{Condition de glissement} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - 2C \frac{\partial^2\Phi}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + 2\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t} - 2\epsilon C \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{z=0} = 0 & \text{Conditions de surface libre} \\ \zeta(x, y, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{C}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{z=0} & \\ \lim \Phi = 0|_{\infty} & \text{Condition de radiation} \end{array} \right.$$

Expressions dans lesquelles, le concept de fluide presque parfait caractérisé par une viscosité évanescence ϵ a été introduit.

4.2. Définition de la fonction de Green

Peu d'auteurs se sont intéressés au problème de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance. Cependant quelques auteurs ont établi diverses formulations de la fonction de Green de ce problème. La formulation classique suivante a été retenue, à l'instar de P. Guével et J. Bougis :

$$G(M, M'; t) = G_0(M, M'; t) + G_1(M, M'; t) + G_2(M, M'; t) = \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} \mathcal{G}(M, M') \}$$

avec :

$$G_0(M, M'; t) = \left[\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_1|} \right] \cos \omega t$$

$$G_1(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{K\zeta} K dK}{(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K - 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)} \right\} \right]$$

$$G_2(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{K\zeta} K dK}{(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K + 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)} \right\} \right]$$

après avoir effectué les changements de variables suivants :

$$\zeta = \frac{[z + z' + i[(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta]]}{l}$$

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$F = \frac{C}{\sqrt{gl}}$$

$$\nu = \tilde{\omega} F = \frac{\omega C}{g}$$

Les fonctions $G_1(M, M'; t)$ et $G_2(M, M'; t)$ peuvent être intégrées par rapport à la variable K à l'aide de fonctions exponentielles intégrales $G_i (i \in [1, 2, 3, 4])$, pour se présenter sous la forme ci-après :

$$G_1(M, M'; t) = \frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_1 G_2(K_1 \zeta) - K_2 G_2(K_2 \zeta)}{\sqrt{1 + 4\nu \cos \theta}} d\theta \right\}$$

$$G_2(M, M'; t) = \frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta_c} \frac{K_3 G_4(K_3 \zeta) - K_4 G_2(K_4 \zeta)}{\sqrt{1 - 4\nu \cos \theta}} d\theta \right. \right.$$

$$- i \int_{-\theta_c}^{-\theta'_c} \frac{Z_3 G_2(Z_3 \zeta) - Z_4 G_4(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta$$

$$- i \int_{-\theta'_c}^{+\theta'_c} \frac{Z_3 G_1(Z_3 \zeta) - Z_4 G_1(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta$$

$$- i \int_{+\theta'_c}^{+\theta_c} \frac{Z_3 G_2(Z_3 \zeta) - Z_4 G_4(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta$$

$$\left. + \int_{+\theta_c}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_3 G_4(K_3 \zeta) - K_4 G_2(K_4 \zeta)}{\sqrt{1 - 4\nu \cos \theta}} d\theta \right\}$$

Expressions dans lesquelles $K_1, K_2, K_3, K_4, Z_3, Z_4$ représentent les pôles des fonctions $G_1(M, M', t)$ et $G_2(M, M', t)$ définis par :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1 + 2\nu\cos\theta - \sqrt{1 + 4\nu\cos\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \\
K_2 &= \frac{1 + 2\nu\cos\theta + \sqrt{1 + 4\nu\cos\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \\
K_3 &= \frac{1 - 2\nu\cos\theta - \sqrt{1 - 4\nu\cos\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \\
K_4 &= \frac{1 - 2\nu\cos\theta + \sqrt{1 - 4\nu\cos\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \\
Z_3 &= \frac{1 - 2\nu\cos\theta - i\sqrt{4\nu\cos\theta - 1}}{2F^2\cos^2\theta} \\
Z_4 &= \frac{1 - 2\nu\cos\theta + i\sqrt{4\nu\cos\theta - 1}}{2F^2\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

Les fonctions G_i , $i \in [1, 2, 3, 4]$ sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
G_1(\zeta) &= e^\zeta E_1(\zeta) \\
G_2(\zeta) &= e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) \\
G_3(\zeta) &= e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) + i\pi e^\zeta \\
G_4(\zeta) &= e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) + 2i\pi e^\zeta
\end{aligned}$$

4.3. Modification de la présentation de la fonction de Green

L'analyse rigoureuse des contributions de chaque pôle aux champs de vagues lointains, réalisée par J. Bougis, fait apparaître que les pôles K_1 et K_3 ont une contribution du type "diffraction-radiation" tandis que les pôles K_2 et K_4 ont une contribution du type "Neumann-Kelvin". En particulier, lorsque le nombre de Froude tend vers zéro, les contributions de K_1 et K_3 se conjuguent pour s'identifier à celle du pôle $\tilde{\omega}^2$ du problème de la diffraction-radiation au point fixe. De leur côté, K_2 et K_4 conjuguent leurs contributions pour s'identifier à celle du pôle $\frac{1}{F^2}$ du problème de Neumann-Kelvin, lorsque le nombre d'onde $\tilde{\omega}^2$ tend à s'annuler.

Dans ces conditions, il paraît raisonnable de modifier la présentation classique de la fonction de Green pour tenir compte de la réalité d'un phénomène physique complexe dans la modélisation numérique. Ainsi, nous considérerons :

$$G(M, M'; t) = G_0(M, M'; t) + G_{\tilde{\omega}}(M, M'; t) + G_F(M, M'; t)$$

avec :

$$\begin{aligned}
G_{\tilde{\omega}}(M, M'; t) &= + \frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_1 G_2(K_1 \zeta)}{\sqrt{1 + 4\nu\cos\theta}} d\theta \right\} \\
&+ \frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta_c} \frac{K_3 G_4(K_3 \zeta)}{\sqrt{1 - 4\nu\cos\theta}} d\theta \right. \right. \\
&\quad - i \int_{-\theta_c}^{-\theta'_c} \frac{Z_3 G_2(Z_3 \zeta)}{\sqrt{4\nu\cos\theta - 1}} d\theta \\
&\quad - i \int_{-\theta'_c}^{+\theta'_c} \frac{Z_3 G_1(Z_3 \zeta)}{\sqrt{4\nu\cos\theta - 1}} d\theta \\
&\quad - i \int_{+\theta'_c}^{+\theta_c} \frac{Z_3 G_2(Z_3 \zeta)}{\sqrt{4\nu\cos\theta - 1}} d\theta \\
&\quad \left. \left. + \int_{+\theta_c}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_3 G_4(K_3 \zeta)}{\sqrt{1 - 4\nu\cos\theta}} d\theta \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_F(M, M'; t) = & -\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_2 G_2(K_2 \zeta)}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}} d\theta \right\} \\
& -\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta_c} \frac{K_4 G_2(K_4 \zeta)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right. \right. \\
& \quad -i \int_{-\theta_c}^{-\theta'_c} \frac{Z_4 G_4(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\
& \quad -i \int_{-\theta'_c}^{+\theta'_c} \frac{Z_4 G_1(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\
& \quad -i \int_{+\theta'_c}^{+\theta_c} \frac{Z_4 G_4(Z_4 \zeta)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\
& \quad \left. \left. + \int_{+\theta_c}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_4 G_2(K_4 \zeta)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right] \right\}
\end{aligned}$$

Dès lors, il est nécessaire d'établir de nouvelles zones, de nouvelles expressions de la fonction de Green et, d'utiliser de nouvelles méthodes numériques.

4.4. Découpage du domaine \mathcal{D}

Le domaine fluide \mathcal{D} qui a été adopté est le suivant.

Quand le nombre de Strouhal ν est inférieur à 0.2, la fonction de Green est développée en fonction de puissances croissantes de ν .

Quand le nombre de Strouhal ν est supérieur à 0.2, la fonction de Green est calculée numériquement à partir de la formule générale.

4.5. Intégration particulière pour les petits nombres de Strouhal

4.5.1. Position du problème

Une idée simple et logique qui vient naturellement à l'esprit, est d'essayer de simplifier le problème dans le cas où la vitesses d'avance est relativement faible.

Deux approches ont été utilisées dans la littérature.

La première due à A. Grekas consiste à négliger le terme $C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ dans l'équation de surface libre du problème de diffraction-radiation avec vitesse d'avance complet, puis à établir la fonction de green du nouveau problème ainsi obtenu. Fondamentalement, cela revient à faire l'hypothèse que le carré de la vitesse d'avance est négligeable, et que la dérivée seconde du potentiel, par rapport à la variable x , reste de faible amplitude à proximité de la surface libre.

La seconde, qui revient au même, a été mise en œuvre en particulier par R.H.M. Huijsmans et A.J. Hermans. Elle consiste à négliger le carré de la vitesse d'avance qui intervient au dénominateur de la fonction de Green du problème complet, puis à développer ce qui reste par rapport au nombre de Strouhal ν supposé petit à son tour.

Il semble qu'aucun auteur n'ait effectué des développements de manière systématique à partir de la fonction de Green du problème complet. Aussi, est-ce cette voie, non dépourvue de surprise, qui a d'abord été étudiée.

4.5.2. Choix des variables adimensionnelles et du petit paramètre

Au prime abord, nous disposons de cinq variables ($z + z'$, τ , β , F et $\bar{\omega}$), or le problème peut se ramener, sous forme adimensionnelle, à quatre variables (la cinquième n'intervenant qu'en facteur).

En effet, dans le cas du problème de Neumann-Kelvin, il y avait au départ quatre variables, qui se réduisaient à trois variables avec le carré du nombre de Froude en facteur du dénominateur. De même, dans celui du problème de la diffraction-radiation au point fixe, il y avait au départ trois variables, qui se réduisaient à deux variables avec le nombre d'onde $\bar{\omega}^2$ en facteur.

En effectuant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}\zeta(\bar{\omega}) &= \bar{\omega}^2 \zeta \\ \zeta(F) &= \frac{\zeta}{F^2}\end{aligned}$$

et en considérant uniquement le cas où le nombre de Strouhal ν est inférieur à $\frac{1}{4}$, les fonctions $G_{\bar{\omega}}(M, M'; t)$ et $G_F(M, M'; t)$ s'écrivent respectivement sous les formes cherchées :

$$\begin{aligned}G_{\bar{\omega}}(M, M'; t) &= +\frac{1}{\pi l} \bar{\omega}^2 \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\nu \cos\theta - \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}}{2\nu^2 \cos^2\theta \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}} G_2 \left(\frac{1 + 2\nu \cos\theta - \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}}{2\nu^2 \cos^2\theta} \zeta(\bar{\omega}) \right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\nu \cos\theta - \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}}{2\nu^2 \cos^2\theta \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}} G_4 \left(\frac{1 - 2\nu \cos\theta - \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}}{2\nu^2 \cos^2\theta} \zeta(\bar{\omega}) \right) d\theta \right\} \\ G_F(M, M'; t) &= -\frac{1}{\pi l} \frac{1}{F^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\nu \cos\theta + \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}}{2 \cos^2\theta \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}} G_2 \left(\frac{1 + 2\nu \cos\theta + \sqrt{1 + 4\nu \cos\theta}}{2 \cos^2\theta} \zeta(F) \right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\nu \cos\theta + \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}}{2 \cos^2\theta \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}} G_2 \left(\frac{1 - 2\nu \cos\theta + \sqrt{1 - 4\nu \cos\theta}}{2 \cos^2\theta} \zeta(F) \right) d\theta \right\}\end{aligned}$$

Le nombre de Strouhal ν apparaît alors naturellement comme un petit paramètre en fonction duquel $G_{\bar{\omega}}(M, M'; t)$ et $G_F(M, M'; t)$ peuvent être développées en séries au voisinage de zéro.

Le rayon de convergence de ces développements en séries est conditionné par celui des termes sous radicaux ; c'est à dire que les séries seront convergentes pour $\nu < \frac{1}{4}$.

En développant de manière consistante les diverses expressions en fonction de ν et en retenant tous les termes jusqu'au quatrième ordre inclus, il vient :

$$\begin{aligned}G_{\bar{\omega}}(M, M'; t) &= +\frac{1}{\pi l} \bar{\omega}^2 \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 - 4\nu \cos\theta + 15\nu^2 \cos^2\theta - 56\nu^3 \cos^3\theta + 210\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \times \right. \\ &\quad \left. G_2 ([1 - 2\nu \cos\theta + 5\nu^2 \cos^2\theta - 14\nu^3 \cos^3\theta + 42\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \zeta(\bar{\omega})) d\theta \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 + 4\nu \cos\theta + 15\nu^2 \cos^2\theta + 56\nu^3 \cos^3\theta + 210\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \times \right. \\ &\quad \left. G_4 ([1 + 2\nu \cos\theta + 5\nu^2 \cos^2\theta + 14\nu^3 \cos^3\theta + 42\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \zeta(\bar{\omega})) d\theta \right\} \\ G_F(M, M'; t) &= -\frac{1}{\pi l} \frac{1}{F^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{+i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 + \nu^2 \cos^2\theta - 4\nu^3 \cos^3\theta + 15\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \sec^2\theta \times \right. \\ &\quad \left. G_2 ([1 + 2\nu \cos\theta - \nu^2 \cos^2\theta + 2\nu^3 \cos^3\theta - 5\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \sec^2\theta \zeta(F)) d\theta \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 + \nu^2 \cos^2\theta + 4\nu^3 \cos^3\theta + 15\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \sec^2\theta \times \right. \\ &\quad \left. G_2 ([1 - 2\nu \cos\theta - \nu^2 \cos^2\theta - 2\nu^3 \cos^3\theta - 5\nu^4 \cos^4\theta + O(\nu^5)] \sec^2\theta \zeta(F)) d\theta \right\}\end{aligned}$$

Ces fonctions sont alors développées en séries de Maclaurin en fonction du nombre de Strouhal. La fonction $G_{\bar{\omega}}(M, M'; t)$ est alors intégrée semi analytiquement à partir des fonctions de Bessel et de Struve jusqu'au quatrième ordre inclus.

Si l'évaluation des valeurs de $G_F(M, M'; t)|_{\nu=0}$ est acquise puisqu'il s'agit de la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin, il n'en est pas de même en ce qui concerne le calcul des dérivées de $G_F(M, M'; t)$ par rapport à ν .

Vouloir les calculer de manière précise conduirait à refaire un travail similaire à celui qui a été réalisé dans la première partie de cette troisième phase, ce qui serait très long, alors que cela n'est sans doute pas utile.

En effet, les résultats obtenus par les autres auteurs sont, somme toute, convenables, alors que de leurs travaux résultent une fonction de Green ne contenant que les informations fournies par :

$$G_{\omega}(M, M'; t) \Big|_{\nu=0} + \nu \frac{d}{d\nu} G_{\omega}(M, M'; t) \Big|_{\nu=0}$$

et par le double modèle du problème de Neumann-Kelvin (hypothèse du nombre de Froude zéro) qui conduit à changer le signe de deuxième terme de $G_0(M, M'; t)$.

Il convient donc d'analyser cet aspect des choses de manière plus fine avant de se lancer dans des calculs longs et fastidieux dont on n'est pas sûr de la rentabilité en termes de résultats.

S'il paraît assez clair que la contribution de $G_F(M, M'; t)$ réduite au double modèle peut être suffisante en ce qui concerne l'évaluation des masses d'eau ajoutée, des termes d'amortissement et des efforts d'excitation et donc des mouvements du premier ordre, il n'est pas évident, à priori, qu'il en soit de même en ce qui concerne les efforts du deuxième ordre et plus particulièrement de la résistance ajoutée. Il est, en effet, légitime de se demander, pourquoi, si tel était le cas, l'utilisation de la méthode du double modèle ne serait pas suffisante pour déterminer la résistance de vagues du problème de Neumann-Kelvin ?

4.6. Intégration pour les grands nombres de Strouhal

Dans le cas où le nombre de Strouhal est compris entre 0.2 et 0.25, il n'est raisonnablement plus possible d'utiliser le développement précédent, dans la mesure où le nombre de termes qu'il est nécessaire de prendre en compte croît indéfiniment quand ν tend vers $\frac{1}{4}$. A fortiori, quand ν est supérieur à 0.25, le développement ne sera même plus convergent.

Dans ces conditions, il n'est plus possible d'essayer de simplifier le problème, et il convient de procéder à l'évaluation des intégrales à partir de leurs formulations générales.

Conformément à ce qui a déjà été montré, il est plus efficace de procéder au calcul à partir des formules de $G_{\omega}(M, M'; t)$ et $G_F(M, M'; t)$, qu'à partir de celles en $G_1(M, M'; t)$ et $G_2(M, M'; t)$.

Naturellement, les temps de calcul sont diminués en séparant les contributions des fonctions $E_1(\zeta)$ de celles des fonctions exponentielles e^{ζ} . En effet, sous réserve de prendre des précautions à la traversée de la coupure de la fonction $E_1(\zeta)$ (qui contient une fonction logarithme dans son développement limité), il est clair que les parties oscillantes des intégrands sont liées aux secondes, tandis que les premières peuvent s'intégrer avec un nombre très réduit de points.

Il n'est alors nécessaire de calculer, en moyenne, qu'une trentaine de fonctions $E_1(\zeta)$ tandis qu'on est amené à évaluer, dans certains secteurs, plusieurs centaines - voire plusieurs milliers - de fonctions exponentielles.

Il est alors difficile de tenir les spécifications concernant les temps de calcul dans certaines zones.

Conclusion

De nouvelles méthodes numériques ont pu être mises au point pour évaluer de manière rapide et précise la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin.

Dans le cas de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance, la fonction de Green a été mise sous une forme adaptée à la compréhension des phénomènes physiques qu'elle représente, et des développements on pu être établi pour des nombres de Strouhal inférieur à $\frac{1}{4}$. Dans le cas des grands nombres de Strouhal, il est nécessaire de recourir à la formulation générale. Cette formulation a cependant été modifiée pour être présentée sous une forme mieux adaptée au calcul rapide.

Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants puisqu'ils permettent de calculer la fonction de Green et ses dérivées avec une précision partout meilleure que $5 \cdot 10^{-3}$ et souvent meilleure que 10^{-4} en des temps de calculs moyens de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2}$ secondes sur un mini-ordinateur de référence (1 Mips).

Bibliographie

- [1] BOUGIS J.
"Etude de la diffraction-radiation dans le cas d'un flotteur indéformable animé d'une vitesse moyenne constante et sollicité par une houle sinusoïdale de faible amplitude"
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes 1980.
- [2] BOUGIS J.- VALLIER P.
"Forces and Moments in Rigid Connections between a Barge and its Tug with forward Speed in Wave"
3thd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Paris 1981.
- [3] CHANG M.S.
"Computations of three-dimensionnal Ship Motions with Forward Speed"
2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Berkeley 1977.
- [4] DAUBISSE J.C.
"Some results on approximation by exponential series applied to hydrodynamics problems"
3thd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Paris 1981.
- [5] DELHOMMEAU G.
"Contribution à l'étude théorique et à la résolution numérique du problème de la résistance de vagues"
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes 1978.
- [6] EUVRARD D.
"Les milles et une facéties de la fonction de Green du problème de la résistance de vagues"
Rapport de recherche numéro 144
E.N.S.T.A. Paris 1983.
- [7] GREKAS A.
"Contribution à l'étude théorique et expérimentale des efforts du second ordre et du comportement dynamique d'une structure marine sollicitée par une houle régulière et un courant". Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes 1981.
- [8] GUEVEL P. - BOUGIS J. - HONG D.C.
"Formulation du problème des oscillations des corps flottants animés d'une vitesse de route moyenne constante et sollicités par la houle". Quatrième Congrès Français de Mécanique. Nancy 1979.
- [9] GUEVEL P. - BOUGIS J.
"Ship Motions with forward Speed in Infinite Depth"
Journal of Shipbuilding Progress Vol. 29 num. 332. 1982.
- [10] GUEVEL P. - BOUGIS J.
"Méthode tridimensionnelle de calcul de la résistance ajoutée d'un navire sur houle"
A.T.M.A. Paris 1985.
- [11] GUTTMANN C.
"Résultats théoriques et numériques sur la résistance de vagues d'un corps tridimensionnel immergé"
Rapport de recherche numéro 177
E.N.S.T.A. Paris 1983.
- [12] HUIJSMANS R.H.M. and HERMANS A.J.
"A Fast Algorithm For Computation of 3-D Ship Motions at Moderate Forward Speed"
4th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Washington 1985.
- [13] HUIJSMANS R.H.M.
"Wave Drift Forces in Current"
Sixteenth Symposium On Naval Hydrodynamics. Berkeley 1986.
- [14] NEWMAN J.N.
"The Evaluation of Free-Surface Green Functions"
4th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Washington 1985.
- [15] WEHAUSEN J.V. and LAITONE E.V.
"Surface waves"
Handbuch der Physik, Vol. 9 pp. 446-778.
Berlin 1960.
- [16] KEIICHI YAMASAKI and MASATAKA FUJINO
"Linear Hydrodynamic Coefficients of Ships with Forward Speed During Harmonic Sway, Yaw and Roll Oscillations"
4th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Washington 1985.

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés avec le soutien de La Direction des Recherches et Etudes Techniques que les auteurs remercient vivement.