

2èmes JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

13 au 15 Février 1989 - Nantes

---

Etude théorique et expérimentale de la propagation de  
la houle en eau peu profonde

G. CHAPALAIN et A. TEMPERVILLE  
Institut de Mécanique de Grenoble  
B.P. 53 X, 38041 Grenoble Cedex

#### Résumé

Au cours de sa propagation dans les zones littorales de faible profondeur, la houle subit des transformations importantes. A l'aide des équations de Boussinesq avec prise en compte du frottement de fond, nous étudions la génération d'harmoniques supérieurs quasi-résonants et leur évolution selon la méthode de Mei et Unluata (1972) et Lau et Barcilon (1972). Des expériences ont été réalisées pour comparer aux résultats théoriques obtenus ainsi qu'aux résultats d'un modèle numérique des équations de Boussinesq.

#### Summary

We can observe large transformations of a wave during his propagation in shallow littoral zones. We study generation of quasi-resonant upper harmonics with the help of Boussinesq equation with bed friction and their evolution by Mei-Unluata (1972) and Lau-Barcilon (1972) methods. Theoretical results are compared with experiments and numerical results.

# I. THEORIE DE LA GENERATION D'HARMONIQUES QUASI-RESONANTS

Considérons une houle venant du large et se propageant en zone littorale sous incidence normale au trait de côte. On définit les variables suivantes :

- .  $H(x)$  la profondeur locale au repos et  $H_0$  sa valeur caractéristique.
- .  $\xi(x,t)$  la dénivellation de la surface libre et  $a$  sa valeur caractéristique.
- .  $\vec{V}(x,z,t) = (U,W)$  le vecteur vitesse instantanée.

Au fur et à mesure de sa propagation sur des fonds de moins en moins profonds, la houle évolue de telle sorte qu'en zone côtière :

- . la profondeur  $H$  devient très inférieure à sa longueur d'onde  $L$ .
- . son amplitude devient significative par rapport à la profondeur  $H$ .

De cette constatation, résulte l'introduction de deux petits paramètres indépendants  $\epsilon = a/H_0$  et  $\sigma = H_0/L$  dont le rapport  $\epsilon/\sigma^2$  qualifié de nombre d'Ursell  $Ur$  joue un rôle déterminant dans le choix des approximations de la théorie de l'eau peu profonde (SEABRA-SANTOS et al.).

A partir de l'équation de continuité et des équations de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide visqueux incompressible avec l'hypothèse d'irrotationnalité jusqu'à l'ordre  $\sigma^2$ , on peut représenter l'écoulement, dans le cas où  $Ur = O(1)$ , par les équations de Boussinesq avec dissipation

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial x^3 \partial t} + H \frac{dH}{dx} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial t} + \frac{H}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - \frac{\partial \tau_B}{H} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \xi) \bar{U}] = 0 \end{cases}$$

où  $\bar{U}(x,t)$  représente la valeur moyenne de  $U(x,z,t)$  sur une verticale et  $\tau_B$  la contrainte sur le fond que l'on peut mettre sous la forme linéaire :

$$\tau_B = \frac{4}{3\pi} \cdot f_w \cdot \bar{U}_{max} \cdot \bar{U}$$

$f_w$  est le coefficient de frottement.

Selon LAU et BARCILON (1972) on peut adimensionnaliser les variables sous la forme :

$$\alpha = \frac{x}{H_0} \quad h = \frac{H}{H_0} \quad \tau = \frac{z}{\sqrt{gH_0}} \quad \tau = \frac{H\sqrt{g}}{H_0} \quad \eta = \frac{u}{\varepsilon\sqrt{gH_0}}$$

et l'on obtient les équations :

$$(E_2) \begin{cases} \eta_z + \eta_\alpha + \varepsilon \eta \cdot \eta_\alpha = \frac{h^2}{3} \eta_{\alpha\alpha z} + h \cdot h_\alpha \cdot \eta_{\alpha z} + \frac{h}{2} \cdot h_{\alpha\alpha} \cdot \eta_z - \frac{R}{h} \cdot \eta \\ \eta_z + [(h + \varepsilon \eta) \eta]_\alpha = 0 \end{cases}$$

où  $R = \frac{\varepsilon \cdot 4}{3\pi} \cdot fw \cdot q_{\max}$ .

Si nous définissons une nouvelle échelle horizontale  $X$  telle que :

$$X = \frac{x}{L} = \sigma \alpha$$

il s'en suit :

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sigma \frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\sigma \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial X} + O(\sigma^2)$$

En supposant de plus que les effets induits par la topographie du fond sont du même ordre que ceux associés aux non-linéarités, on peut écrire :

$$h = 1 + \varepsilon f(X)$$

où  $f(X)$  est une fonction de l'ordre de 1. Nous supposons, comme LAU et BARCILON, que  $O(\varepsilon) = O(\sigma)$ . Selon la méthode des échelles multiples, on admet que les fonctions  $q$  et  $\eta$  sont développables en séries entières en  $\varepsilon$  :

$$q = q^1(\alpha, X, \tau) + \varepsilon q^2(\alpha, X, \tau) + \dots$$

$$\eta = \eta^1(\alpha, X, \tau) + \varepsilon \eta^2(\alpha, X, \tau) + \dots$$

En les reportant dans le système  $(E_2)$  on obtient au premier et second ordre les équations suivantes :

Premier ordre :

$$\begin{cases} \eta_z^1 + \eta_\alpha^1 - \frac{1}{3} \eta_{\alpha\alpha z}^1 + R \eta^1 = 0 \\ \eta_z^1 + \eta_\alpha^1 = 0 \end{cases}$$

Après élimination de  $\eta^1$  on obtient l'équation linéaire :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \tau^2} + R \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \eta^1 = 0 \quad (1)$$

Le phénomène de réflexion étant négligé,  $\eta^1$  est représenté par ses deux premiers harmoniques.

$$\eta^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_j(x) \cdot \exp[-i(\omega_j z - k_j \alpha)] + C.C.$$

où  $\omega_2 = 2\omega_1$ .

L'équation de continuité donne alors :

$$q^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j}{k_j} a_j(x) \cdot \exp[-i(\omega_j z - k_j \alpha)] + C.C.$$

qui, après introduction dans l'équation (1) donne la relation de dispersion :

$$k_j^2 = k_{j0}^2 + \frac{iR\omega_j}{1 - \omega_j^2/3}$$

que l'on peut encore écrire :

$$k_j = k_{j0} \sqrt[4]{1 + \frac{R^2}{\omega_j^2} \cdot \exp[i\varphi]} = k_j^R + i k_j^I$$

avec  $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\omega_j}\right)$

et où  $k_{j0}$  est obtenu en absence de frottement. La solution obtenue s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ q^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[-k_j^I \alpha] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\omega_j}{k_j} \end{bmatrix} \exp[-i(\omega_j z - k_j^R \alpha)] a_j(x) + C.C.$$

On met ainsi en évidence :

a. un amortissement de l'amplitude des composantes harmoniques de la houle, plus fort en général pour la seconde harmonique.

b. un changement de vitesse de phase :

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega_j^2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_j}{2}}}$$

c. un déphasage entre la dénivellation de la surface libre et la vitesse moyenne  $q$ .

Les effets b et c sont en pratique négligeables.

Deuxième ordre :

$$\begin{cases} \eta^2 + \eta_\alpha^2 - \frac{1}{3} \eta_{\alpha\alpha}^2 + R \eta^2 = -\eta_\alpha' - \eta^1 \eta_\alpha' + \frac{2}{3} \eta_{\alpha\alpha}^1 + \frac{2}{3} f \eta_\alpha' + f \eta_\alpha' + \frac{1}{3} f \eta_{\alpha\alpha}^1 + f R \eta^1 \\ \eta^2 + \eta_\alpha^2 = -\eta_\alpha' - \eta_\alpha^1 \eta_\alpha' - \eta^1 \eta_\alpha' - f \eta_\alpha' - f \eta_\alpha^1 \end{cases}$$

Après élimination de  $\eta^2$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial t^2} + R \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta^2 = G(\alpha, X, t) \quad (2)$$

$$\text{où } G = 2 \left( \eta^1 + \frac{2}{3} \eta_{\alpha\alpha}^1 \right)_{\alpha X} + f \left( \eta^1 + \frac{2}{3} \eta_{\alpha\alpha}^1 \right)_{\alpha\alpha} - (\eta^1 \eta_\alpha^1)_\alpha + (\eta^1 \eta_\alpha^1)_{\alpha\alpha} + f R \eta^1$$

Le second membre  $G$  comprend des termes linéaires liés à la houle, des termes linéaires d'interaction houle-fond et des interactions non-linéaires affectant la houle. On peut les décomposer en série de Fourier sous la forme :

$$G(\alpha, X, t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i \omega_j t} \cdot G_j(\alpha, X) + c. c.$$

L'équation (2) n'admet de solution que si les conditions suivantes d'orthogonalité sont vérifiées :

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{k_j} \exp[\pm i k_j \alpha] \cdot G_j(\alpha, X) d\alpha = 0 \quad j=1, 2$$

Ces conditions de solvabilité nous donnent un système d'équations différentielles pour l'évolution spatiale des amplitudes complexes  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\begin{cases} a_{1X} - i f H_1 a_1 - i S_1 \exp\left[\frac{\Delta k^I X}{\beta}\right] \exp\left[-\frac{i \Delta k^R X}{\beta}\right] a_1^* a_2 = 0 \\ a_{2X} - i f H_2 a_2 - i S_2 \exp\left[\frac{\Delta k^I X}{\beta}\right] \exp\left[-\frac{i \Delta k^R X}{\beta}\right] a_1^2 = 0 \end{cases}$$

où  $a^*$  signifie la valeur conjuguée de  $a$ .  $H_1, H_2, S_1, S_2$  sont des fonctions connues de  $X$  et  $\Delta k = \Delta k^R + i \Delta$

On en déduit 4 équations différentielles scalaires qui sont résolues par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à partir des valeurs connues à l'origine du domaine du calcul.

## II. EXPERIENCES

Une étude expérimentale de l'évolution de la houle en cours de propagation a été faite dans un canal vitré de section rectangulaire de 36 m de long et 0,55 m de large.

Les houles sont générées sinusoidalement par un batteur piston et la dénivellation a été enregistrée tous les mètres sur une distance de 25 mètres pour suivre l'évolution spatiale. On effectue cinq essais en se plaçant dans des cas où l'approximation non linéaire-dispersive est valide. La figure (1) représente les enregistrements dans le cas où  $\mathcal{E} = 0.1051$  et  $\mathcal{T} = 0.0842$ . On peut observer l'évolution lente de l'onde au cours de sa propagation. Le profil sinusoidal de départ ( $X = 1$  m) se retrouve à l'abscisse  $X = 14$  m, tandis qu'aux points d'abscisse  $X = 7$  m et 21 m, on trouve un profil fortement asymétrique. Ceci confirme les résultats de GODA (1967), GALVIN (1968), MEI et UNLUATA (1972) et BOCZAR-KARAKIEWICZ (1972). Une analyse harmonique des différents enregistrements est effectuée. La figure (2) montre l'évolution de l'amplitude des quatre premiers harmoniques. La répétition des échanges d'énergie entre le fondamental et les harmoniques supérieurs, apparaît nettement. La longueur de répétition est voisine de quatorze mètres, soit près de trois fois la longueur d'onde. Une grande part des transferts d'énergie concerne le fondamental et l'harmonique deux (de l'ordre de 25 %). Des résultats semblables sont obtenus pour les autres expériences avec une moindre dispersion ou variabilité dans l'évolution du fondamental par rapport aux résultats des auteurs cités précédemment. On constate également une atténuation des amplitudes des harmoniques au cours de la propagation.

## III. COMPARAISON ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE

La figure (3) présente l'évolution spatiale des composantes harmoniques relative à l'essai présenté à la figure(1). La confrontation des résultats avec l'expérience est satisfaisante. On voit bien apparaître la modulation du second harmonique avec cependant une légère surestimation de son amplitude. Ce caractère est la conséquence de la troncature de la série de Fourier aux deux premières composantes. On constate aussi que le modèle sous-estime la distance de répétition. Cette tendance s'accroît quand l'amplitude relative des ondes augmente.

L'amortissement constaté sur les essais (figure 1) a été introduit dans le modèle à l'aide du coefficient de frottement  $f_w$ . Une étude de sensibilité de ce paramètre nous a conduit à choisir la valeur  $f_w = 0.1$ . Sur fond lisse, en régime laminaire, l'expression analytique de  $f_w$  associée à une houle sinusoïdale est donnée par :

$$f_w = \frac{2}{R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{U}{\sqrt{wv}}$$

Dans le cas de l'expérience précédente, on obtient la valeur  $f_w = 0.015$ . On peut supposer que, dans ce cas, l'écoulement est légèrement turbulent où il y a de la dissipation autre que celle au voisinage du fond.

#### IV. MODELE NUMERIQUE

Les équations de Boussinesq modifiées par le frottement ont été résolues numériquement selon un schéma proposé par PEREGRINE (1966). Il s'agit là d'un modèle aux différences finies. Dans une première étape, l'équation de continuité est discrétisée selon un schéma explicite. Puis on discrétise l'équation dynamique selon un schéma implicite à deux niveaux, décentré en temps et centré en espace. On est amené alors à résoudre un système tridiagonal. Enfin on calcule la valeur définitive de la dénivellation en discrétisant l'équation de continuité par un schéma explicite. De façon générale, on a pris 120 points de calcul pas longueur d'onde et 100 pas de calcul par période. Ainsi la dénivellation de la surface libre est connue aux différentes abscisses et peut être soumise à l'analyse de Fourier. Les résultats sont présentés à la figure (4) pour les mêmes conditions que la figure 1. On peut constater que cette modélisation numérique reproduit :

- l'évolution spatiale récurrente des profils d'onde
- la répartition d'énergie entre le fondamental et les harmoniques supérieurs
- la subvariabilité spatiale de l'amplitude de l'harmonique trois.

Cependant, on constate que la modélisation des grandes échelles est imprécise. Il y a une légère surestimation des transferts et une sous-estimation systématique, de l'ordre de 10 à 15 % de la distance de répétition. Cette divergence peut être due a priori à l'inexactitude de la théorie de Boussinesq.

## V. APPLICATION

Suivant une démarche inaugurée par BOCZAR-KARAKIEWICZ et al (1981, 1987), les phénomènes d'évolution répétitive des ondes de surface en eau peu profonde sont intégrés dans une modélisation hydro-sédimentaire des environnements côtiers dominés par la houle. Couplées à un modèle d'érosion et de couche limite de fond chargée de sédiments en suspension, on montre que ces transformations périodiques se répercutent au niveau des transits sédimentaires, puis de la réponse du fond avec le développement d'un système de barres dont la longueur d'onde est la distance de répétition des transformations non-linéaires (figure 5 a-b) (CHAPALAIN, 1988).

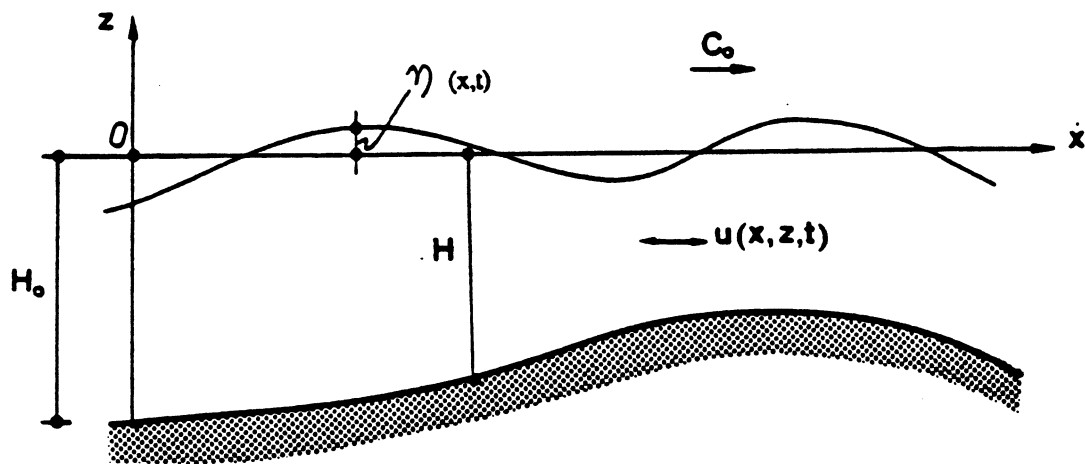
## BIBLIOGRAPHIE

- BOCZAR-KARAKIEWICZ, B. (1972). Transformation of wave profile in shallow water - a Fourier analysis.  
Arch. Hydrotechniki 19 : 197-210.
- BOCZAR-KARAKIEWICZ, B. et J.L. BONA (1981). Über die riffbildung an sandigen küsten durch progressive wellen. Mitteilungen des leichtwei.  
Instituts für Wasserbau der Technischen Universität Braunschweig 70 : 380-420.
- BOCZAR-KARAKIEWICZ, B., J.L. BONA et D.L. COHEN (1987). Interaction of shallow-water waves and bottom topography.  
In Dynamical problems in continuum physics, Springer-Verlag, N.Y., Inc.
- BOUSSINESQ, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal.  
J. Math. Pure et Appl. 2, 17 : 55-108.
- CHAPALAIN, G. (1988). Etude hydrodynamique et sédimentaire des environnements littoraux dominés par la houle.  
Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- GALVIN, C.J. (1968). Finite amplitude shallow water waves of periodically recurring form.  
U.S. Army Coastal Engineering Research Center or Trans. Am. Geophy. Union 49, 206 (Abstract only).
- GODA, Y. (1967). Travelling secondary wave crests in wave channels.  
Port and Harbour Research Institute, Ministry of Transport, Japan, 13, 32.
- MEI, C.C. and U. UNLUATA (1972). Harmonic generation of shallow waves.  
In : Waves on beaches and resulting sediment transport, Meyer, R.E., (ed.), Academic Press, New York : 181-202.



PEREGRINE, D.H. (1967). Long waves on a beach.  
*J. Fluid Mech.*, 27 : 815-825.

SEABRA-SANTOS, F.J., D.P. RENOUARD et A. TEMPERVILLE (1988).  
Etude théorique et expérimentale des domaines de validité  
des théories d'évolution des ondes en eau peu profonde.  
*Annales Geophysicae*, 6 (6) : 671-680.



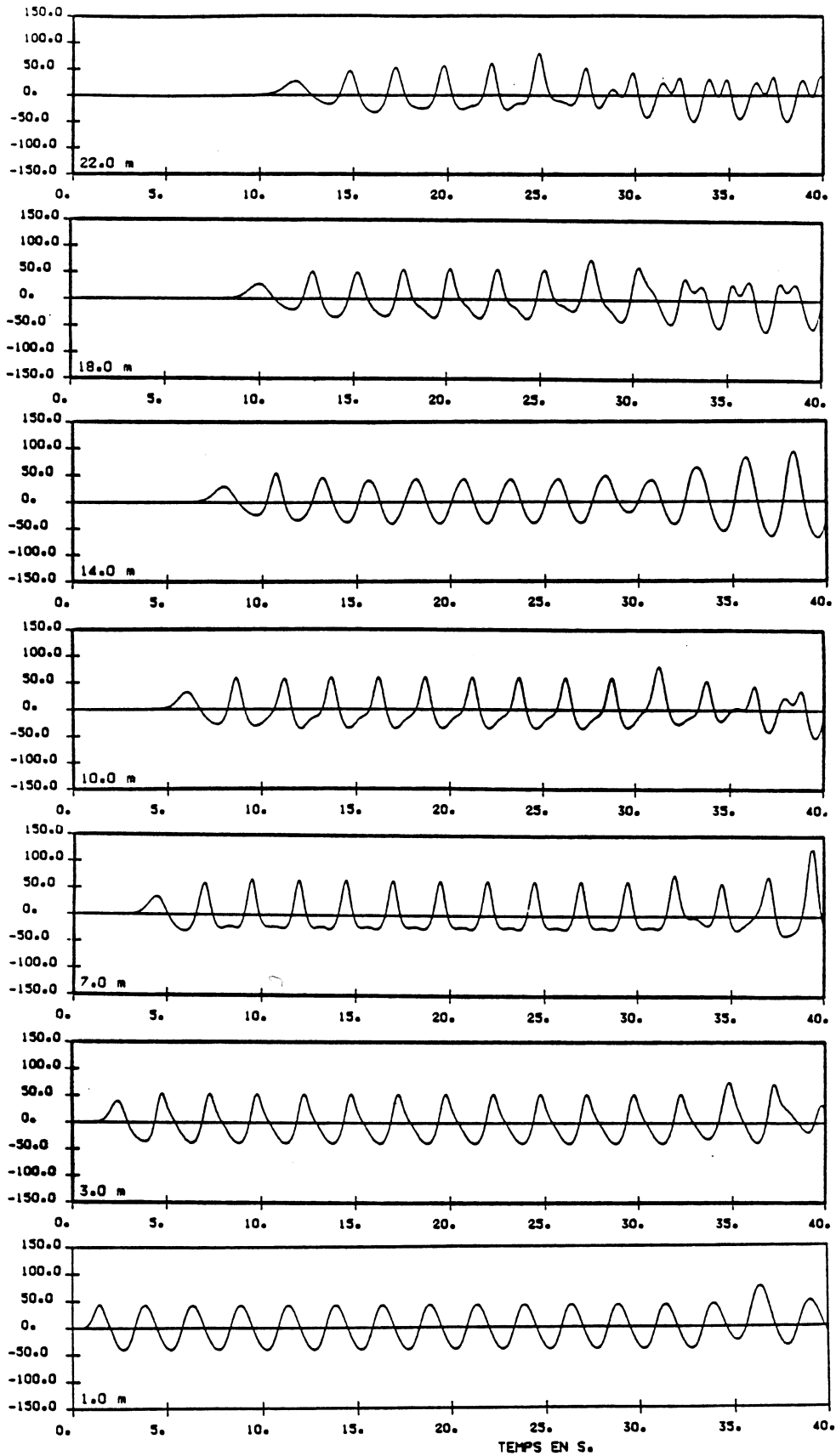


Figure 1 - Enregistrements de la dénivellation de la surface libre le long du canal (exprimée en mm).

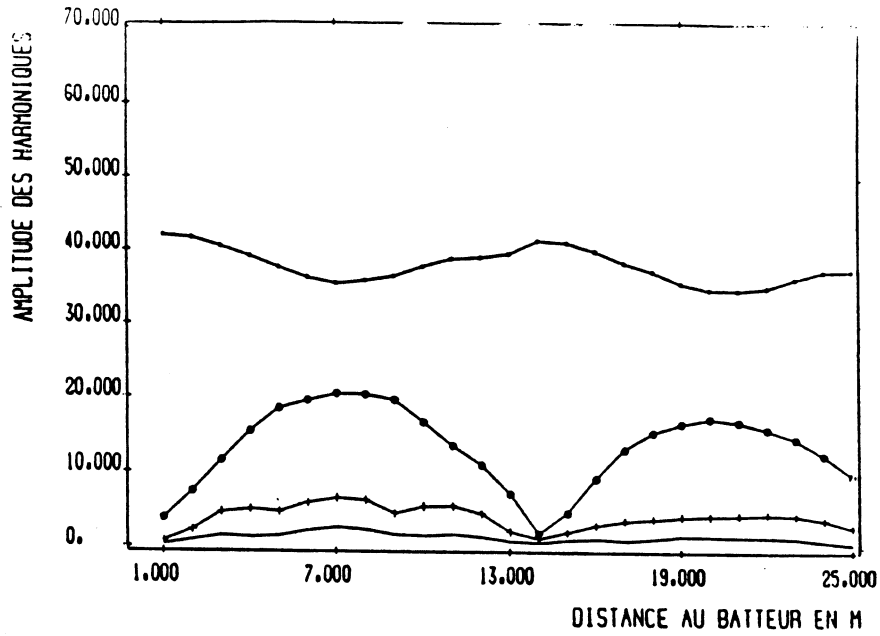


Figure 2 - Evolution spatiale mesurée des amplitudes des quatre premières composantes harmoniques (exprimées en mm).

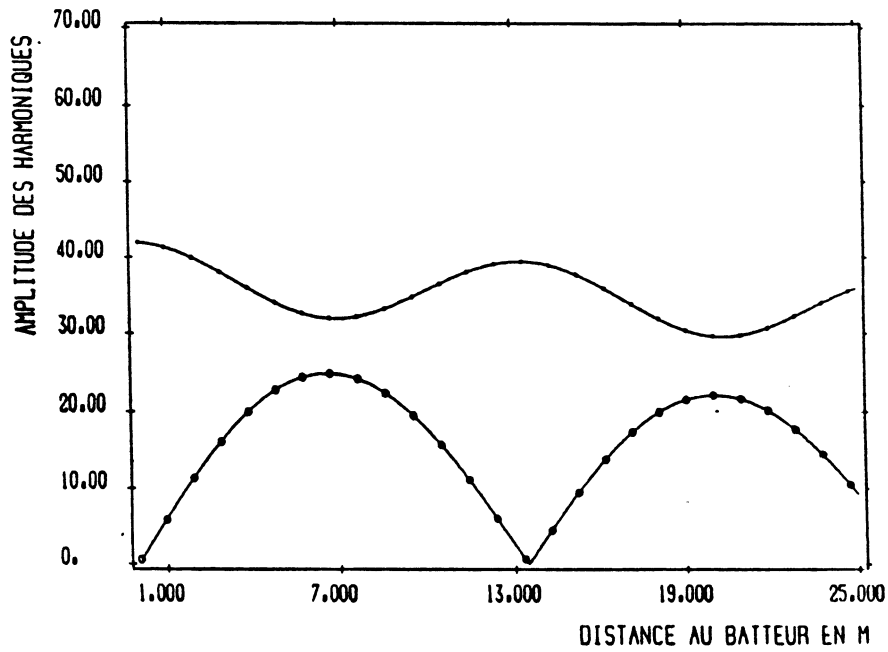


Figure 3 - Evolution spatiale calculée selon la théorie de MEI et UNLUATA (1972) des amplitudes deux deux premières composantes harmoniques.

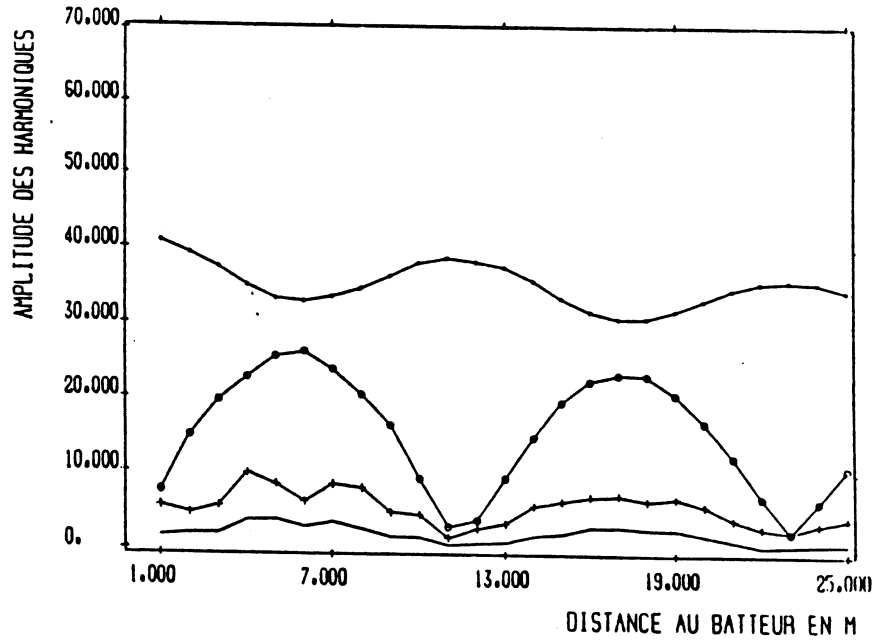
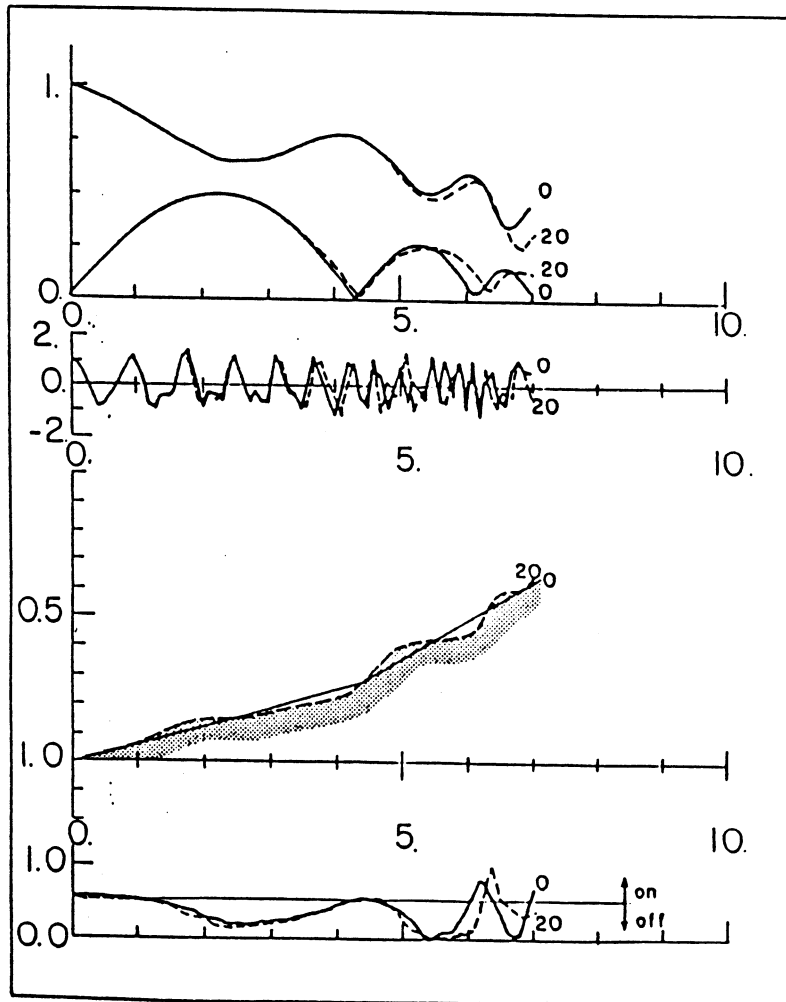
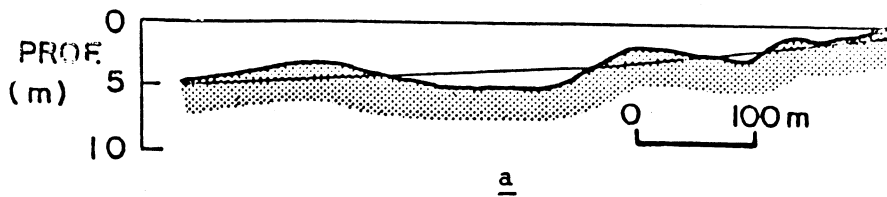


Figure 4 - Evolution spatiale calculée numériquement des amplitudes des quatre premières composantes harmoniques.



b

Figure 5 - a. Système de barres observé dans le Golfe du Saint-Laurent (Stanhope Lane Beach, PEI).

b. Résultat de la modélisation hydro-sédimentaire basée sur le modèle hydrodynamique quasi-résonant de MEI et UNLUATA (1972) et LAU et BARCILON (1972).

1. Evolution des amplitudes des composantes.
2. Dénivellation de la surface libre figée.
3. Bathymétrie (— initiale, ..... finale).
4. Structure spatiale des transits sédimentaires.