

2èmes JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

13 au 15 Février 1989 - Nantes

---

**Méthode de résolution par caractéristiques et décomposition de flux des équations de Saint-Venant unidimensionnelles.**

Jean Goussebaile                      François Lepeintre  
Laboratoire National d'Hydraulique  
6, quai Watier  
78401 Chatou  
FRANCE  
Tél : (1) 30 71 72 44

Cet article présente un algorithme de résolution des équations filaires et son application au cas d'un canal rectangulaire.

L'accent a en particulier été porté sur le traitement des ressauts en incluant dans la méthode une formulation conservative. La résolution fonctionne sur un schéma de type prédiction correction. La prédiction résout une formulation non conservative par une méthode de caractéristiques faibles et la correction en améliore les résultats en reprenant une formulation conservative traitée à l'aide d'une technique de décomposition de flux.

Les résultats présentés balayent une large gamme d'écoulements et sont tout à fait satisfaisants

This work is devoted to the solution of the one dimensional shallow water equations in the case of a rectangular channel.

The method presented is in particular able to treat hydraulic jumps by solving the conservative form of the equations. We use a prediction-correction scheme. The predictive step solves the equations written in the non conservative form using a weak characteristics method. The corrective step improves the results of the prediction by treating the conservative form of the equations using a flux splitting technique.

The method has been tested on a wide range of flows. The results are quite satisfactory.

## Introduction

Cet article présente une méthode de résolution des équations de Saint-Venant unidimensionnelles que nous avons voulue satisfaisante pour la large classe d'écoulements allant des écoulements à inertie prépondérante aux écoulements à frottement prépondérant. On a donc pris garde à tester notre approche sur une gamme de cas très différents et permettant des comparaisons analytiques; ces cas comprennent par exemple le problème de la rupture de barrage sur fond humide où seuls les termes d'inertie entrent en jeu et le calcul de lignes d'eau stationnaires sur des singularités où le traitement numérique de la pente (et du frottement s'il y a lieu) est fondamental.

Pour construire un outil unique qui soit satisfaisant sur une large gamme de cas, il nous a paru indispensable de tirer le meilleur parti des propriétés des équations à traiter quitte à obérer sérieusement toute généralisation de la méthode soit à des problèmes bidimensionnels soit à des  $p$  systèmes plus complexes de  $p$  équations filaires à  $p$  inconnues. En effet le système hyperbolique qu'on a à traiter ne comporte que deux équations de conservation à deux inconnues, de ce fait ce système non linéaire qui couple les deux variables  $Q$  le débit, et  $S$  la surface mouillée, est diagonalisable en un système de deux équations de convection scalaires des invariants de Riemann, cette propriété repose à la base sur l'existence dans le cas  $p=2$  d'une bijection entre l'espace physique  $(Q,S)$  et l'espace géométrique  $(x,t)$ .

Néanmoins, pour résoudre des problèmes d'écoulements présentant un ressaut, il faut revenir à la forme conservative des équations, ce que ne permet pas le seul emploi des invariants de Riemann.

Nous nous sommes donc orientés vers un algorithme à deux étapes, la première étape effectuant une prédiction par transport des invariants de Riemann le long des caractéristiques, la seconde étape corrigeant ces valeurs en reprenant les équations conservatives résolues par une méthode de décomposition de flux.

Ce travail est fait dans le but de réaliser un code de résolution d'écoulements en rivière. Pour tester la méthode, nous nous sommes attachés dans un premier temps au cas d'un canal rectangulaire. C'est l'application de la méthode à ce cas qui est décrite ci dessous.

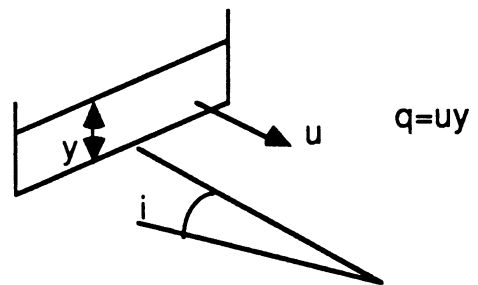
Nous présentons tout d'abord l'algorithme numérique, puis nous exposons les résultats obtenus sur les différents cas-test effectués.

### I) Méthode numérique

#### a) Les équations de Saint-Venant unidimensionnelles

dans le cas d'un canal rectangulaire, les équations de Saint-Venant s'écrivent:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{q^2}{y} + \frac{gy^2}{2} \right)}{\partial x} = gy(i-J) \end{cases}$$



où  $y$  : tirant d'eau  
 $u$  : vitesse  
 $q$  : débit  
 $i$  : pente du fond  
 $J$  : frottement  
 $g$  : gravité

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = B$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} q \\ q^2/y + gy^2/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ gy(i-J) \end{pmatrix}$$

En l'absence de choc, le système (I) peut s'écrire sous forme non conservative :

$$(II) \frac{\partial W^*}{\partial t} + A^* \frac{\partial W^*}{\partial x} = B^*$$

où

$$W^* = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} u & y \\ g & u \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ g(i-J) \end{pmatrix}$$

La matrice  $A^*$  a deux valeurs propres réelles

$$\begin{cases} \lambda^+ = u + \sqrt{gy} \\ \lambda^- = u - \sqrt{gy} \end{cases}$$

En utilisant les propriétés des systèmes hyperboliques [1], (II) peut se réécrire en faisant intervenir les invariants de Riemann associés aux valeurs propres.

Traisons le cas de  $\lambda^+$  par exemple :

Un invariant de Riemann associé à  $\lambda^+$  est une fonction  $f(y,u)$  telle que :

$$d^+ \cdot \nabla f = 0$$

où  $d^+$  est un vecteur propre à droite de  $A^*$  associé à la valeur propre  $\lambda^+$ .

$$\text{Prenons } d^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \text{ alors : } \sqrt{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Choisissons  $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$ , on obtient dans ce cas :  $f = u - 2\sqrt{gy}$

Si  $g^-$  est un vecteur propre à gauche de  $A^*$  associé à  $\lambda^-$ .

$$g^- \cdot A^* d^+ = \lambda^- g^- \cdot d^+ = \lambda^+ g^- \cdot d^+ \text{ donc } g^- \cdot d^+ = 0$$

$g^-$  est donc orthogonal à  $d^+$ . Mais comme l'espace  $(u,y)$  dans lequel nous travaillons est de dimension 2, nous pouvons dire que  $\nabla f$ , qui est orthogonal à  $d^+$ , est un vecteur propre à gauche de  $A^*$  associé à  $\lambda^-$ .

En écrivant :

$$\nabla f \cdot \left( \frac{\partial W^*}{\partial t} + A^* \frac{\partial W^*}{\partial x} \right) = \nabla f \cdot B^*$$

Il vient :

$$\nabla f \cdot \frac{\partial W^*}{\partial t} + \lambda^- \nabla f \cdot \frac{\partial W^*}{\partial x} = g(i-J)$$

Soit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial f}{\partial x} = g(i-J)$$

Nous noterons  $f^- = u - 2\sqrt{gy}$  l'invariant de Riemann associé à  $\lambda^+$ .

De la même façon, l'invariant de Riemann associé à  $\lambda^-$  est  $f^+ = u + 2\sqrt{gy}$ .

(I) est donc équivalent quand les solutions sont continues à :

$$(III) \begin{cases} \frac{d^- f^-}{dt} = g(i-J) \\ \frac{d^+ f^+}{dt} = g(i-J) \end{cases}$$

avec

$$\frac{d^-}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{d^+}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial}{\partial x}$$

En omettant les signes + et -,  $d/dt$  est la dérivée le long de la courbe caractéristique C d'équation  $dx/dt = \lambda$ .

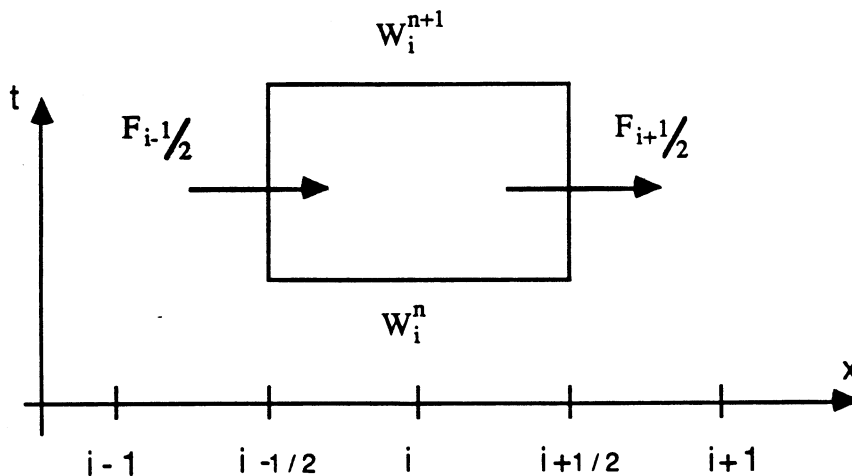
b) Algorithme de résolution.

Connaissant les valeurs de  $W$  à l'instant  $t^n$  en tout point  $i$  d'un maillage, il s'agit de déterminer les valeurs de  $W$  à  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

La méthode utilisée est une méthode capturant les chocs, qui discrétise (I) suivant :

$$(IV) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{2\Delta t}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \Delta t B_i^n$$

où  $x_i$  est l'abscisse du point de discrétisation  $i$ .



Les flux  $F$  sont évalués à l'aide des valeurs de  $W$  obtenues dans une première étape avec une méthode de caractéristiques faibles.

On peut ainsi décrire l'algorithme utilisée en deux étapes :

Première étape: étape de prédiction

Le système est pris sous forme non conservatif et est résolu par une méthode de caractéristiques faibles.

Cette étape fournit une estimation de  $W^{n+\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) au temps  $(n+\theta)\Delta t$ .

Le pas de temps peut prendre toute valeur entre 0 et  $\Delta t$ . Pour des raisons de clarté d'écriture, nous décrivons ci-dessous l'étape de prédiction avec un pas de temps pris égal à  $\Delta t$ .

Pour résoudre l'équation hyperbolique (les signes + et - ont été omis),

$$\frac{df}{dt} = g(i-J) \quad \text{le long de } C$$

nous utilisons une formulation faible développée au Laboratoire National d'Hydraulique [2].

Si  $[A, B]$  est la partie du canal considérée,  $\Omega = [A, B] \times [t^n, t^{n+1}]$  et  $\Psi$  une fonction régulière dans  $\Omega$ , on écrit:

$$\int_{\Omega} \Psi \frac{df}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi g(i-J) d\Omega$$

Par intégration par parties, il vient :

$$\int_A^B \Psi^{n+1} f^{n+1} dx = \int_A^B \Psi^n f^n dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [\Psi f \lambda]_B^A dt + \int_{\Omega} f \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda \Psi)}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \Psi g(i-J) d\Omega$$

En prenant pour  $f$  une discrétisation éléments finis classique,

$$f(x, t) = \sum_j f_j(t) \phi_j(x)$$

on définit pour chaque fonction de base  $\phi_i$  de cette discrétisation une fonction  $\Psi = \Psi_i$  telle que:

$$(V) \begin{cases} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda \Psi_i)}{\partial x} = 0 \\ \Psi_i^{n+1} = \phi_i \end{cases}$$

(V) est résolu en utilisant une méthode de caractéristiques. Numériquement, les caractéristiques sont tracées explicitement, c'est-à-dire que l'équation de  $C$  est écrite

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \quad \text{à } t=t^n$$

On obtient finalement

$$\int_A^B \sum_j f_j^{n+1} \phi_j \phi_i dx = \int_A^B \sum_j f_j^n \phi_j \Psi_i^n dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [\Psi_i f \lambda]_B^A dt + \int_{\Omega} \Psi_i g(i-J) d\Omega$$

qui est un système matriciel  $M.F^{n+1} = R$  avec  $M$  matrice de masse et  $R$  second membre.

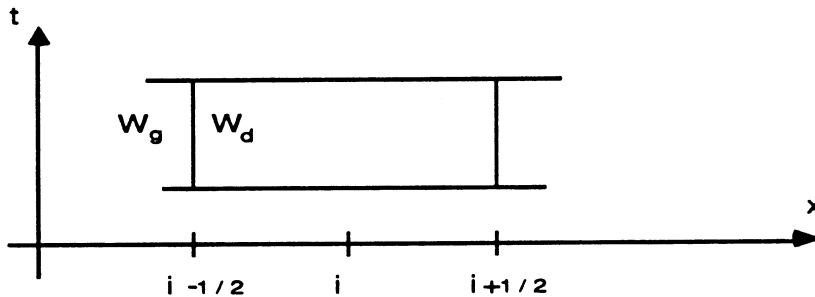
Deuxième étape: étape de correction

La solution  $W$  à l'instant  $n+1$  est obtenue à partir de la solution  $W$  à l'instant  $n$  corrigée des flux eux-mêmes calculés en prenant les valeurs issues de la première étape.

Calcul des flux

Nous avons retenu pour calculer les flux à partir des valeurs issues de la première étape une méthode de séparation de flux (flux-splitting method) [3]. Un exposé complet de cette méthode appliquée aux équations d'Euler est disponible dans [4].

Considérons une cellule centrée sur le point  $i$  dans le plan  $(x,t)$ .



Prenons l'une des parois de la cellule, par exemple celle située en  $i-1/2$ .

On peut définir pour  $W$  de part et d'autre de la paroi une valeur à gauche  $W_g$  et une valeur à droite  $W_d$ . Nous verrons plus loin ce que nous avons adopté pour  $W_g$  et  $W_d$ .

Appelons  $F_g$  et  $F_d$  les valeurs des flux à gauche et à droite de la paroi (calculés avec  $W_g$  et  $W_d$ )

La méthode consiste pour calculer le flux à la paroi  $F_p (=F_{i-1/2}$  sur le dessin) à effectuer un développement limité autour de  $F_g$  et  $F_d$  en adoptant une stratégie upwind. A gauche, seules les ondes descendant le courant et à droite, seules les ondes remontant le courant sont prises en compte.

Ce qui revient à écrire pour

$$\frac{\partial F_p}{\partial W} = A = L^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^- & 0 \\ 0 & \lambda^+ \end{pmatrix} L$$

si on descend le courant

$$\frac{\partial F_p}{\partial W} = A^+ = L^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda^-, 0) & 0 \\ 0 & \lambda^+ \end{pmatrix} L$$

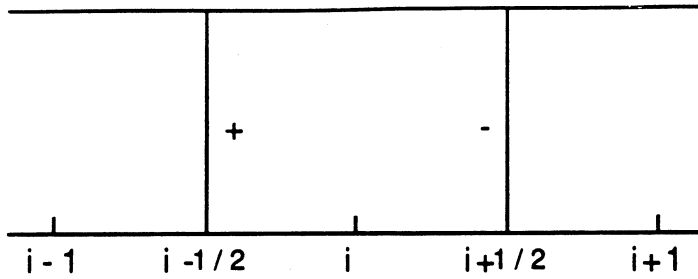
et si on remonte le courant

$$\frac{\partial F_p}{\partial W} = A^- = L^{-1} \begin{pmatrix} \min(\lambda^-, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L$$

Finalement,

$$F_p = \frac{F_g + F_d}{2} - \frac{1}{4} (A^+ - A^-) (W_d - W_g)$$

Pour calculer les valeurs  $W_g$  et  $W_d$ , nous avons repris un procédé utilisé par [5].



Si  $W^P$  est la valeur obtenue après la première étape, nous obtenons pour chaque cellule  $i$  deux valeurs aux parois par :

$$\begin{cases} W_{i-1/2}^+ = W_i^P + \frac{x_{i-1} - x_i}{2} \cdot \frac{W_{i+1}^P - W_{i-1}^P}{x_{i+1} - x_{i-1}} \\ W_{i+1/2}^- = W_i^P + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot \frac{W_{i+1}^P - W_{i-1}^P}{x_{i+1} - x_{i-1}} \end{cases}$$

Pour éviter des oscillations, ces valeurs sont limitées par :

$$W_{i-1/2}^+ = \text{Max} \left[ \text{Min} \left( W_{i-1/2}^+, \text{Max}(W_i, W_{i-1}) \right), \text{Min}(W_i, W_{i-1}) \right]$$

$$W_{i+1/2}^- = \text{Max} \left[ \text{Min} \left( W_{i+1/2}^-, \text{Max}(W_i, W_{i+1}) \right), \text{Min}(W_i, W_{i+1}) \right]$$

Ceci impose aux valeurs interpolées aux parois puis limitées d'être comprises entre les valeurs nodales adjacentes; cette méthode n'assure cependant pas la préservation de la monotonie d'un pas de temps au suivant mais elle semble constituer un bon compromis empirique entre préservation de la monotonie (pas d'oscillation) et maintien de la précision (faible diffusion numérique).

Calcul de  $W^{n+1}$

Il suffit dès lors de revenir à la forme discrétisée de (IV)

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{2\Delta t}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \Delta t B_i^n$$

Appliqués au cas du canal rectangulaire la programmation de cet algorithme constitue l'ébauche du code **MASCARET** : Méthode Avec Splitting (de flux) et Caractéristiques pour la Résolution des Ecoulements Transcritiques [6].

## II) Résultats

L'algorithme a été testé sur trois types de cas-test, mettant chacun l'accent sur un point particulier du traitement.

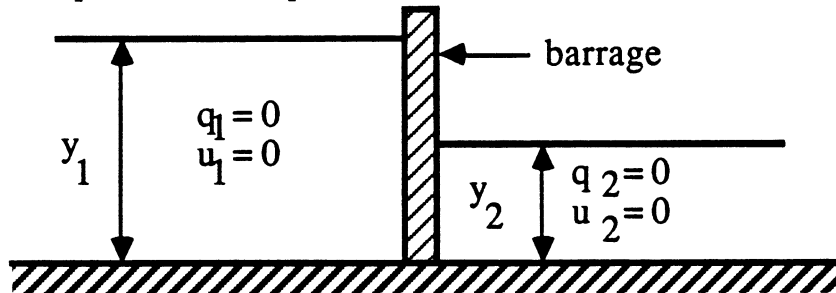
Le premier cas-test est la résolution du problème de Riemann dans un canal horizontal dénué de frottement. C'est en quelque sorte le cas d'essai de base puisqu'il teste le calcul d'un ressaut mobile par la méthode. Dans cet exemple, le terme source est nul, c'est le traitement des termes d'inertie qui est validé.

Le second cas-test retenu est l'écoulement sur un seuil avec ou sans frottement. Les principales configurations d'écoulements permanents sont étudiées. L'écoulement peut être strictement fluvial, strictement torrentiel ou transcritique avec ou sans ressaut. Le terme source est à prendre en compte. Cet exemple permet ainsi de juger de son calcul.

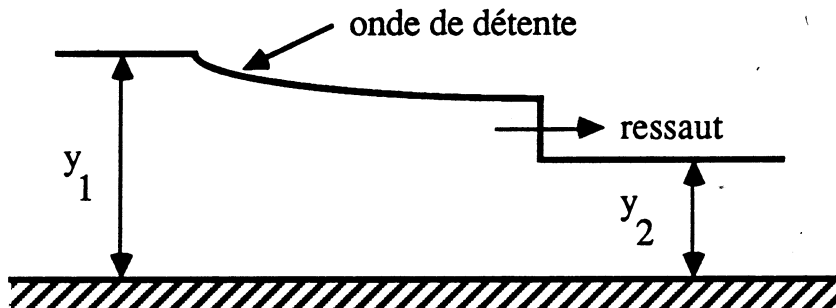
Le troisième cas-test consiste en un calcul de crue. Les équations de Saint-Venant dégénèrent en une équation parabolique sur le débit. Il est donc intéressant de tester sur un tel cas la méthode qui a été construite en utilisant les propriétés hyperboliques des équations.

#### a) Problème de Riemann, rupture de barrage sur fond mouillé.

Dans un canal rectangulaire, horizontal, dénué de frottement, un barrage sépare initialement deux plans d'eau au repos de tirants d'eau différents.



A l'instant  $t=0$ , le barrage est retiré. Il apparaît à la surface libre une onde de détente et un ressaut mobile.



Les différents essais effectués ont montré que la valeur optimale de  $\theta$  était 0.5. Avec  $\theta=1$ , la méthode est trop diffusive et avec  $\theta=0$ , la méthode génère des oscillations parasites derrière le choc.

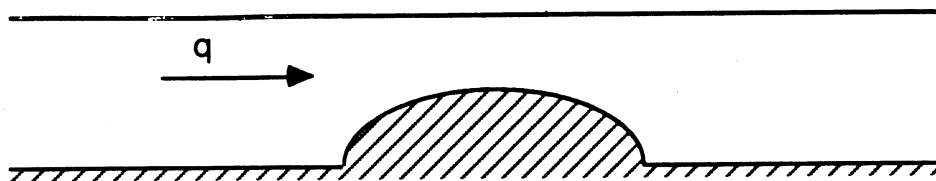
La méthode avec  $\theta=0.5$  a été appliquée à une très large gamme de problèmes de Riemann, le rapport de la cote amont à la cote aval allant de 1.01 à 300. Les figures concernant les débit, hauteur, nombre de Froude après 100 pas de temps sont présentés ici et permettent une comparaison avec la solution analytique; dans tout les cas cette comparaison est très favorable (figures 1 et 2). Le nombre de Courant, basé sur la célérité des ondes, n'a pas d'influence véritable sur la qualité des résultats lorsqu'il reste inférieur à 1; au delà le calcul devient la plupart du temps instable; les résultats présentés ici ont été obtenus avec un nombre de Courant voisin de 0.7.

#### b) Passage d'un seuil.

On considère le cas d'un écoulement d'eau dans un canal horizontal, rectiligne, dénué ou non de frottement et dont le fond présente une bosse en forme de parabole.



Ce cas présente l'intérêt d'introduire un terme source (la pente) présentant des variations importantes et de posséder une solution analytique facilement calculable, qui peut servir de base de comparaison avec les résultats de MASCARET.



La condition limite amont est en fluvial un débit imposé et en torrentiel un débit et une hauteur imposés. La condition aval est, si elle est requise, une hauteur imposée ou une condition de sortie libre.

Le calcul débute à partir d'une situation non physique correspondant à un même débit dans tout le bief et à une cote de la surface libre constante qui est prise égale à la cote qu'on impose à l'aval dans le cas fluvial et à l'amont dans le cas torrentiel. Le calcul est mené jusqu'à obtention de l'état permanent.

L'influence du relief du fond dans le calcul est caractérisée par le rapport noté seuil et défini par

$$\text{seuil} = \frac{\text{hauteur du seuil}}{\text{tirant d'eau initial dans le bief (en entrée)}}$$

Plus ce terme est grand, plus la précision du calcul du terme source prend de l'importance dans la résolution.

Les principaux cas d'écoulements sont présentés ici : écoulement fluvial sans frottement, écoulement torrentiel sans frottement (figure 3), écoulement transcritique sans frottement et sans ressaut, écoulement transcritique sans frottement avec ressaut (figure 4), écoulement avec frottement et avec ressaut (figure 5). Dans ce dernier cas, la solution analytique est obtenue non pas exactement mais par une méthode de Runge-Kutta. Ces résultats ont été obtenus avec un nombre de Courant de 0.7 (basé sur la célérité des ondes de vitesse  $u + \sqrt{gy}$ ).

Dans les cas ne présentant pas de choc, la comparaison entre les résultats de MASCARET et la solution analytique est très satisfaisante. Les petites oscillations qui apparaissent à l'amont ou à l'aval du seuil quand celui-ci devient important disparaissent dès que le maillage est pris suffisamment fin.

Dans les cas avec ressaut où le seuil est important, il faut recourir à un maillage fin pour aboutir à une ligne d'eau permanente. Il faut en effet calculer avec suffisamment de précision le terme source au voisinage du ressaut où de fortes variations apparaissent. Certes une oscillation importante est présente à l'aval du seuil, mais elle est stable et ne perturbe pas le reste du calcul qui est très correct. Le ressaut numérique, sans être exactement au bon endroit, reste très proche du ressaut analytique.

### c) Passage d'une crue.

L'algorithme de MASCARET a été développé en utilisant les propriétés hyperboliques des équations de Saint-Venant. Le phénomène de crue correspond à un cas limite des équations puisque le problème devient dans ce cas parabolique; il s'énonce sous la forme d'une équation de convection-diffusion sur le débit [7]. Il devenait alors intéressant de juger sur un tel exemple de la qualité du calcul de MASCARET dévolu a priori à la résolution de problèmes hyperboliques. Afin d'effectuer une comparaison le même calcul a été effectué avec LIDO, code qui donne de très bons résultats pour ces problèmes de crue.

La comparaison a été faite seulement sur les débits. Il était difficile de comparer les tirants d'eau du fait de leur évolution peu marquée au cours du temps. Les résultats de MASCARET concordent parfaitement avec ceux de LIDO (figure 5).

## Conclusion

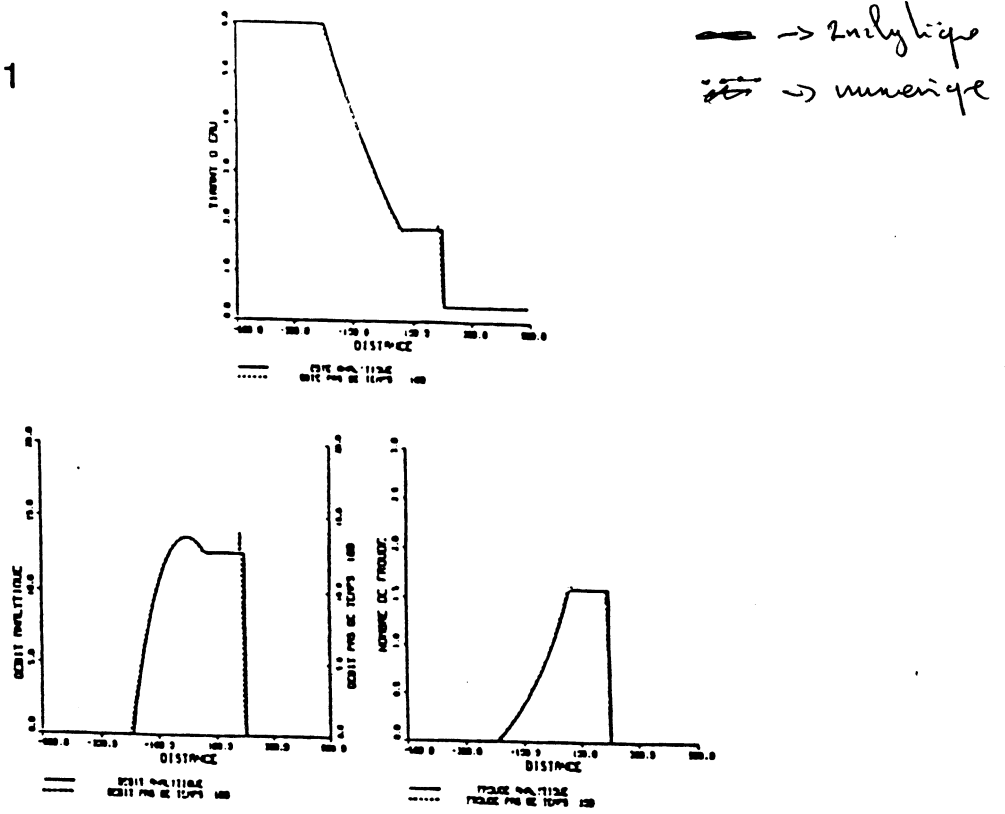
Les résultats encourageants obtenus sur le cas d'un canal rectangulaire permettent d'envisager l'extension de la méthode pour une rivière quelconque. Néanmoins, le passage à une géométrie complexe complique l'écriture des équations. Il reste cependant toujours possible de les formuler sous la forme de transport d'invariants de Riemann le long des caractéristiques [8]. La résolution par convection faible dans la première étape qui constitue l'originalité de la méthode peut ainsi être utilisée dans le cas général.

La suite qui sera donnée à ce travail sera par conséquent la réalisation d'un code de calcul de résolution des écoulements dans une rivière de géométrie quelconque.

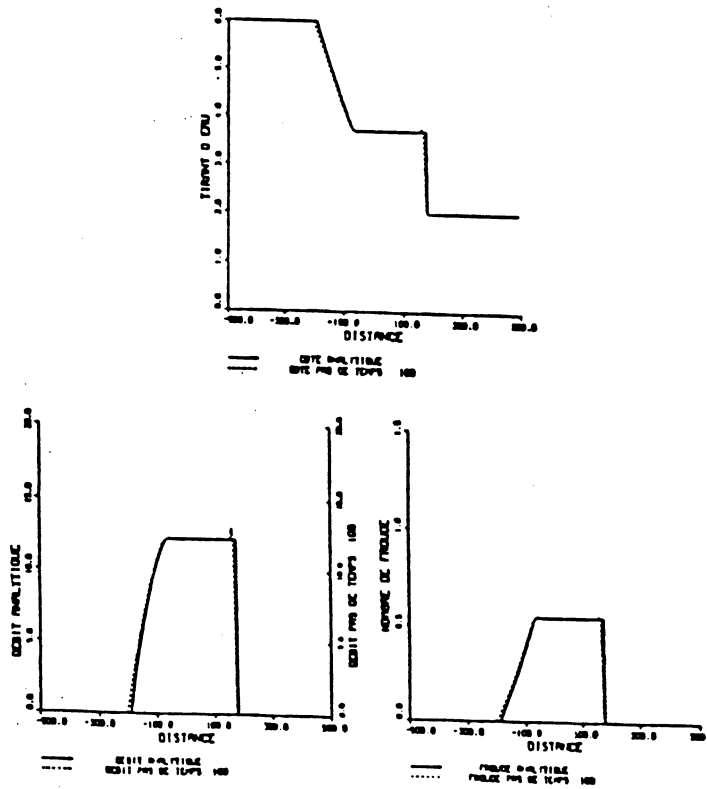
## Références

- [1] Smoller, J  
Shock waves and reaction-diffusion equations.  
Springer-Verlag.
- [2] J.P Benque, G Labadie and J Ronat  
A finite element method for Navier-Stokes equations coupled with a temperature equation.  
Proceedings of the 4th International Symposium on Finite Elements in Flow Problems.  
Tokyo. Japan (1982).
- [3] Van -Leer, B  
Computational methods for ideal compressible flow.  
Von Karman institute for fluid dynamics.  
Lecture series 1983-04.
- [4] Deconinck, H  
A survey of upwind principles for the multidimensional Euler equations.  
Von Karman institute for fluid dynamics.  
Lecture series 1987 - 04.
- [5] Fézoui, F  
Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis.  
Rapport INRIA n° 358 - janvier 1985.
- [6] J Goussebaile, F Lepeintre  
Méthode de résolution par caractéristiques et décomposition de flux des équations de Saint-Venant unidimensionnelles.  
Rapport EDF-DER HE-41/87.30
- [7] Cours ENPC  
Mécanique des fluides appliquée.  
Editions Eyrolles
- [8] M Afif  
Problèmes hyperboliques issus de la modélisation des crues de rivières  
Thèse Université de Saint-Etienne 1986

Figure 1

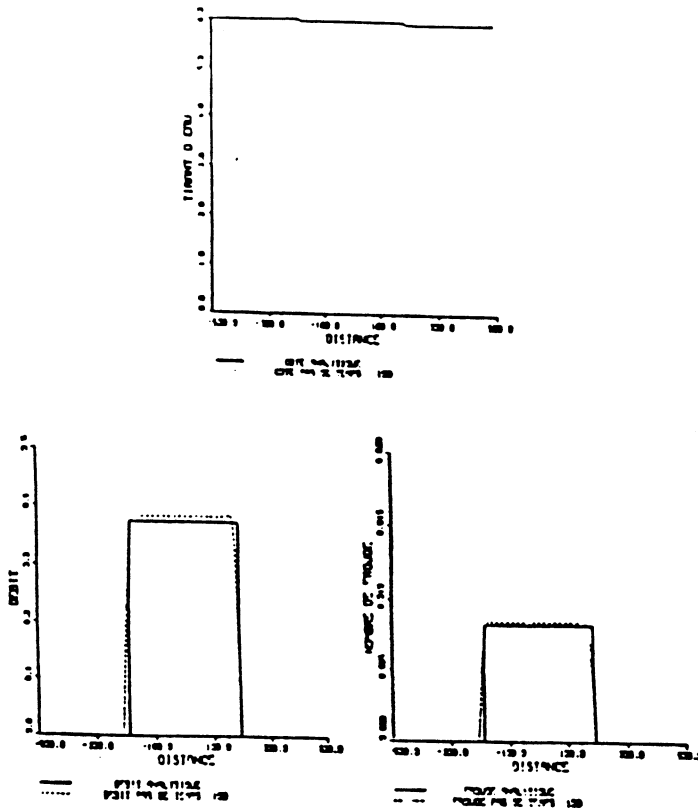


Problème de Riemann : cote amont = 6 cote aval = 0.3

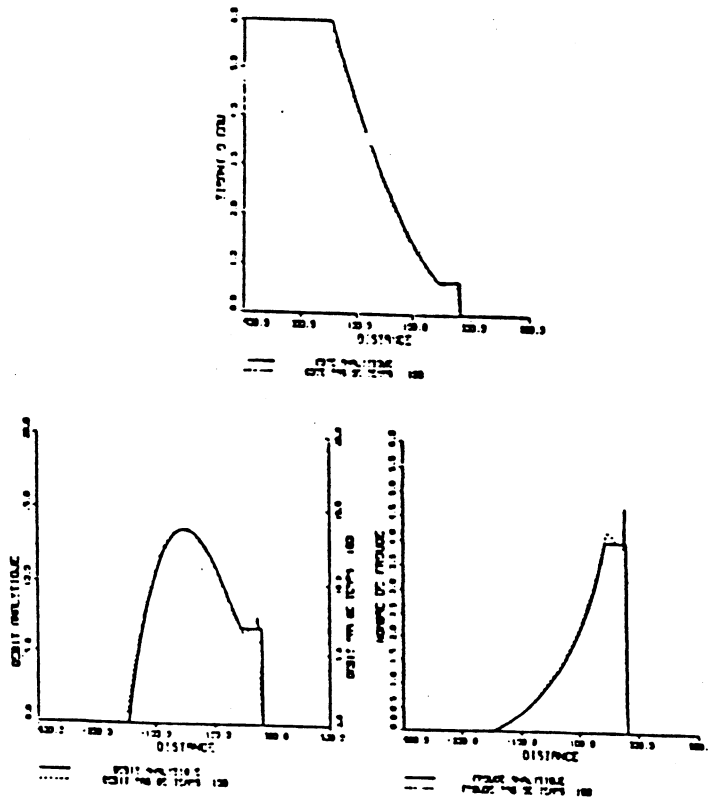


Problème de Riemann : cote amont = 6 cote aval = 2

Figure 2

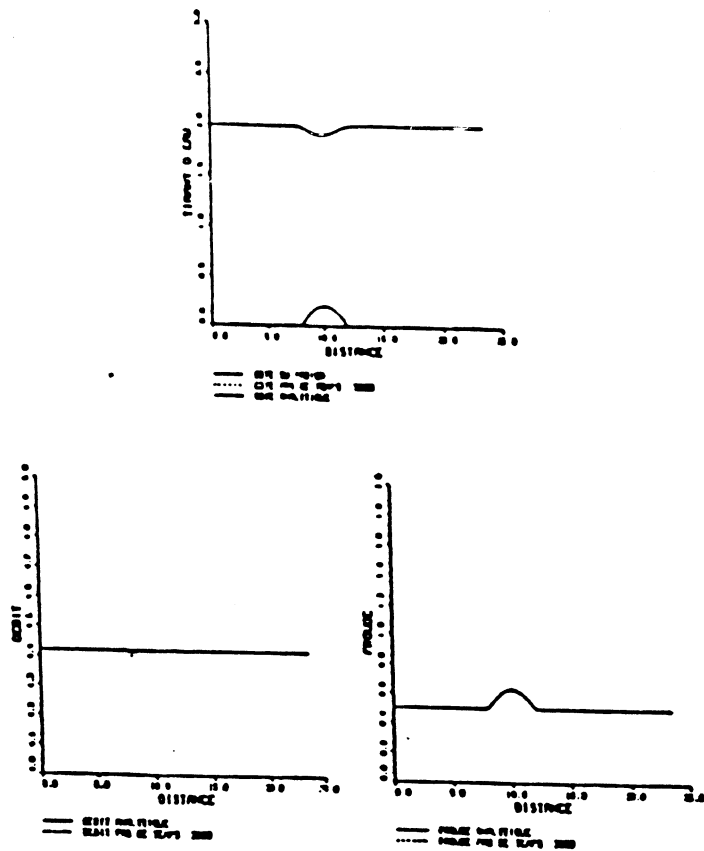


Problème de Riemann : cote amont = 6 cote aval = 5.9

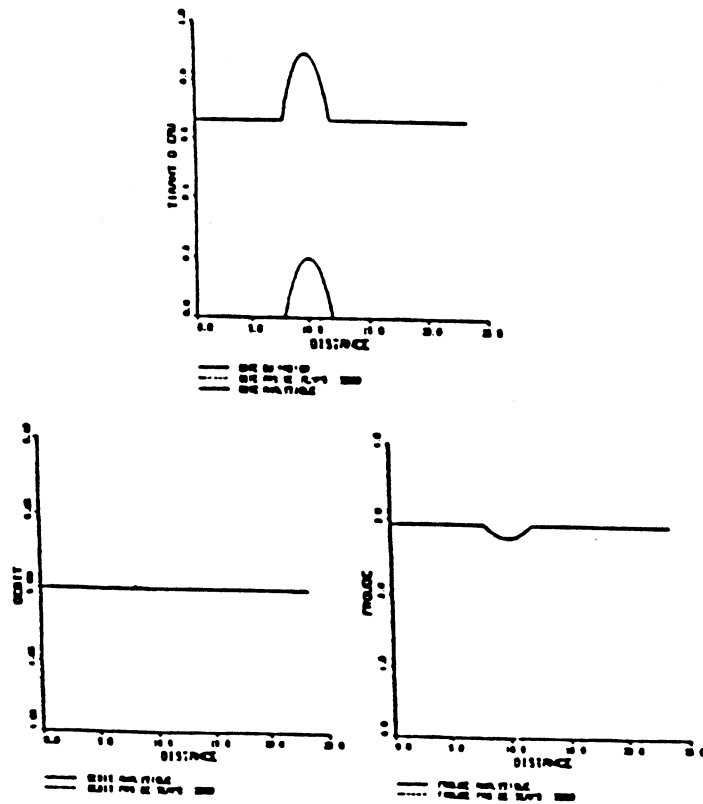


Problème de Riemann : cote amont = 6 cote aval = 0.02

Figure 3

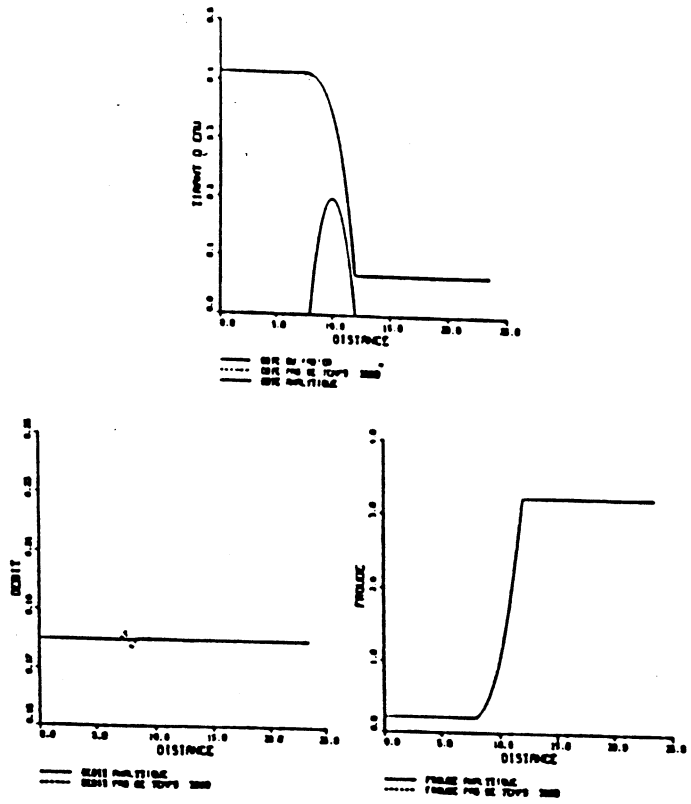


Ecoulement fluvial : seuil = 0.1

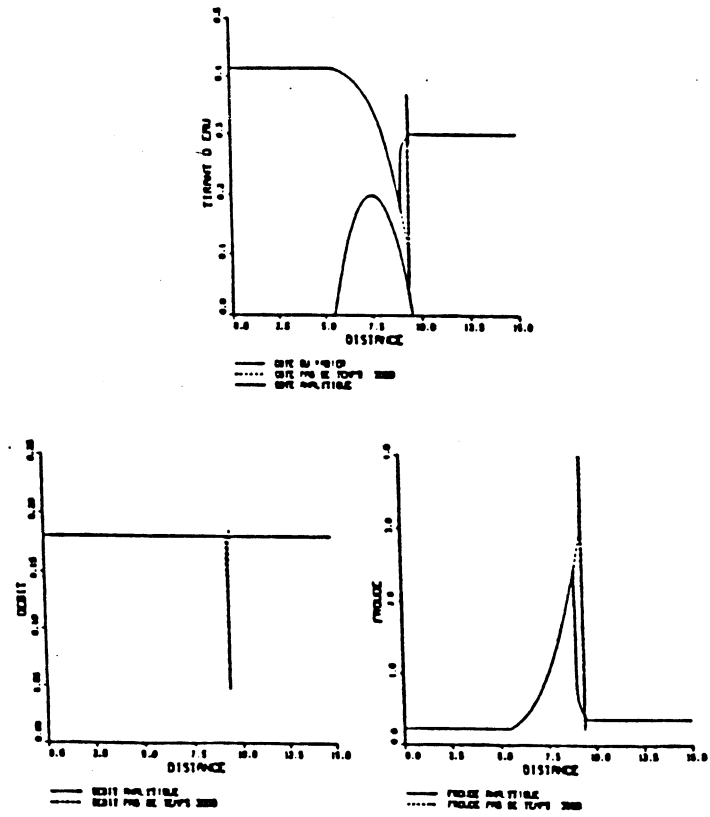


Ecoulement torrentiel : seuil = 0.3

Figure 4

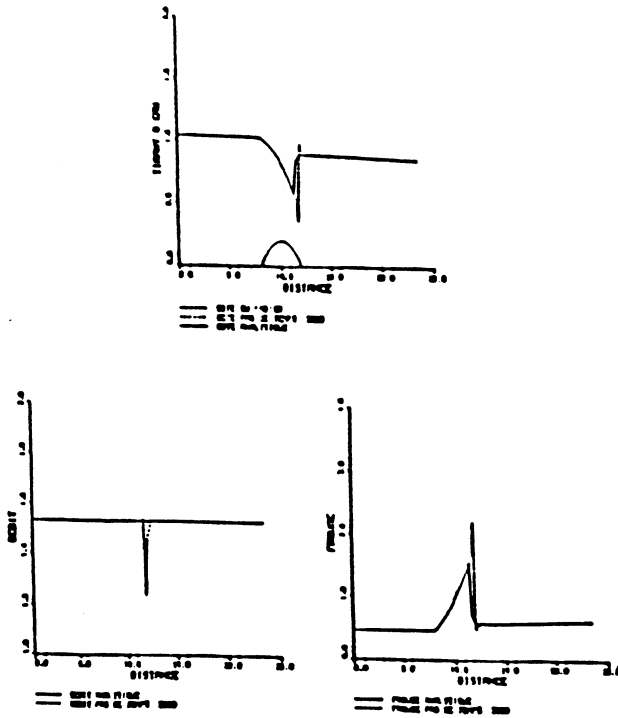


Ecoulement transcritique: seuil = 0.6

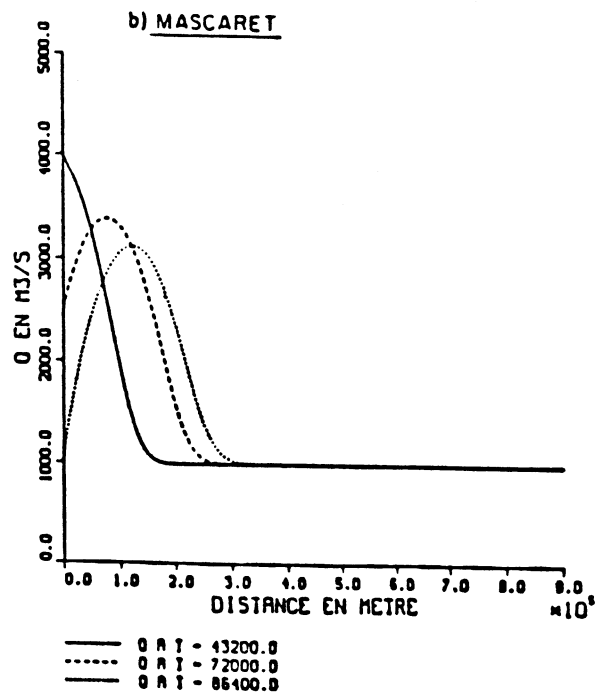
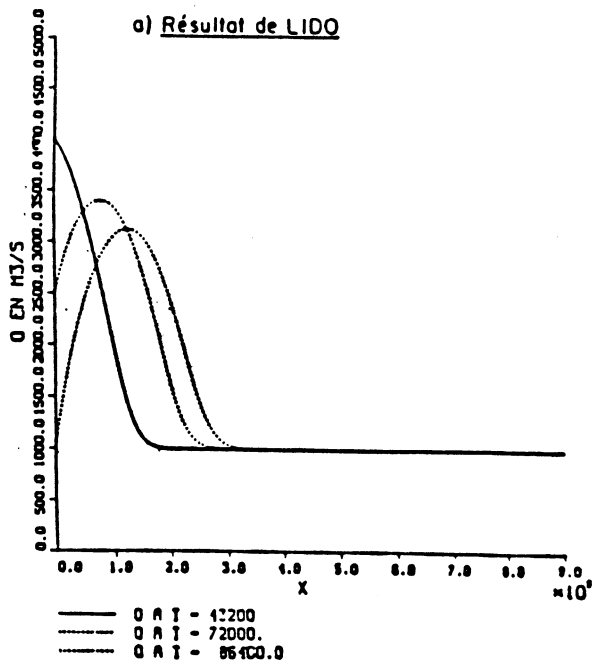


Ecoulement avec ressaut: seuil = 0.6

Figure 5



Ecoulement avec ressaut et frottement: seuil = 0.3



Passage de crue