

2èmes JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

13 au 15 Février 1989 - Nantes

ONDES LONGUES SUR DES PLAGES PEU INCLINEES

Barthelemy E. & J.P. Germain

Institut de Mécanique de Grenoble

BP 53X

38041 Grenoble CEDEX

(Tel: 76 82 51 17 / Telex: 980 668 F)

RESUME

On montre que les équations de SERRE (1953) sont issues d'un processus d'approximation rigoureux et correspondent à un développement de la théorie de l'eau peu profonde au second ordre en σ^2 (où $\sigma = h_0/\lambda$ λ est une longueur caractéristique et h_0 la profondeur au repos). A l'aide du paramètre de tendance, représentatif du comportement de l'onde à l'infini, on confirme les domaines de validité des différentes équations . Des comparaisons entre modélisations numériques construites à partir des équations de SERRE et de BOUSSINESQ, puis des comparaisons de ces modèles avec des expériences en canal permettent d'étendre au cas des plages les domaines de validité théoriques obtenues sur fond horizontal .

ABSTRACT

We show how the SERRE (1953) equations are found by a rigorous approximation scheme . They correspond to a second order σ^2 expansion in the long wave theory ($\sigma = h_0/\lambda$ where λ is a characteristic horizontal length associated with the wave) . Through the analysis of the straining parametre the theoretical validity domains are confirmed . Comparisons are undertaken between numerical modelling of the BOUSSINESQ equations and of the SERRE equations and of these models with experimental results of waves on beaches . We are able to extend the validity domains found for horizontal bottoms to the case of slowly slopping beaches .

I) INTRODUCTION:

L'objet de cette étude est de pouvoir décrire l'évolution d'une onde solitaire lors de son passage sur une plage peu inclinée . Les approches à ce problème sont de tous ordres . On présente ici une conjonction d'aspects numériques et expérimentaux .

Si l'onde solitaire est moins fréquemment observée, dans le milieu naturel que les autres types d'ondes, il n'en reste pas moins qu'elle joue un rôle théorique et expérimental important . Comme l'avaient déjà remarqué KORTEWEG & DE VRIES (1895) l'onde solitaire n'est qu'un cas limite des houles cnoidales en eau peu profonde . A ce titre elle permet de tester les modèles de propagation d'ondes longues . L'intérêt de cette étude ne réside, donc, pas tant dans la reproduction de situations naturelles mais dans la validation d'une méthode de calcul numérique ensuite applicable à des cas plus complexes .

Nous présenterons, et situerons l'une par rapport à l'autre les équations de SERRE (1953) (E.S.) et les équations de BOUSSINESQ (E.B.) . Ensuite on se fera une première idée de la précision des équations sur fond horizontal en considérant le paramètre de tendance . Puis nous mènerons une comparaison des équations entre elles et avec des expériences en canal muni d'une plage peu inclinée . Enfin l'étude se termine sur une analyse des variations d'amplitudes en fonction de la profondeur relative au dessus du plan incliné.

Nous sommes redevables à Mr Jean DUPLEX dont le mémoire de DEA , réalisé à l'Institut de Mécanique de Grenoble, est à la base d'une partie importante de ce travail .

II) LES EQUATIONS DE SERRE : UNE APPROXIMATION LOGIQUE

Dans le cadre de l'eau peu profonde plusieurs équations issues de diverses approximations peuvent décrire la propagation d'onde sur fond plat . En revanche celles qui permettent de modéliser les déformations d'ondes sur des topographies sont moins nombreuses .

Une variante des E.B. a été utilisé par PEREGRINE (1967) pour l'étude du shoaling . Les E.S. aussi obtenues indépendamment par SU & GARDNER (1969) et généralisées par SEABRA-SANTOS (1985) prennent en compte divers types de topographie .

TEMPERVILLE & SEABRA-SANTOS (1988) ont récemment donné la filiation entre ces deux systèmes d'équations .

a) La position du problème :

Il s'agit de décrire l'évolution d'ondes à la surface libre d'un liquide pesant incompressible et parfait . Les mouvements du fluide seront supposés bidimensionnels , l'axe

des x est confondu avec le fond horizontal et l'axe des y avec une verticale ascendante . On repère par $y = \eta (x,t)$ le déplacement verticale de la surface libre . On notera $h (x,t)$ la profondeur totale d'eau (figure 1) .Pour un écoulement irrotationnel les équations fondamentales de la mécanique des fluides s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0 \\ u_t + uu_x + vv_y &= -\frac{1}{\rho} p_x \\ v_t + uv_x + vv_y &= -\frac{1}{\rho} p_y - g \\ v_x - u_y &= 0 \end{aligned}$$

Et les conditions aux limites sont exprimées par :

$$\begin{aligned} v &= \eta_t + u\eta_x & \text{en } y = \eta(x,t) \\ p &= 0 & \text{en } y = \eta(x,t) \\ v &= 0 & \text{en } y = -h_0 \end{aligned}$$

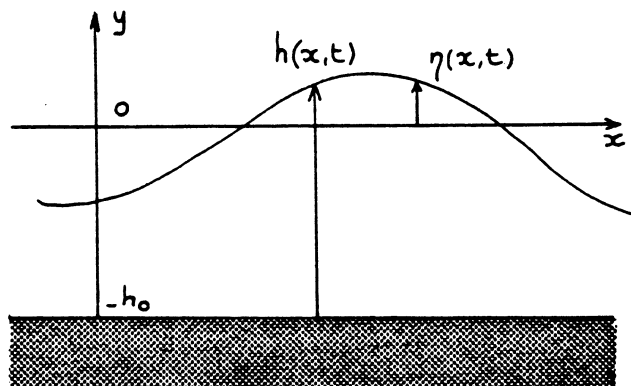


Figure 1 : Système d'axes et schéma du domaine physique

On peut alors adimensionnaliser les variables indépendantes et les fonctions inconnues, de telle sorte qu'elles soient toutes de l'ordre de l'unité . Les grandeurs caractéristiques du problème sont :

- la hauteur : h_0 la hauteur moyenne d'eau
- la vitesse : $c_0 = \sqrt{gh_0}$ la célérité critique des ondes longues
- la longueur : L une longueur d'onde par exemple
- l'amplitude : A
- le temps : t_c (non précisé a priori)

Où g est l'accélération de la gravité

Alors les fonctions et variables adimensionnelles sont

$$\alpha = x/L ; \beta = y/h_0 ; t = t/t_c$$

$$\tilde{u} = u / A \sqrt{g/h_0} ; \tilde{v} = vL / A \sqrt{gh_0}$$

$$\tilde{p} = p / (\rho gh_0)$$

Nous posons les paramètres adimensionnels suivants :

$$\varepsilon = A/h_0 ; \sigma = h_0/L ; \delta = L/t_c c_0$$

En éliminant les \sim par commodité d'écriture les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent :

- la continuité

$$u_\alpha + v_\beta = 0$$

- la condition d'irrotationnalité

$$u_\beta = \sigma v_\alpha$$

- la condition dynamique dans la masse

$$\varepsilon \delta u_\tau + \varepsilon u u_\alpha + \varepsilon v v_\beta = - p_\alpha$$

$$\varepsilon \delta \sigma v_\tau + \varepsilon \sigma u v_\alpha + \varepsilon \sigma v v_\beta = - p_\beta - 1$$

- les conditions aux limites

$$v = \delta \eta_\tau + \varepsilon u \eta_\alpha \quad \text{en } \beta = \varepsilon \eta$$

$$p = 0 \quad \text{en } \beta = \varepsilon \eta$$

$$v = 0 \quad \text{en } \beta = -1$$

b) Les équations de approchées :

Nous voulons trouver un jeu d'équations qui régissent l'évolution de $\eta(x,t)$ et de la vitesse moyenne, la moyenne de $f(\alpha,\beta,\tau)$ est défini par :

$$\bar{f} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \eta)} \int_{-1}^{\varepsilon \eta} f d\beta$$

Compte tenu des conditions aux limites la continuité peut s'écrire sous la forme :

$$\delta \eta_\tau + [h\bar{u}]_\alpha = 0 \quad \text{où } h = (1 + \varepsilon \eta)$$

En intégrant sur une verticale la première équation de la condition dans la masse on obtient :

$$\varepsilon \delta [\overline{hu}]_{\tau} + \left[\varepsilon^2 \overline{hu^2} + h\overline{p} \right]_{\alpha} = 0$$

Pour calculer la pression moyenne intégrons de β à $\varepsilon\eta$ la seconde équation de la condition dans la masse, il vient :

$$p(\alpha, \beta, \tau) = \int_{\beta}^{\varepsilon\eta} (K+1) d\beta'$$

où $K(\alpha, \beta, \tau)$ s'écrit,

$$K(\alpha, \beta, \tau) = \varepsilon \delta \sigma^2 v_{\tau} + \varepsilon \sigma^2 uv_{\alpha} + \varepsilon \sigma^2 vv_{\beta}$$

En intégrant l'expression de p sur toute la verticale de la couche d'eau, on calcule la pression moyenne :

$$h\overline{p} = \frac{h^2}{2} + \int_{-1}^{\varepsilon\eta} \beta K d\beta'$$

Finalement on obtient le système d'équations suivant :

$$\varepsilon \overline{u}_{\tau} + \varepsilon \overline{uu}_{\alpha} + \eta_{\alpha} - \frac{1}{h} \left[\sigma^2 \int_{-1}^{\varepsilon\eta} \beta K d\beta' + \varepsilon h (\overline{u^2} - \overline{u}^2) \right]_{\alpha} = 0$$

$$\eta_{\tau} + [\overline{hu}]_{\alpha} = 0 \quad \text{où } h = (1 + \varepsilon\eta)$$

Nous avons jusqu'ici fait aucune hypothèse sur les ordres de grandeurs des petits paramètres .
Nous supposons pour continuer les calculs que $\sigma^2 \ll 1$. Nous cherchons des solutions sous forme de séries entières par rapport à σ :

$$\overline{u} = u_0 + \sigma^2 u_2 + O(\sigma^4)$$

$$\eta = \eta_0 + \sigma^2 \eta_2 + O(\sigma^4)$$

Il vient que

$$u_0 = u_0(\alpha, \tau)$$

$$\delta u_{0\tau} + \varepsilon u_0 u_{0\alpha} + \eta_{0\alpha} - \frac{\sigma^2}{h} \left[\frac{h^3}{3} \Gamma_0 \right]_{\alpha} = 0$$

$$\Gamma_0 = \delta u_{0\alpha\tau} + \varepsilon u_0 u_{0\alpha\alpha} - \varepsilon (u_{0\alpha})^2$$

$$\delta \eta_{0\tau} + [hu_0]_{\alpha} = 0$$

- Equations de BOUSSINESQ :

supposons que $\varepsilon = O(\sigma^2)$

$$\delta = O(\mathbf{1})$$

alors on obtient en passant aux variables dimensionnelles le système suivant :

$$\eta_{0t} + [hu_0]_x = 0$$

$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + g\eta_{0x} = \frac{h_0^2}{3} u_{0xxt}$$

avec $h = h_0 + \eta$

-Equations de SERRE :

supposons que $\varepsilon \gg O(\sigma^2)$

$$\delta = O(\mathbf{1})$$

alors tous calculs faits, en utilisant les variables et fonctions dimensionnelles, il vient :

$$\eta_{0t} + [hu_0]_x = 0$$

$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + g\eta_{0x} - \frac{1}{h} \left[\frac{h^3}{3} G_0 \right]_x = 0$$

$$G_0 = u_{0t} + u_0 u_{0xx} - (u_{0x})^2$$

avec $h = h_0 + \eta$

on vient de montrer que les E.S. ont le même domaine de validité temporel (symbolisé par δ) que les E.B. mais un domaine de validité en amplitude réduite ε différent qui permet l'étude des ondes de grandes amplitudes .

III) LE PARAMETRE DE TENDANCE :

Les deux systèmes d'équations précités possèdent chacun une solution de type onde solitaire qui s'écrit sous la forme : $h = h_0 + a \operatorname{sech}^2 [\lambda(x-ct)]$

- pour les E.S. :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3a}{4h_0^2 (h_0 + a)}}$$

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{a}{h_0}}$$

- pour les E.B. :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3a}{4h_0^3}}$$

$$c = c_0 \left(1 + \frac{a}{2h_0}\right)$$

Le coefficient multiplicateur λ dans l'expression ci-dessus est désigné comme le paramètre de tendance . Il est significatif du comportement à l'infini de l'onde car à l'infini l'équivalent de $h(x,t)$ est :

$$h(x,t) \approx h_0 + Ae^{-2\lambda x}$$

Ce paramètre de tendance nous permet de classer les différentes approximations par leur écart à la solution exacte pour λ donnée par LAMB (1932) .

Il est donc possible d'obtenir de manière rigoureuse la plage de variation de ce paramètre en fonction du nombre de froude F , ici défini comme $F = c/\sqrt{gh_0}$ où c est la célérité de phase de l'onde ($F > 1$) . L'analyse qui suit , due à STOKES (LAMB (1932)), a été reprise par SHIELDS (1986) . Dans un repère en translation horizontale uniforme à la vitesse c par rapport à celui défini par la figure 1 on considère le problème de l'hydrodynamique pour le potentiel des vitesses ϕ :

$$\nabla^2 \phi = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \phi_y &= 0 & \text{en } y = -1 \\ \phi_y + F^2 \phi_{xx} &= 0 & \text{en } y = \eta \\ \phi_x &= -F & \text{en } x = \infty \end{aligned}$$

Par la technique de séparation des variables on trouve la solution :

$$\phi(x,y) = Ae^{-2\lambda x} \cos(2\lambda y) - Fx$$

En substituant cette expression dans la relation de cinématique à la surface libre on obtient la relation de STOKES bien connue :

$$(\operatorname{tg} 2\lambda)/2\lambda = F^2$$

On a ainsi de manière exacte la variation de λ en fonction de F qui est alors à comparer aux valeurs obtenues par les approximations de l'eau peu profonde . L'ensemble des trois paramètres de tendance sont donnés sur la figure 2 .

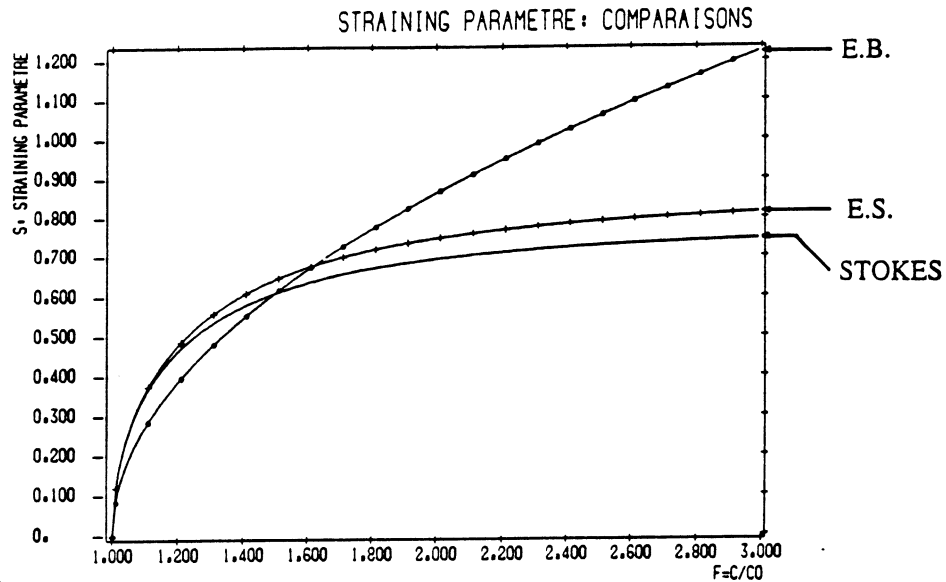


Figure 2 : Paramètre de tendance en fonction de c/c_0

Cette simple analyse permet de se rendre compte que les équations de SERRE sont une modélisation plus fine; pour finir de s'en convaincre il suffirait de comparer des profils de surface libre et des courbes de célérités en fonction de l'amplitude réduite $\varepsilon = A/h_0$, pour cela on peut se reporter à SEABRA SANTOS (1985) et SHIELDS (1986) .

IV) LES COMPARAISONS NUMERIQUES :

Dans cette partie on compare les solutions des E.S. et des E.B. obtenues numériquement dans le cas de faible pente de plage . SEABRA SANTOS (1985) a généralisé les E.S. pour des fonds quelconques d'équations $y = \zeta(x)$. Ces nouvelles équations n'ont aucune solution connue à ce jour dans le cas des plages de pentes constantes . Leur résolution exige l'utilisation de méthodes numériques . Le système des équations de SERRE avec $h = \eta - \zeta$ et où u représente la vitesse moyenne, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 h_t + [uh]_x &= 0 \\
 h(u_t + uu_x) + \left[h^2 \left(\frac{h}{3} G + \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \right) \right]_x &= -h \zeta_x \left(\frac{h}{2} G + M + 1 \right) \\
 G &= u_x^2 - u_{xt} - uu_{xx} \\
 M &= \zeta_x (u_t + uu_x) + u^2 \zeta_{xx}
 \end{aligned}$$

En regroupant les termes contenant les dérivées par rapport au temps de la vitesse moyenne dans un terme unique q_t , on obtient un système sous forme conservative :

$$\begin{aligned}
 h_t + [uh]_x &= 0 \\
 q_t + \left[uq - \frac{u^2}{2} + h + \zeta - \frac{1}{2} (hu_x - u\zeta_x)^2 \right]_x &= 0 \\
 q &= u(1 + \Omega) - \frac{1}{3h} (h^3 u_x)_x \\
 \Omega &= h_x \zeta_x + \frac{1}{2} h \zeta_{xx} + \zeta_x^2
 \end{aligned}$$

La méthode numérique employée est très proche de celle de SU & MIRIE (1980). Elle consiste en une discrétisation aux différences finies et dans un schéma prédicteur-correcteur. Ces points sont parfaitement explicités dans le mémoire de DUPLEX (1986) et dans SEABRA SANTOS & al.(1987). Nous utilisons les équations précédentes pour décrire l'évolution des ondes longues sur des plages peu inclinées ($\text{tg}\theta \ll 1$). Ce modèle numérique est comparé au modèle élaboré par PEREGRINE (1967) sur la base des E.B. dans le système d'axes et avec les notations de la figure 3.

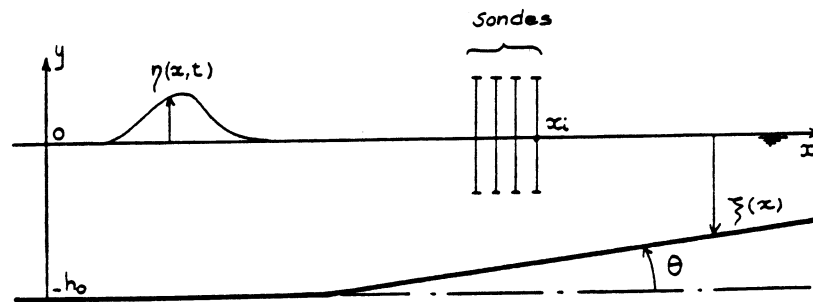


Figure 3 : Coupe schématique du dispositif expérimental et axes de référence

Sur les figures 4 nous avons porté les profils d'ondes initialement solitaires à différents instants. Sur un même graphique on a tracé à la fois le profil donné par les E.B. et celui calculé par les E.S. Sur la figure 4a) on note que les deux méthodes sont en bon accord.

Toutefois un léger déphasage apparaît au bout d'un certain temps : le modèle de PEREGRINE a tendance à accélérer l'onde par rapport aux E.S.

En revanche sur la figure 4b) des différences qualitatives apparaissent . Dans ce cas ϵ est nettement plus grand et on observe au bout d'un certain temps de propagation des courbures de profils très dissemblables et des déphasages importants . Ce cas illustre bien le fait que les deux modèles diffèrent pour de valeurs de δ au delà de $\delta = 1$ qui est la limite de validité des deux théories . A la vue de cette figure les E.B. qui exhibent de plus fortes courbures et de plus grandes amplitudes on pressent alors que les E.S. malgré les restrictions de la théorie auront une validité temporelle plus importante . Cela reste à vérifier à l'aide d'expériences .

V) COMPARAISONS AVEC LES MESURES EXPERIMENTALES :

a) Comparaisons des profils d'onde :

Les seuls jeux complets de mesures d'ondes longues sur des plages disponibles à ce jour sont celles, déjà anciennes, publiées par HALL & WATTS (1953) . Nous avons dans le canal de l'IMG (36m x 2m x 0.50m) mis en place une plage de 3°50 . Cette installation a servi à mesurer les déformations subies par une onde initialement solitaire . Le canal d'essais est schématiquement représenté en coupe sur la figure 3 . x_i représente la position de la sonde n°i , la numérotation débutant à la sonde la plus proche du début de la plage . Remarquons tout de suite que les profils enregistrés dont nous disposerons seront temporels .

Sur la figure 5 nous avons superposé les profils expérimentaux et ceux obtenus numériquement par les E.S. et les E.B. Pour répondre d'emblée à la question laissée en suspens au chapitre précédent, on constate que les E.S. soutiennent la comparaison avec l'expérience plus longtemps que les E.B. qui dès la 4^o sonde prédisent des courbures trop fortes à l'arrière de l'onde . Il y a tout de même, en ce qui concerne les E.S., des écarts de position (déphasage) importants de l'ordre de grandeur de 5% de la longueur caractéristique . Dans les cas envisagés il faudrait tenir compte de l'effet de frottement de la fine lame d'eau qui précède l'intumescence sur le plan incliné de la plage et qui dissipe une partie de l'énergie de l'onde .

b) Comparaisons des variations d'amplitudes :

De manière classique , LAMB (1934), la théorie linéarisée des ondes longues qui conduit à l'équation

$$\eta_{tt} = (\zeta \eta_x)_x$$

permet de calculer la variation de l'amplitude d'une onde sur une plage suivant la formule de GREEN (DEAN & DALRYMPLE (1984)) : cette variation est proportionnelle à $\zeta^{-1/4}$. On a utilisé le modèle de SERRE pour calculer cette variation d'amplitude en fonction de la profondeur relative locale et pour comparer ces résultats avec la théorie linéarisée dans le cas d'une plage telle que $\text{tg}\theta = 0.033$. On constate sur la figure 9 que les prédictions de la théorie linéarisée s'écartent de au plus 10% des amplitudes fournies par les E.S. On remarque en début de plage une variation non monotone de l'amplitude relative qui traduit un soudaine croissance suivie d'une baisse . Ce phénomène, non prévu par la théorie linéarisée serait à confirmer expérimentalement .

VI) CONCLUSION

Dans cette étude de la propagation des ondes en eau peu profonde nous avons, dans un premier temps, montré comment deux systèmes d'équations qui jusqu'ici se faisaient concurrence peuvent être situer l'un par rapport à l'autre . Les équations de SERRE correspondent à la description d'ondes fortement non-linéaires ou à forte courbure . Les équations de BOUSSINESQ dont le domaine de validité est compris dans celui des E.S. ne sont valables que pour de faibles amplitudes d'ondes . En d'autres termes dès que les amplitudes sont importantes et donc les accélérations du fluide élevées les E.S. sont seuls aptes à décrire les phénomènes : ceci est le cas en particulier pour la propagation des ondes longues sur des plages où l'amplitude ne cesse de croître .

La comparaison des équations avec des expériences en canal nous a permis d'étendre les prédictions théoriques sur fond horizontal au cas des plages peu inclinées et de montrer que les E.S. semblent être une bonne approximation des phénomènes au-delà des limites définies théoriquement .

Bibliographie :

- BOUSSINESQ J. (1872) - Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal ,
J. Math. Pure et Appl. vol 2, 17 .
- DEAN & DALRYMPLE (1984) - Water wave mechanics for engineers and scientists,
Prentice Hall
- DUPLEX J. (1986) - Etude comparée de quelques équations décrivant la

propagation d'ondes longues sur des plages peu inclinées
DEA de Mécanique des Milieux Géophysiques et
Environnement, Université I de Grenoble .

- HALL & WATTS (1953) - Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes, U.S. Army Corps of Engrs. , Beach Erosion Board , Tech. Memo 33
- KORTEWEG D.J. & DE VRIES G. (1895) - On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of stationary waves, Phil. Mag. , vol 39/5 p 422-443
- LAMB H. (1932) - Hydrodynamics (6^e edition) Cambridge University Press
- PEREGRINE H. (1967) - Long waves on a beach, J. Fluid Mech. , vol 27 ,4 .
- SEABRA SANTOS F.J. (1985) - Contribution à l'étude des ondes de gravité bidimensionnelles en eau peu profonde, Thèse d'Etat de l'Université I de Grenoble .
- SEABRA SANTOS F.J. & al. (1988) - Etude théorique et expérimentale du domaine de validité des théories d'évolution des ondes en eau peu profonde , Annales Geophysicae, vol 6, p 671-680 .
- SERRE F. (1953) - Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, La Houille Blanche, vol 8, p 374-388
- SHIELDS J.J. (1986) - A direct theory for waves approaching a beach, Phd dissertation , Berkeley .
- SU C-H. & GARDNER C.S. (1969)-"Korteweg-de Vries equation and generalization III" J. MATH. PHYS. , vol 10 , 3
- SU C-H. & MIRIE R.M. (1980)-"On head-on collision between two solitary waves"J. Fluid Mech. , vol 98 p 509-525 .

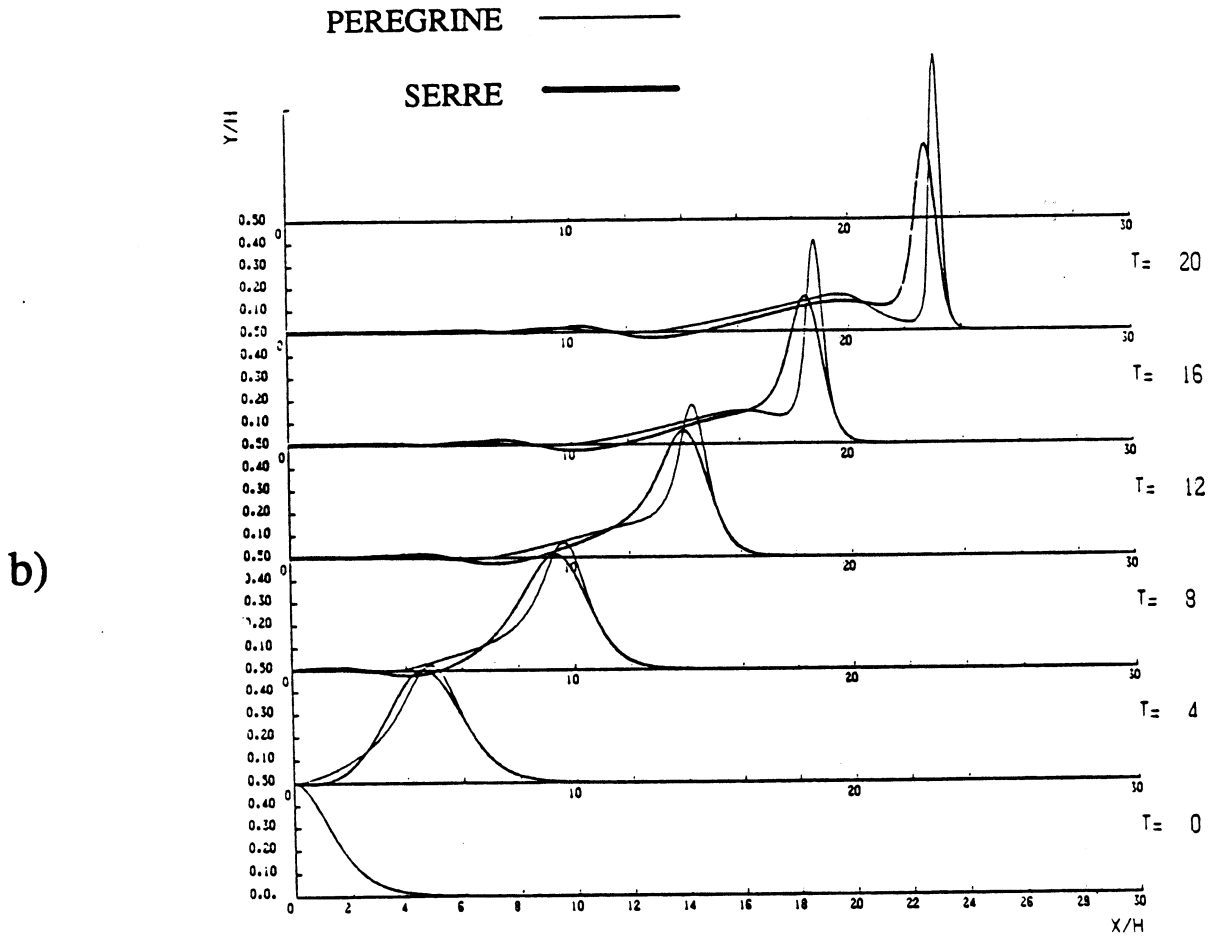
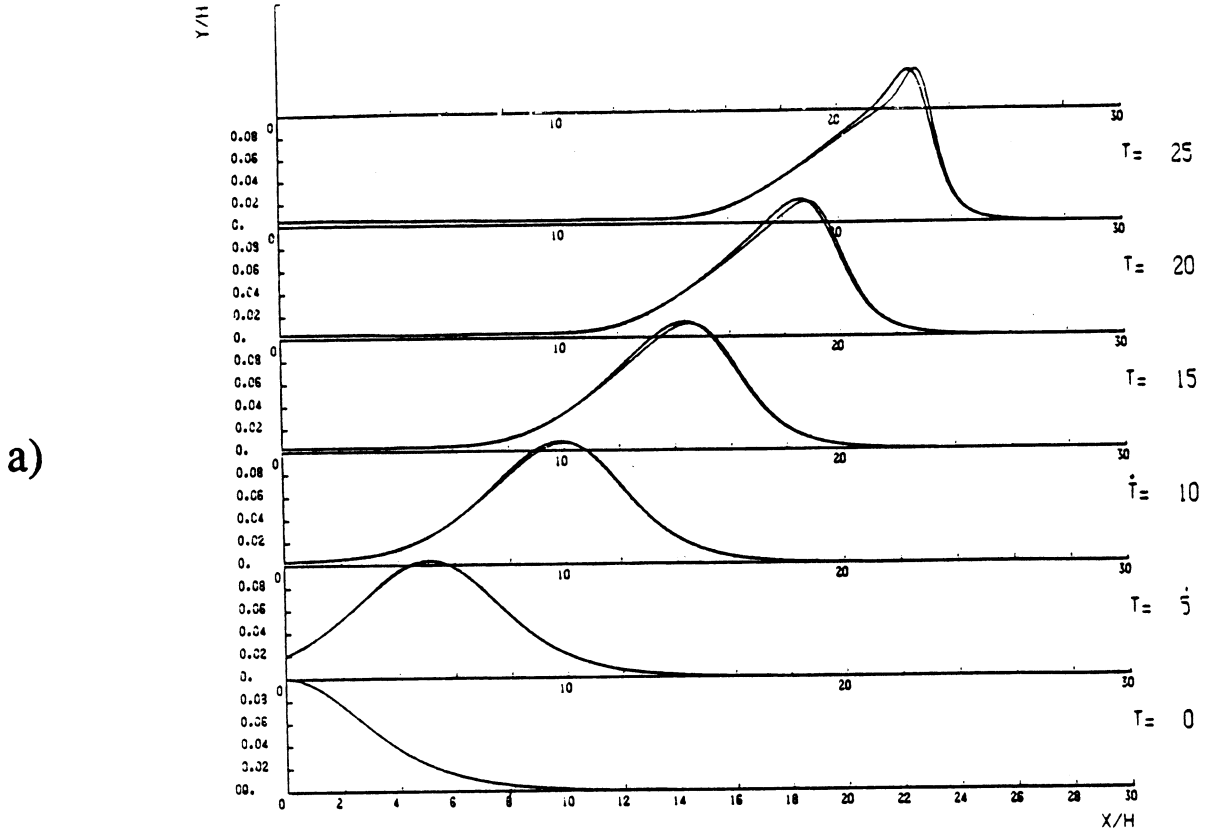
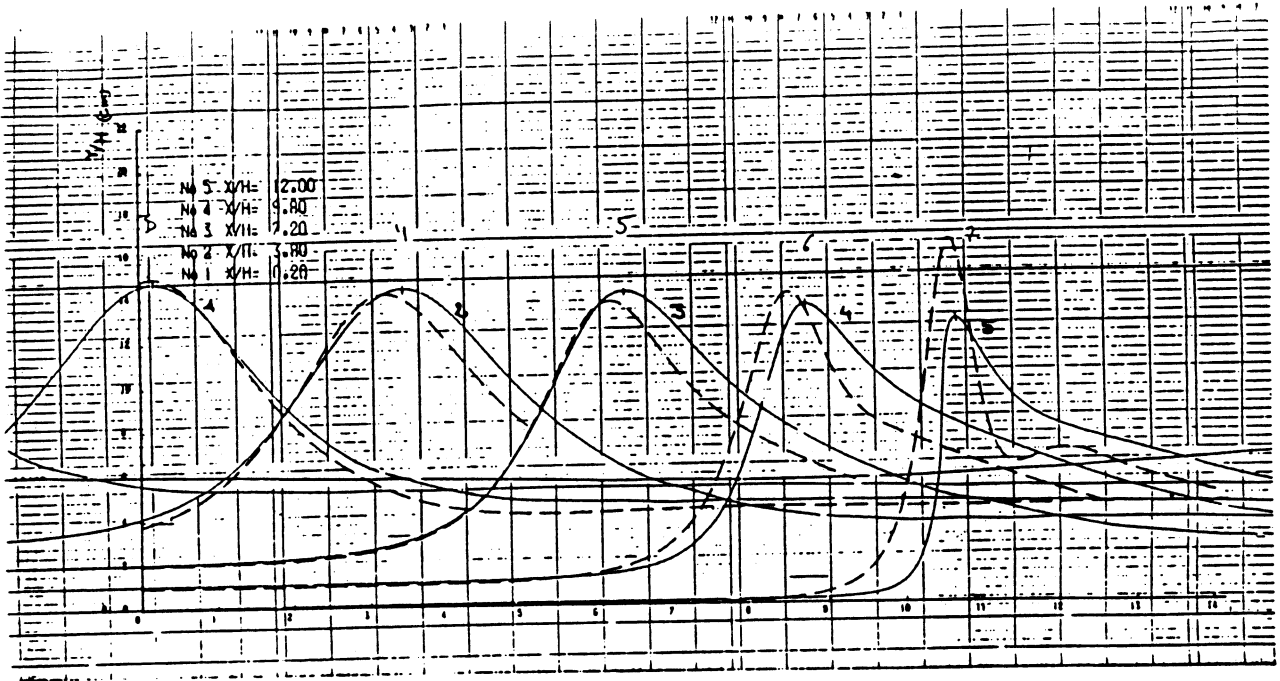
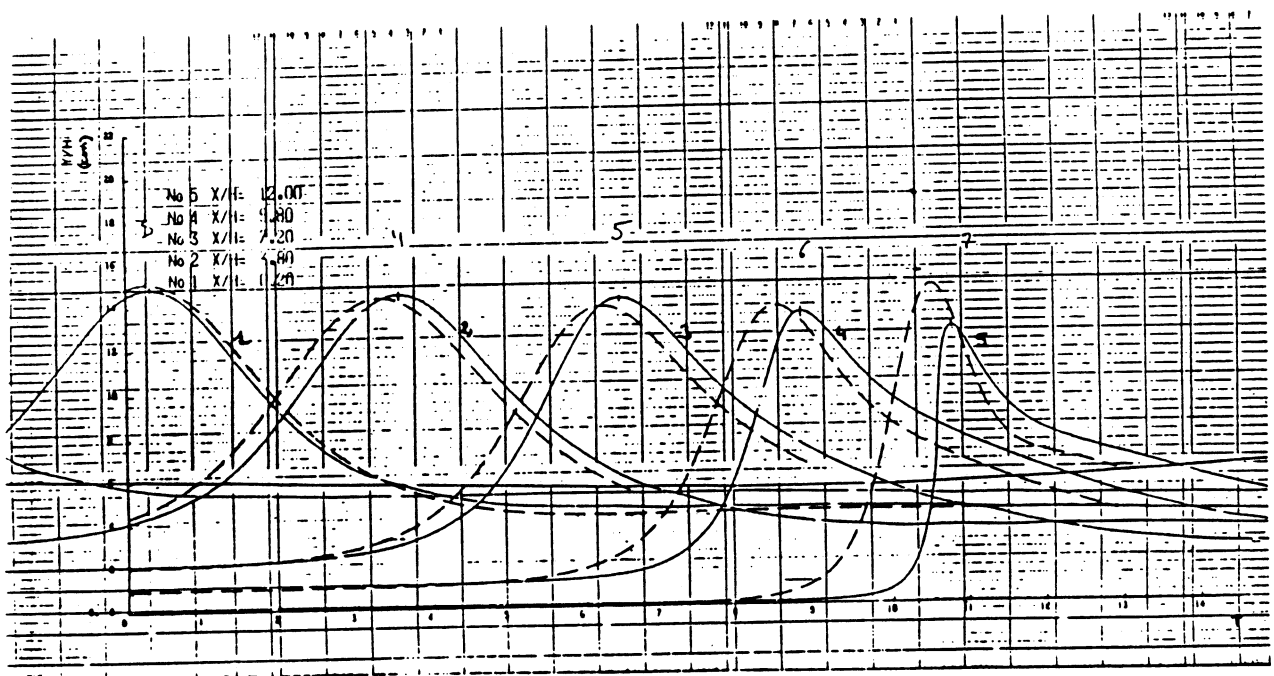


Figure 4 : Comparaisons des modèles numériques (pente de la plage : $\text{tg}\theta = 0.033$). Profils d'onde à différents instants (T est le temps dimensionnel). a) $\epsilon = 0.1$; b) $\epsilon = 0.5$



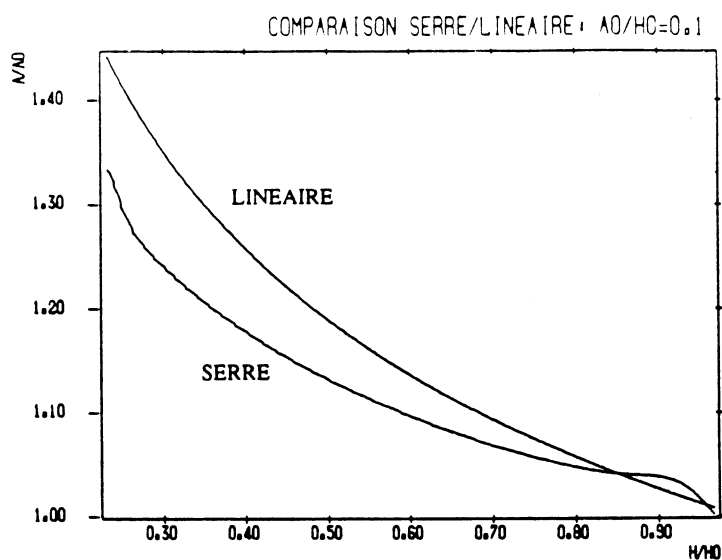
-EQUATIONS DE PEREGRINE- a)



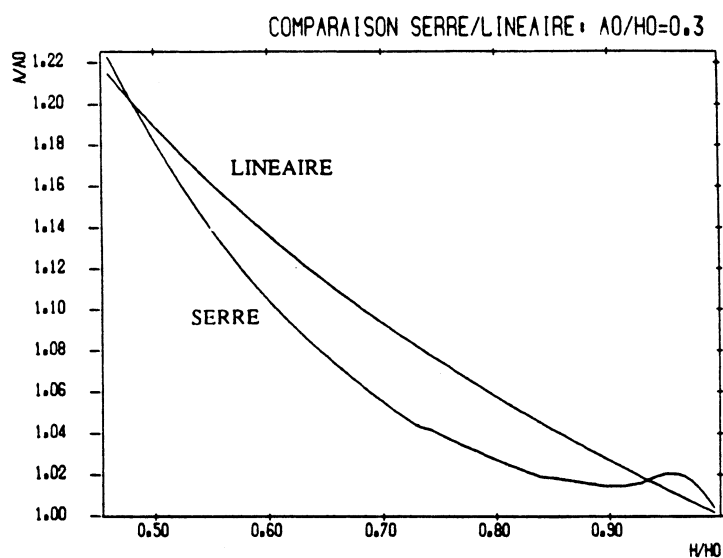
---EQUATIONS DE SERRE--- b)

Figure 5 : Comparisons des profils numériques avec un essai de propagation d'onde solitaire sur une plage de pente $\text{tg}\theta = 0.0611$. a) E.B. ; b) E.S.

a)



b)



c)

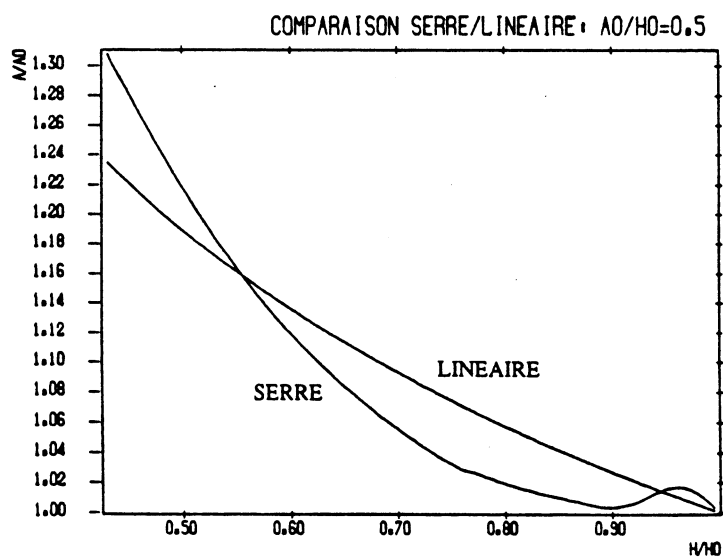


Figure 6 : Variations d'amplitudes en fonction de la profondeur relative ($\text{tg}q = 0.033$). Comparaisons entre le modèle de SERRE et la théorie linéarisée . a) $\epsilon = 0.1$; b) $\epsilon = 0.3$; c) $\epsilon = 0.5$