

RESOLUTION D'UN PROBLEME D'HYDROELASTICITE
EXTERIEUR TRIDIMENSIONNEL PAR UNE METHODE
NUMERIQUE : ELEMENTS FINIS-ELEMENTS INFINIS

Y.Q.FENG , H. OUDIN , J.P. QUEVAT, B. PESEUX

Laboratoire de mécanique des structures
E.N.S.M.

Résumé

Nous décrivons ici une modélisation numérique du problème couplé fluide-structure utilisant des éléments finis pour la structure , des éléments finis et des éléments infinis pour le fluide . Les résultats numériques ainsi obtenus sont comparés avec ceux de la méthode mixte éléments finis-équations intégrales qui a été largement qualifiée par des comparaisons avec des résultats analytiques et des résultats expérimentaux .

Summary

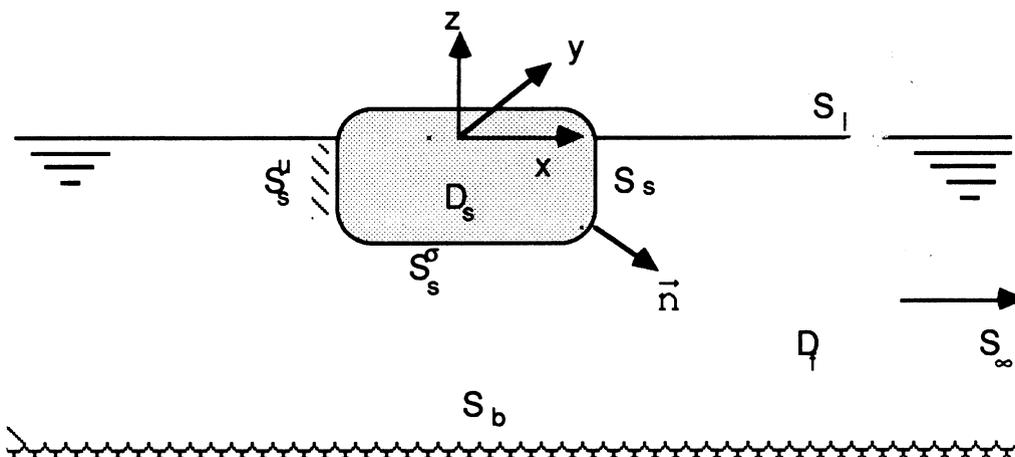
This paper presents a numerical modelling of the coupled fluide-structure problem using finite elements for the structure , finite elements and infinite elements for the fluid . The numerical results obtained with this method are compared with those of the mixed method finite elements-boundary integrals which was widely qualified by comparisons with analytical results and experimental results .

1. INTRODUCTION

La méthode des équations intégrales est de nos jours la méthode numérique la plus utilisée pour étudier le comportement des structures marines . Cette méthode a été largement développée au cours des dernières années et donne des résultats très satisfaisants pour les problèmes linéaires . Il a de plus été montré que , couplée à une méthode des éléments finis pour les structures , elle permet d'étudier le comportement dynamique de structures en milieu fluide ([1] , [2]) . Mais son extension à des problèmes non linéaires paraît délicate . Nous nous proposons donc d'étudier la possibilité de modéliser le domaine fluide à l'aide d'éléments finis et d'éléments infinis , la méthode des éléments finis est en effet plus adaptée à la résolution de problèmes non linéaires . A titre d'essai nous nous intéressons ici à un problème couplé fluide-structure linéaire .

2. NOTATIONS ET EQUATIONS DU PROBLEME

Nous nous bornons à l'étude du problème hydrodynamique de radiation . Le potentiel de dérangement est créé par les vibrations harmoniques de la structure en absence de houle incidente . Nous notons :



- . D_f le domaine fluide tridimensionnel et non borné
- . S_f la surface libre
- . S_b le fond fixe
- . S_s l'interface fluide-structure
- . S_∞ la frontière fictive à l'infini
- . D_s le domaine occupé par la structure

- . S_s^σ la partie de la frontière de la structure sur laquelle des conditions aux limites sur les forces sont imposées
- . S_s^u la partie de la frontière de la structure sur laquelle des conditions aux limites sur les déplacements sont imposées
- . \vec{n} la normale extérieure à la structure

Les équations linéarisées de ce problème sont les suivantes :

- . pour le fluide

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= 0 && \text{dans } D_f \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 && \text{sur } S_l \\
 \frac{\partial p}{\partial n} &= -\rho_f \ddot{u}_n && \text{sur } S_s \\
 \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 && \text{sur } S_b \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} + jkp \right) &= 0 && \text{à } S_\infty
 \end{aligned} \tag{1}$$

p : pression en un point du fluide

\ddot{u}_n : accélération normale d'un point de la surface de structure

r : distance radiale

k : nombre d'onde

ρ_f : masse volumique du fluide

- . pour la structure [3]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} + \rho_s f_i &= \rho_s \ddot{u}_i && \text{dans } D_s \\
 \vec{T} &= \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} && \text{sur } S_s^\sigma \\
 \vec{u} &= \vec{u}_d && \text{sur } S_s^u
 \end{aligned} \tag{2}$$

σ_{ij} : contraintes

\vec{u} : vecteur déplacement

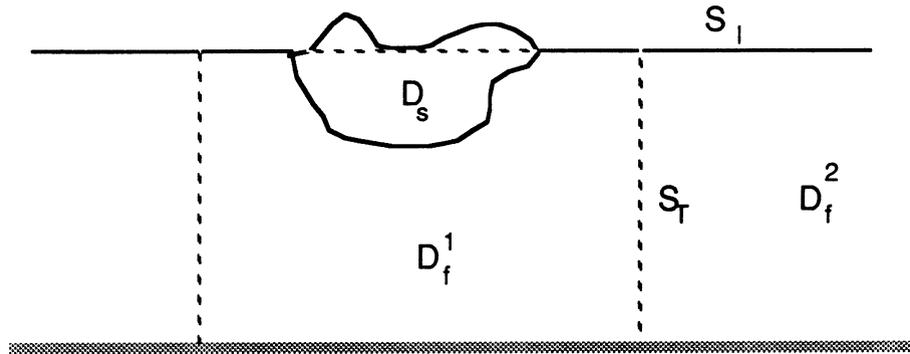
ρ_s : masse volumique de la structure

f_i : forces volumiques

3. MODELISATION DU PROBLEME

Il est possible d'étudier la structure et le fluide séparément , et

d'introduire ensuite les conditions aux limites à l'interface fluide-structure qui couple les deux milieux .



La structure est modélisée en éléments finis , pour lesquels nous écrivons l'approximation nodale des déplacements sous la forme :

$$u = \langle N_s \rangle_{es} \{u\}_{es} \quad (3)$$

es : élément structure

N_s : fonctions d'interpolation d'un élément fini structure

Le domaine fluide , de dimension infinie , est divisé en un domaine D_f^1 au voisinage de la structure et un domaine D_f^2 qui s'étend à l'infini . Dans le domaine D_f^1 le fluide est modélisé par des éléments finis fluide , les inconnus nodales sont les pressions aux noeuds , nous exprimons la pression sous la forme :

$$p = \langle N_f \rangle_{ef} \{p\}_{ef} \quad (4)$$

ef : élément fluide

N_f : fonctions d'interpolation d'un élément fini fluide

Dans le domaine D_f^2 , le fluide est modélisé par des éléments fluide infinis , la pression en tout point dans un élément est exprimée sous la forme :

$$p = \langle M_f \rangle_{ef} \{p\}_{ef} \quad (5)$$

M_f : fonctions d'interpolation d'un élément fluide infini

a. Eléments finis pour la structure

La méthode des éléments finis appliquée à la structure conduit à une équation matricielle de la forme [4] :

$$[K_s] \{u\} + [M_s] \{\ddot{u}\} = \{f_h\} + \{f_{ext}\} \quad (6)$$

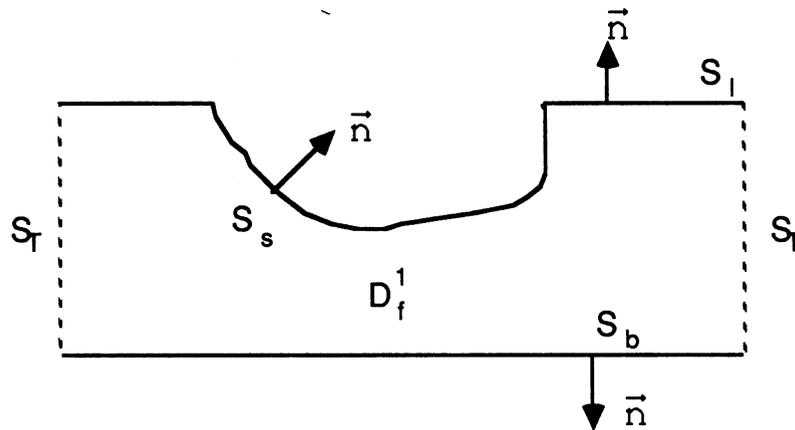
$[K_s]$: matrice raideur de la structure

$[M_s]$: matrice masse de la structure

$\{f_h\}$: forces généralisées correspondant aux actions du fluide

$\{f_{ext}\}$: forces généralisées correspondant aux autres efforts exercés sur la structure

b. Eléments finis fluide dans D_f^1



Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0 && \text{dans } D_f^1 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 && \text{sur } S_l \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= -\rho_f \vec{u} \cdot \vec{n} && \text{sur } S_s \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 && \text{sur } S_b \\ (p, \frac{\partial p}{\partial n})^1 &= (p, \frac{\partial p}{\partial n})^2 && \text{sur } S_T \end{aligned} \quad (7)$$

Nous utilisons la méthode des résidus pondérés pour passer du système d'équation aux dérivées partielles à la formulation intégrale [5]. Cette méthode consiste à chercher des fonctions p telles que :

$$\forall v \text{ fonction de pondération} \quad \int_{D_f^1} v \Delta p \, d\Omega = 0$$

En effectuant une intégration par partie , nous obtenons la formulation faible du probleme :

$$\forall v \int_{D_f^1} \overrightarrow{\text{grad}} v \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\Omega = \int_{\partial D_f^1} v \frac{\partial p}{\partial n} \, d(\partial\Omega) \quad (8)$$

\vec{n} : normale extérieure au domaine D_f^1
 $\partial D_f^1 = S_l + S_s + S_f + S_T$

En reportant les conditions aux limites du système (7) dans l'équation (8) et appliquant la méthode de Galerkin ($v = \delta p$) nous obtenons :

$$\forall \delta p \int_{D_f^1} \overrightarrow{\text{grad}} \delta p \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\Omega = - \frac{1}{g} \int_{S_l} \delta p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \, dS - \int_{S_s} \delta p (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS - \int_{S_T} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} \, dS$$

Le domaine étant modélisé par des éléments finis , la pression est donnée par la relation (4) , ce qui nous donne pour tout élément ef du domaine D_f^1 :

$$\forall ef \int_{D_f^1(ef)} \langle \text{grad } N_f \rangle_{ef}^T \langle \text{grad } N_f \rangle_{ef} \, d\Omega \{p\} + \frac{1}{g} \int_{S_l(ef)} \langle N_f \rangle_{ef}^T \langle N_f \rangle_{ef} \, dS \{ \ddot{p} \}_{ef} = -\rho_f \int_{S_s(ef)} \langle N_f \rangle_{ef}^T (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS - \int_{S_T} \langle N_f \rangle_{ef}^T \frac{\partial p}{\partial n} \, dS \quad (9)$$

Les deux premiers termes nous permettent de définir les matrices élémentaires du comportement du fluide :

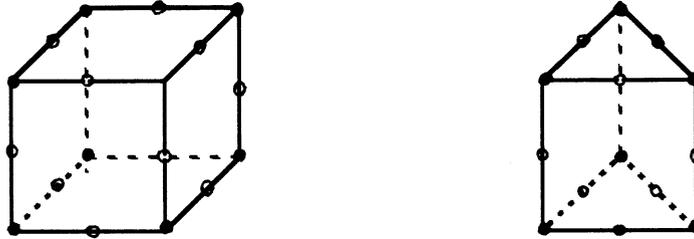
$$[H_{ef}] = \int_{D_f^1(ef)} \langle \text{grad } N_f \rangle_{ef}^T \langle \text{grad } N_f \rangle_{ef} \, d\Omega \quad (10)$$

$$[B_{ef}] = 1/g \int_{S_l(ef)} \langle N_f \rangle_{ef}^T \langle N_f \rangle_{ef} \, dS \quad (11)$$

La matrice $[H_{ef}]$ est équivalente à une matrice raideur pour le fluide , et $[B_{ef}]$ est équivalente à une matrice masse , cette matrice

provient des ondes de gravité sur la surface libre .

Les éléments de référence utilisés pour construire la matrice élémentaire $[H_{ef}]$ sont des éléments isoparamétriques : hexaédres à huit noeuds et à vingt noeuds ; prismes à six noeuds et à quinze noeuds .



Les éléments de référence utilisés pour construire la matrice élémentaire $[B_{ef}]$ sont des éléments correspondants : quadrilatères à quatre noeuds et à huit noeuds ; triangle à trois noeuds et à six noeuds .



Les matrices élémentaires sont calculées en utilisant une méthode d'intégration numérique de type GAUSS

c. Eléments : uide infinis dans D_f^2

Les équations du problème sont :

$$\Delta p = 0$$

dans D_f^2

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

sur S_l

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

sur S_b

$$\left(p, \frac{\partial p}{\partial n} \right)^2 = \left(p, \frac{\partial p}{\partial n} \right)^1$$

sur S_T

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial n} + jkp \right) = 0$$

à S_∞

Nous appliquons la méthode de Galerkin à la formulation faible du problème donnée par la forme intégrale (8) :

$$\forall \delta p \int_{D_f^2} \overrightarrow{\text{grad}}(\delta p) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\Omega = \int_{\partial D_f^2} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} \, d(\partial\Omega)$$

La contribution du second terme doit être nulle à l'infini, ce qui impose une condition sur la décroissance des fonctions d'interpolation. Il ne reste que :

$$\forall \delta p \int_{D_f^2} \overrightarrow{\text{grad}}(\delta p) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\Omega = -\frac{1}{g} \int_{S_1} \delta p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \, dS - \int_{S_T} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} \, dS \quad (12)$$

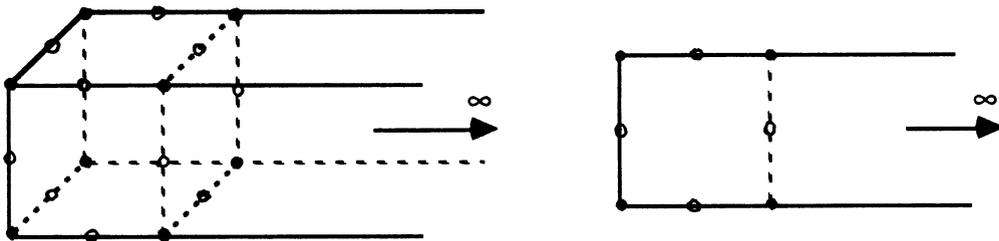
Le domaine D_f^2 étant modélisé par des éléments fluide infinis, la pression est donnée par la relation (5), ce qui nous permet de définir les matrices élémentaires suivantes :

$$[\overline{H}_{ef}] = \int_{D_f^2(e_f)} \langle \text{grad } M_f \rangle^T \langle \text{grad } M_f \rangle \, d\Omega \quad (13)$$

$$[\overline{B}_{ef}] = \int_{S_1(e_f)} \langle M_f \rangle^T \langle M_f \rangle \, dS \quad (14)$$

Les termes sur S_T s'annulent deux à deux avec ceux des éléments finis fluide lorsque nous effectuons l'assemblage.

Les éléments de référence infinis utilisés pour construire les matrices élémentaires sont des éléments de type "decay function infinite elements" qui s'étend à l'infini dans une direction ([6],[7]), ils sont basés sur les éléments hexaédriques et quadrilatères que nous utilisons pour construire les matrices élémentaires finies dans le domaine D_f^1 .



Les fonctions d'interpolation de ces éléments infinis ont la forme suivante :

$$M_f = N_f \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi - \xi_1} \right) e^{ik(\xi - \xi_1)} \quad (15)$$

où N_{fi} est la fonction d'interpolation associée au noeud i de l'élément fini sur lequel l'élément infini est basé .

La deuxième partie de l'expression (15) , est appelée fonction de décroissance $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (16)$$

où ξ_0 est le pôle de l'élément infini , ce point doit être en dehors de l'élément , ceci évite une singularité dans l'élément , n est choisi plus grand que l'ordre maximal de ξ dans N_f , ceci assure que M_f tend vers zéro quand ξ tend vers l'infini .

La troisième partie périodique $e^{jk(\xi - \xi_i)}$ a pour but de modéliser les ondes de gravité sur la surface libre qui se propagent vers l'infini (direction ξ) , où k est le nombre d'onde .

d. Couplage fluide-structure

Nous exprimons le terme :

$$\int_{S_{s(ef)}} \langle N_f \rangle_{ef}^T (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

en fonction des déplacements nodaux de la structure . La relation (3) appliquée aux éléments es nous donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \{\bar{n}\}^T \langle N_s \rangle_{es} \{\ddot{u}\}_{es}$$

d'où :

$$\int_{S_{s(ef)}} \langle N_f \rangle_{ef}^T (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = [L(ef,es)] \{\ddot{u}\}_{es} \quad (17)$$

$$\text{avec } [L(ef,es)] = \int_{S_{s(ef)}} \langle N_f \rangle_{ef}^T \{\bar{n}\} \langle N_s \rangle_{es} dS \quad (18)$$

La matrice $[L(ef,es)]$ de couplage fluide-structure n'est définie que pour les éléments de la frontière commune S_s . $\{\bar{n}\}$ représente les composantes de la normale extérieure à la structure exprimées dans le repère local de l'élément es .

Par le principe des travaux virtuels , nous pouvons exprimer la

force généralisée exercée par le fluide sur un élément es de la structure . La pression du fluide peut s'écrire :

$$p_f = \rho_f g(\vec{u}, \vec{z}) + \langle N_f \rangle_{ef} \{p\}_{ef} \quad (19)$$

la force correspondant est $d\vec{f} = -p_f \vec{n} ds$, d'où l'expression de la force généralisée exercée sur l'élément es de la structure :

$$\{fh\}_{es} = - \int_{S_s(es)} \langle N_s \rangle_{es}^T \{z\} \rho_f g_n \{z\}^T \langle N_s \rangle_{es} dS \{u\}_{es} - \int_{S_s(es)} \langle N_s \rangle_{es}^T \{n\} \langle N_f \rangle_{ef} dS \{p\}_{ef}$$

avec $\{z\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

En définissant la matrice hydrostatique $[Kh]$ et en utilisant la matrice $[L(ef,es)]$ définie par (18) , nous trouvons :

$$\{fh\}_{es} = -[Kh]\{u\}_{es} - [L(ef,es)]^T \{p\}_{ef} \quad (20)$$

avec $[Kh] = \int_{S_s(es)} \langle N_s \rangle_{es}^T \{z\} \rho_f g_n \{z\}^T \langle N_s \rangle_{es} dS$

e. Equations matricielles du problème

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour écrire le système matriciel du problème couplé fluide-structure . Après assemblage de toutes les matrices élémentaires décrites précédemment et introduction des conditions aux limites sur la structure et sur le fluide , nous obtenons un système d'équations matricielles pour le problème couplé fluide-structure :

$$\begin{cases} [Hf]\{p\} + [Bf]\{\ddot{p}\} = \rho_f [L]\{\ddot{u}\} \\ [Ks]\{u\} + [Ms]\{\ddot{u}\} = -[Kh]\{u\} - [L]^T \{p\} + \{f_{ext}\} \end{cases} \quad (21)$$

Les matrices du fluide $[Hf]$ et $[Bf]$ sont des matrices complexes . Ce système d'équations matricielles permet de résoudre le problème couplé fluide-structure . Dans la suite , nous nous intéressons au problème aux valeurs propres du système couplé .

4. RESOLUTION DES EQUATIONS DU PROBLEME

Nous résolvons les équations de ce problème couplé pour trouver les fréquences de résonance de la structure vibrant en milieu fluide .

Nous utilisons une méthode de condensation complète de degrés de liberté du fluide . Cette méthode consiste à condenser tous les degrés de liberté du fluide dans le système couplé matriciel .

Etant en régime harmonique nous utilisons les notations complexes :

$$\{p\} = \text{Re}(\{\bar{p}\} e^{-j\omega t}) \quad (22)$$

$$\{u\} = \text{Re}(\{\bar{u}\} e^{-j\omega t}) \quad (23)$$

Les équations matricielles du problème s'écrivent donc :

$$\begin{cases} ([H_f] - \omega^2[B_f])\{\bar{p}\} = -\rho_f \omega^2 [L]\{\bar{u}\} \\ ([K_s] - \omega^2[M_s])\{\bar{u}\} = -[K_h]\{\bar{u}\} - [L]^T \{\bar{p}\} \end{cases} \quad (24)$$

Nous exprimons les pressions nodales en fonction des déplacements nodaux de la structure en transformant l'équation matricielle du fluide :

$$\{\bar{p}\} = -\rho_f \omega^2 ([H_f] - \omega^2[B_f])^{-1} [L]\{\bar{u}\}$$

Le terme $([H_f] - \omega^2[B_f])^{-1}$ est une matrice complexe de la forme $[H_1] + j[H_2]$, d'où l'expression des pressions de radiation exercées sur la structure :

$$\{\bar{p}\} = -\rho_f \omega^2 [H_1][L]\{\bar{u}\} - j\rho_f \omega^2 [H_2][L]\{\bar{u}\} \quad (25)$$

En reportant (25) dans l'équation matricielle de la structure et en définissant la matrice masse d'eau ajoutée $[Ma]$ et la matrice d'amortissement $[Ca]$, le système devient :

$$([K_s + K_h] - j\omega[Ca] - \omega^2[M_s + Ma])\{\bar{u}\} = 0 \quad (26)$$

$$\text{avec : } [Ma] = \rho_f [L]^T [H_1] [L]$$

$$[Ca] = \rho_f \omega [L]^T [H_2] [L]$$

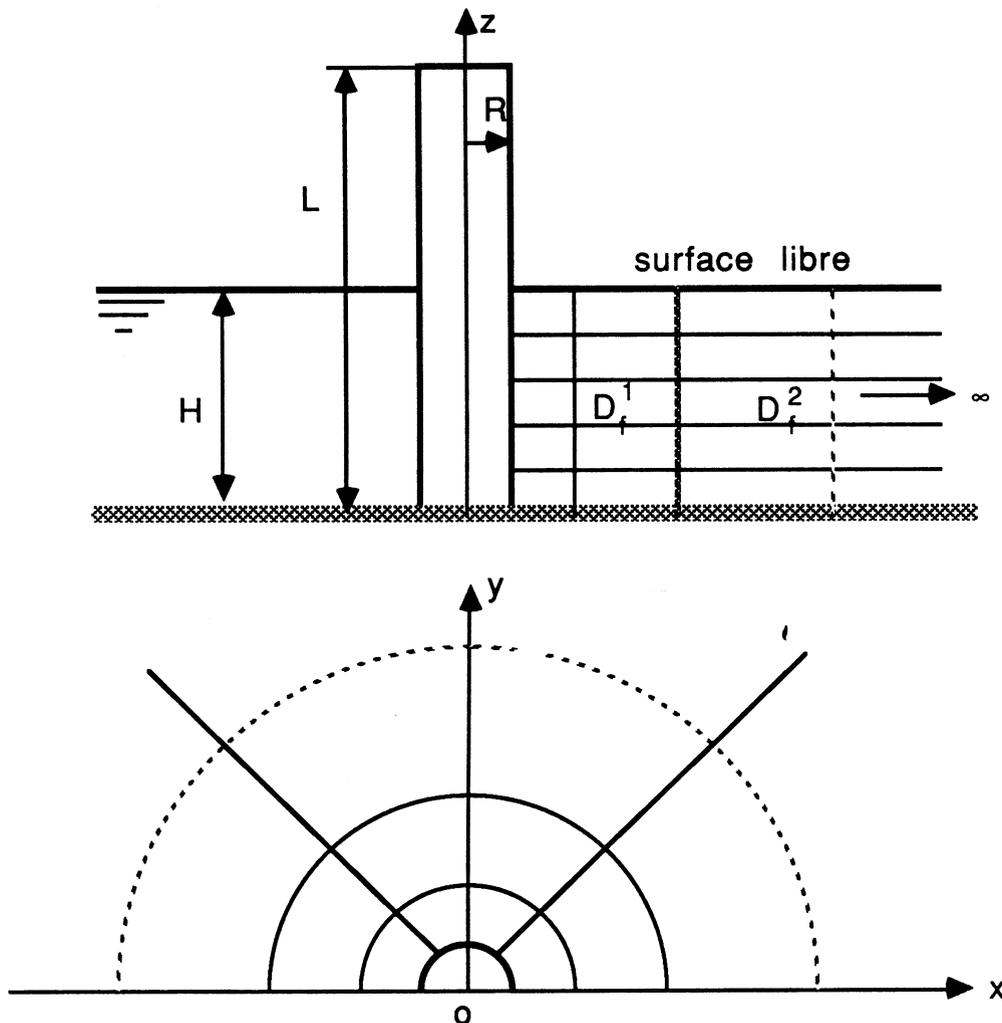
Les matrices $[Ma]$, $[Ca]$ sont symétriques , la résolution [2] du système (26) nous donne les fréquences de résonance de la structure dans le fluide .

5. RESULTATS NUMERIQUES

a. cylindre vertical

Le premier test que nous avons fait concerne un cylindre vertical encastré-libre partiellement immergé. Le cylindre testé a les caractéristiques géométriques suivantes :

Longueur totale $L=30$ m Hauteur d'immersion $H=10$ m
 rayon extérieur $R=1$ m Rigidité $EI=18.85E9$ Nm²
 Section du pieu $S=18.85E-2$ m²
 Masse volumique $\rho_s=7800$ kg/m³



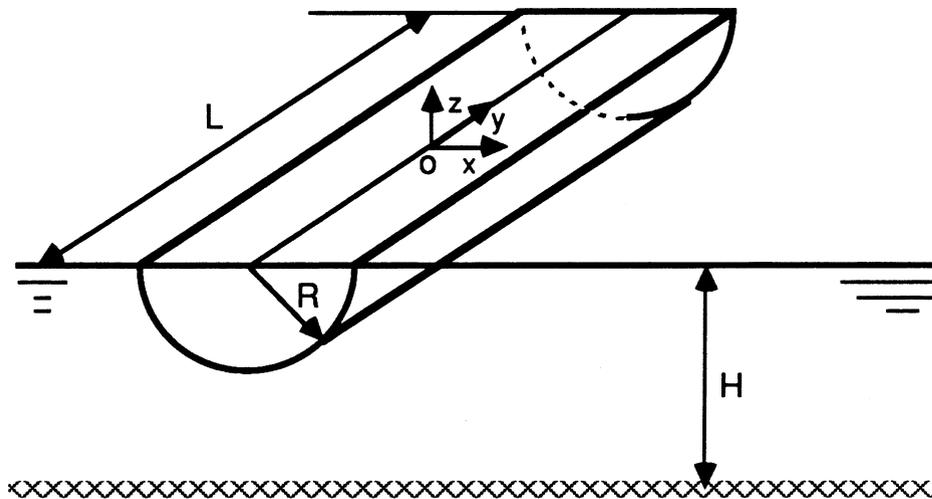
Nous calculons les cinq premières fréquences de résonance de ce cylindre en utilisant deux bandes d'éléments finis fluide autour du cylindre et une bande d'éléments infinis dans le reste du domaine fluide . Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par la méthode des équations intégrales dans le fluide .

| fréquences | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|---------|
| M.E.I.* | 2,214 | 12,173 | 31,610 | 65,165 | 108,600 |
| M.E.F.I.* | 2,218 | 12,998 | 32,639 | 66,076 | 111,233 |
| Erreur relative | 0,18% | 2,56% | 3,26% | 1,40% | 2,42% |

M.E.I. : Méthode éléments finis + équations intégrales
(code AQUADYN)

M.E.F.I. : Méthode éléments finis + éléments finis + éléments
(notre méthode) infinis

b. Cylindre horizontal (poutre-navire)



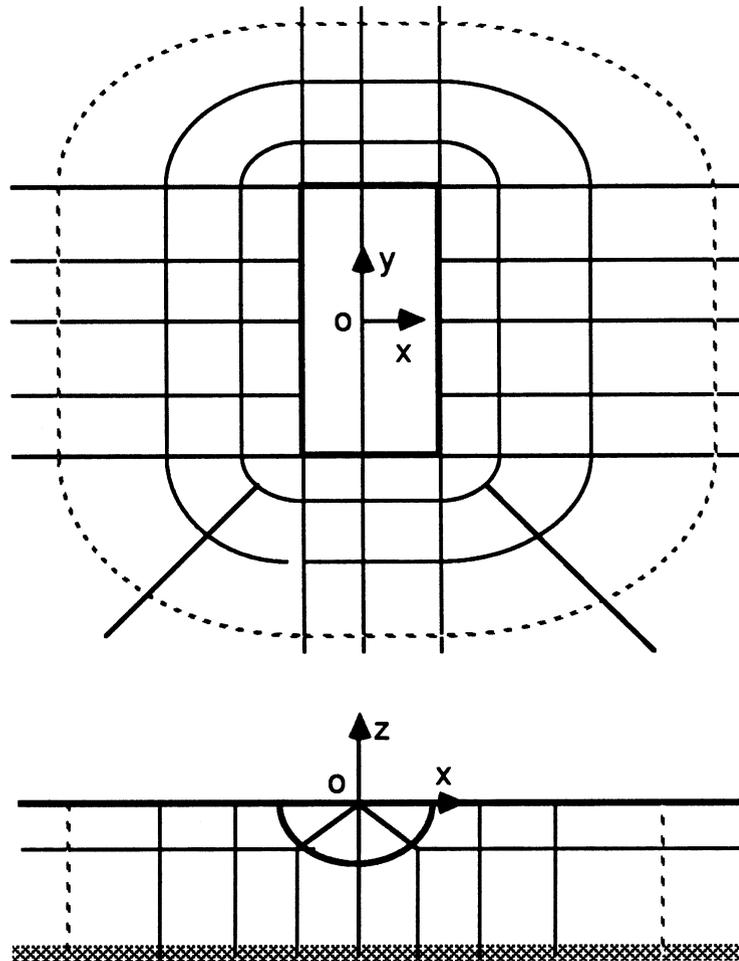
Nous calculons les fréquences de résonance d'un cylindre horizontal flottant dans l'eau . Le cylindre est long de 15 m il est à demi immergé . Le rayon extérieur est de 1.5 m .

caratéristiques mécaniques

$$EI = 4.5 E 7 \text{ Nm}^2$$

$$S = 0.2 \text{ m}^2$$

Le cylindre est modélisé par quatre éléments , le domaine fluide est modélisé par deux bandes d'éléments finis et une bande d'éléments infinis.



Fréquences propres dans l'air (Hz)
 (2 modes rigides) 2.691 7.455 14.640 26.826

Fréquences de résonance dans l'eau (profondeur $H=3$ m)
 0.488 0.521 2.019 5.733 11.224 26.733

6.CONCLUSION

Cette méthode des éléments finis et infinis appliquée au problème couplé tridimensionnel fluide-structure a permis de retrouver avec une bonne précision les fréquences de résonance obtenues par la méthode mixte développée au laboratoire de mécanique des structures de l'E.N.S.M. : éléments finis-équations intégrales . Cette bonne précision permet d'envisager l'étude de problèmes couplés non linéaires par une méthode similaire .

REFERENCE

- [1] J.P.QUEVAT " Couplage de la méthode des équations intégrales et de la méthode des éléments finis pour la résolution d'un problème d'hydroélasticité " Thèse de Docteur-Ingénieur 1979
- [2] H.OUDIN " Etude du comportement hydroélastique de structures marines par une formulation mixte : Equations intégrales-Eléments finis " Thèse de doctorat 1986
- [3] S.DUBIGEON " Elastodynamique des petits mouvements " Cours de la section calcul des structures , E.N.S.M. , Nantes
- [4] O.C.ZIENKIEWICZ and P.BETTESS " Dynamic fluid-structure Interaction. Numerical modelling of the coupled problem " Numerical Methods in Offshore Engineering
- [5] G.DHATT - G.TOUZOT " Une présentation de la méthode des éléments finis " Presses de l'Université Laval-Québec
- [6] P.BETTESS and J.A.BETTESS " Infinite elements for static problems " Eng. Comput. 1984 , Vol. 1, March
- [7] O.C.ZIENKIEWICZ , K.BANDO , P.BETTESS , C.EMSON , and T.C.CHIAM " MAPPED INFINITE ELEMENTS FOR EXTERIOR WAVE PROBLEMES " Int.j.numer.methods eng. , Vol.21 , 1229-1251(1985)