

**EVALUATION DES EFFORTS DE BASSE FREQUENCE
SUR UNE STRUCTURE SOUMISE A UNE HOULE IRRÉGULIERE**
Comparaison de différentes approximations

Xiaobo CHEN*

Laboratoire d'Hydrodynamique Navale
ENSM, Nantes

Résumé.

Les efforts du second-ordre comprennent une partie provenant des quantités du premier-ordre et une autre partie dépendant du potentiel du second-ordre. L'évaluation de la première partie des efforts ne présente aucune difficulté une fois résolu le problème complet du premier-ordre. Compte tenu de la complexité de la résolution du problème du second-ordre, différentes approximations ont été développées et souvent utilisées dans la pratique. Comme application numérique, une sphère à moitié immergée est choisie pour la comparaison de ces approximations avec la formulation exacte de Molin (1979), dans le cas d'une houle bichromatique. Cette formulation exacte consiste à évaluer deux intégrales de type Haskind sur la carène et sur la surface libre. Ces intégrales sont transformées de façon à ne plus contenir les dérivées secondes du potentiel du premier-ordre, et donc évaluées précisément.

Summary.

The second-order forces consist of one part which depends only on first-order quantities and another part which depends on the second-order velocity potential. The evaluation of the first part can be done without difficulty, once the complete first-order problem is solved. The second-order solution being much more complicated, various approximate methods have been developed and are often used in practice. A half-immersed sphere example is chosen in numerical calculation, in order to compare these approximations with Molin's exact formulation, for bichromatic waves. This complete development results in calculating two Haskind type integrals on the body surface and on the free surface. These integrals are transformed so that they do not contain double derivatives any more, and so are evaluated accurately.

* maintenant à l'IFP, Rueil-Malmaison.

I. INTRODUCTION

Depuis une dizaine d'années, l'évaluation des efforts du second-ordre est devenue un des sujets "chauds" dans le domaine hydrodynamique. Une structure en mer, soumise à une houle irrégulière, subit non seulement les efforts linéaires de même fréquence que la houle incidente, mais aussi les efforts non-linéaires de basse fréquence (différences des fréquences de la houle incidente) et de haute fréquence (sommes des fréquences de la houle incidente). Les efforts de basse fréquence, bien qu'ils soient relativement petits devant les efforts linéaires, peuvent induire des réponses significatives d'une structure, si la fréquence est proche de celle de la résonance et si les amortissements sont petits.

Si nous admettons les hypothèses de fluide parfait, d'écoulement irrotationnel et de petites perturbations (faible cambrure de la houle, petits mouvements du corps), le problème hydrodynamique de diffraction-radiation, l'inconnue étant le potentiel de vitesse, non-linéaire du fait que les conditions sur la surface libre et sur la carène s'écrivent sur des surfaces inconnues a priori et que la condition sur la surface libre contient des termes quadratique et cubique, peut être séparé en premier-ordre, linéaire, et en second-ordre, dont les conditions aux limites s'écrivent sur les surfaces moyennes. Le potentiel du premier-ordre satisfait l'équation de Laplace, une condition homogène sur la surface libre et les conditions de glissement sur la carène, sur le fond et à l'infini. Le potentiel du second-ordre satisfait les mêmes conditions, à la différence près que les seconds membres sur la surface libre et sur la carène sont des fonctions quadratiques de la solution du problème du premier-ordre.

Les efforts du second-ordre, obtenus en intégrant la pression hydrodynamique du second-ordre sur la carène, sont proportionnels au carré d'un petit paramètre représentant la cambrure de la houle incidente, dans la théorie des petites perturbations. Ils comprennent deux parties correspondant à la dépendance des potentiels du premier-ordre ou du second-ordre. La première partie des efforts provient de l'intégrale des pressions hydrodynamiques dues aux produits des quantités du premier-ordre, correspondant au terme quadratique dans la relation de Bernoulli et aux termes de correction dus à ce que les intégrales sont calculées sur les surfaces moyennes au lieu des surfaces instantanées. Cette partie des efforts peut donc être obtenue directement une fois résolu le problème du premier-ordre (potentiel sur la carène, mouvement du corps). Cependant la deuxième partie des efforts du second-ordre (dépendant du potentiel du second-ordre) n'est pas simple à évaluer à cause de la difficulté d'obtenir le potentiel du second-ordre. Kim et Yue (1988) ont utilisé une méthode basée sur les singularités de type "ring-source" pour obtenir le potentiel du second-ordre. Leurs résultats sont intéressants mais limités au cas d'un corps axisymétrique. Boudet (1988) a évalué le potentiel de fréquence double en utilisant les singularités de Rankine. Les équations linéaires s'écrivent dans un domaine fluide limité par une surface de raccordement au loin du corps. Le temps du calcul pour une seule fréquence est de quatre heures et demie sur Vax8700, pour un cylindre vertical. A notre connaissance, la solution complète du second-ordre pour un corps de géométrie quelconque n'est pas encore publiée.

Molin (1979) a montré, en analysant les comportements asymptotiques du problème du second-ordre au loin du corps, que les efforts complets du second-ordre peuvent être obtenus sans évaluer explicitement le potentiel du second-ordre. En introduisant un potentiel additionnel et en utilisant la relation de Haskind, la contribution du potentiel du second-ordre est exprimée en deux intégrales de Haskind sur la carène $F_{2c}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ et sur la surface libre $F_{2s}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$.

En raison des difficultés associées au calcul numérique des efforts du second-ordre, des formulations approximatives ont été proposées par différents auteurs, et sont souvent utilisées dans la pratique. Newman (1974) a proposé d'exprimer les efforts de basse fréquence à partir des efforts de dérive de fréquence moyenne, ce qui permet de les obtenir facilement. Bowers (1976) n'a tenu compte que de la contribution du potentiel de la houle incidente. Pinkster (1980) a formulé la contribution du potentiel du second-ordre par les efforts du premier-ordre de même fréquence basse en multipliant un coefficient en fonction des fréquences ω_1 et ω_2 de la houle bichromatique. Benschop (1985) a montré que la contribution de l'intégrale de Haskind sur la surface libre était petite, dans le cas d'une structure fixe.

Une méthode numérique basée sur la théorie de Molin est développée pour évaluer les efforts complets du second-ordre sans aucune restriction sur une structure de géométrie quelconque, soumise à une houle bichromatique. Pour déterminer la limite de validité de ces approximations, les résultats numériques sont comparés avec la méthode que nous allons développer dans le prochain paragraphe. Une sphère à moitié immergée est choisie comme exemple du calcul. Une raideur horizontale est ajoutée

à cette sphère de façon à obtenir une réponse résonante de fréquence basse.

II. EVALUATION COMPLETE DES EFFORTS DU SECOND-ORDRE

Comme les efforts du second-ordre comprennent une partie qui ne dépend que du potentiel du premier-ordre et une autre partie qui provient du potentiel du second-ordre, nous pouvons écrire :

$$F^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_2^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$$

La première partie des efforts $F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ se décompose en quatre termes. La première contribution est l'intégrale de la pression du fluide sur la surface perturbée autour de la ligne de la flottaison. Cette intégrale est transformée en une intégrale de l'élévation relative de surface libre sur la ligne de flottaison. La deuxième contribution est l'intégrale sur la carène de la pression due au terme quadratique de l'équation de Bernoulli. La troisième contribution est un terme de correction de la série de Taylor sur la pression du premier-ordre, dû à l'intégration sur la carène moyenne au lieu de celle instantanée. La quatrième contribution est une correction des efforts du premier-ordre, due à la rotation du corps. Ces contributions peuvent toutes être évaluées directement. La résolution du problème du premier-ordre, à l'aide d'une méthode de singularité de sources seules, fournit les efforts d'excitation du premier-ordre et les mouvements après résolution de l'équation de la mécanique effectuée en introduisant des raideurs et des efforts de liaison. Une distribution des sources cinématiquement équivalente au corps obtenue en tenant compte de ces mouvements, est utilisée pour évaluer toutes les quantités du premier-ordre (potentiel et ses dérivées spatiales autour de la carène et élévation de surface libre le long de la ligne de flottaison). Ces quantités (en ajoutant les mouvements et les efforts d'inertie) sont utilisées pour évaluer les quatre termes constituant la première partie des efforts du second-ordre.

Comme le potentiel du second-ordre peut être séparé en un potentiel incident $\phi_I^{(2)}$, un potentiel de diffraction $\phi_D^{(2)}$ et un potentiel de radiation $\phi_R^{(2)}$, les efforts correspondant au potentiel incident $\phi_I^{(2)}$ et à celui de radiation $\phi_R^{(2)}$ sont calculés de la même façon qu'au premier-ordre. Quant à la contribution du potentiel de diffraction $\phi_D^{(2)}$ qui vérifie une condition non-homogène sur la surface libre et une condition non-homogène sur la carène, la seconde identité de Green est appliquée pour transformer l'intégrale volumique contenant le potentiel $\phi_D^{(2)}$ et un potentiel additionnel ψ_j dans le domaine fluide en intégrales sur les surfaces limites. Ce potentiel additionnel de radiation vérifie la condition homogène sur la surface libre, une condition de glissement sur la carène (le second membre étant une composante de la normale) et les autres équations. L'intégrale sur la carène présente une partie de la même forme que l'expression des efforts correspondant à $\phi_D^{(2)}$, et une autre partie dont l'intégrand contient le second membre de la condition sur la carène $a_C^{(2)}$. L'intégrale sur la surface libre fait intervenir de même le second membre de la condition sur la surface libre $a_{LD}^{(2)}$. L'intégrale sur le fond est nulle. En analysant les expressions asymptotiques des potentiel $\phi_D^{(2)}$ et ψ_j et en utilisant le théorème de la phase stationnaire, on montre que l'intégrale sur la surface à l'infini tend vers zéro quand son rayon tend vers l'infini. En résumé, cette partie des efforts du second-ordre est formulée en trois termes suivants :

$$F_2^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_{2I}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_{2c}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_{2s}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$$

Pour une houle bichromatique de fréquences ω_1 et ω_2 , la contribution de la houle incidente est calculée directement puisque le potentiel $\phi_I^{(2)}$ est connu a priori. Elle s'écrit :

$$F_{2I}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = -i(\omega_1 - \omega_2)\rho \int \int_{S_{co}} \phi_I^{(2)} N_j dS$$

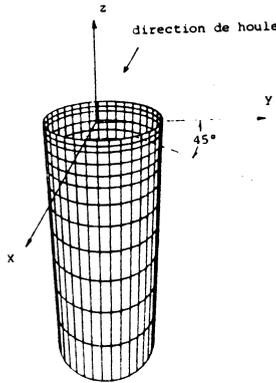
Ici S_{co} désigne la surface moyenne de la carène et N_j la j-ième composante ($j=1,2,..6$) de la normale généralisée sur la carène. La contribution de l'intégrale de Haskind sur la carène est donnée par la formule suivante :

$$F_{2c}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = i(\omega_1 - \omega_2)\rho \int \int_{S_{co}} \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_I^{(2)} - a_C^{(2)} \right) \psi_j dS$$

L'intégrand de cette intégrale sur la carène contient le terme non-homogène $a_C^{(2)}$ qui s'écrit de la façon suivante :

$$a_C^{(2)} = (\vec{V}_{E1} - \nabla\phi_1^{(1)})\mathbf{R}_2^* \cdot \vec{n}_0 + (\vec{V}_{E2}^* - \nabla\phi_2^{(1)*})\mathbf{R}_1 \cdot \vec{n}_0 - (M\vec{o}M_1 \cdot \nabla)\nabla\phi_2^{(1)*} \vec{n}_0 - (M\vec{o}M_2^* \cdot \nabla)\nabla\phi_1^{(1)} \vec{n}_0$$

Dans cette expression, une variable avec un exposant * désigne le conjugué complexe de la variable. Les indices 1 et 2 sont utilisées pour distinguer les variables correspondant aux fréquences ω_1 et ω_2 . $M\vec{o}M$ et \vec{V}_E sont le déplacement et la vitesse d'un point M sur la carène. \mathbf{R} est la matrice de rotation. Ce terme non-homogène contient les dérivées secondes du potentiel du premier-ordre. Avec la solution complète du problème du premier-ordre en utilisant la méthode de singularité de sources seules, le potentiel et ses dérivées premières spatiales sont précisément calculés dans tout le domaine fluide. Par contre, les dérivées secondes du potentiel sont très mal évaluées dans la zone proche du corps à cause d'une singularité provenant de la dérivée seconde de la fonction de Green qu'on ne peut malheureusement pas éliminer. Le tableau ci-dessous présente les résultats du calcul des dérivées secondes spatiales sur la surface d'un cylindre vertical fixe. Ce cylindre vertical de rayon R_0 et de hauteur $H/R_0 = 5$ est discrétisé en 432 facettes. Les résultats numériques sont comparés avec ceux qu'on obtient analytiquement pour un nombre d'onde $K \cdot R_0 = 2.447$. Nous constatons que les dérivées secondes sur la carène ne peuvent pas être obtenues numériquement.



Dérivée seconde	Analytique		Numérique	
	P. r.	P. i.	P. r.	P. i.
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial x \partial x$	1.8825	-0.5567	1.2304	-0.6586
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial x \partial y$	0.5201	-0.0737	0.2654	-0.0165
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial x \partial z$	1.3704	0.4996	0.5213	0.3884
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial y \partial y$	-2.0382	-0.5199	-1.3719	-0.4277
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial y \partial z$	0.2016	0.0483	0.1286	0.0443
$\partial^2 \phi_D^{(1)} / \partial z \partial z$	0.1556	1.0766	0.1415	1.0863

Tableau 1: Evaluation des dérivées secondes point $(x, y, z)/R_0 = (0.994, 0.079, -1.25)$

Afin de surmonter cette difficulté, une identité déduite du théorème de Stokes est développée en faisant l'analyse vectorielle. Cette identité s'écrit sous la forme suivante:

$$\int \int_S (\vec{F} \cdot \nabla) \nabla \phi \cdot \vec{n}_0 dS = \int \int_S [(\nabla \phi \cdot \nabla) \vec{F} + \nabla \phi \cdot \text{div}(\vec{F})] \cdot \vec{n}_0 dS + \oint_{\Gamma} (\nabla \phi \wedge \vec{F}) d\vec{l}$$

En utilisant cette relation de transformation, l'intégrale de Haskind sur la carène contenant les dérivées secondes peut être convertie en une nouvelle intégrale sur la carène et une autre sur la ligne de flottaison dont les intégrands ne contiennent plus les dérivées secondes. Ces intégrales de Haskind sont donc évaluées numériquement et précisément.

Le dernier terme dans l'expression des efforts $F_{2s}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ est la contribution de l'intégrale de Haskind sur la surface libre qui s'écrit de la façon suivante:

$$F_{2s}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = i(\omega_1 - \omega_2) \frac{\rho}{g} \int \int_{z=0} a_{LD}^{(2)} \psi_j dS$$

Dans cette expression, le terme non-homogène sur la surface libre est donné par:

$$\begin{aligned} a_{LD}^{(2)} = & i(\omega_1 - \omega_2) (\nabla\phi_1^{(1)} \cdot \nabla\phi_{P2}^{(1)*} + \nabla\phi_{I2}^{(1)*} \cdot \nabla\phi_{P1}^{(1)}) \\ & - \frac{i\omega_1}{2g} \left[\phi_1^{(1)} \left(-\omega_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_{P2}^{(1)*} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{P2}^{(1)*} \right) + \left(-\omega_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_{I2}^{(1)*} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{I2}^{(1)*} \right) \phi_{P1}^{(1)} \right] \\ & + \frac{i\omega_2}{2g} \left[\phi_2^{(1)*} \left(-\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_{P1}^{(1)} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{P1}^{(1)} \right) + \left(-\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_{I1}^{(1)} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{I1}^{(1)} \right) \phi_{P2}^{(1)*} \right] \end{aligned}$$

Ici $\phi_P^{(1)}$ désigne le potentiel du premier-ordre de perturbation, somme du potentiel de diffraction et de celui de radiation. $\phi^{(1)}$ est le potentiel total du premier-ordre, somme du potentiel de perturbation $\phi_P^{(1)}$ et de celui incident $\phi_I^{(1)}$. Pour évaluer l'intégrale de Haskind sur la surface libre, cette surface non bornée est d'abord divisée en deux zones: une zone intérieure S_{L1} qui est limitée par la ligne de flottaison et une ligne de troncature Γ_e de rayon R_e assez grand, et une zone extérieure S_{L2} comprise entre la ligne de troncature et l'infini.

Nous examinons tout d'abord l'évaluation du potentiel du premier-ordre et de ses dérivées spatiales premières et deuxièmes sur la surface libre après la solution numérique du problème du premier-ordre que nous avons discutée précédemment. Le même cas test d'un cylindre circulaire vertical est choisi. Les résultats de l'évaluation du potentiel de perturbation et de sa dérivée première verticale sont présentés sur les figures ci-dessous. Les points du calcul sont répartis le long d'une ligne au milieu du quadrant xy pour une houle de nombre d'onde $K \cdot R_0 = 1.0$, venant des x négatifs.

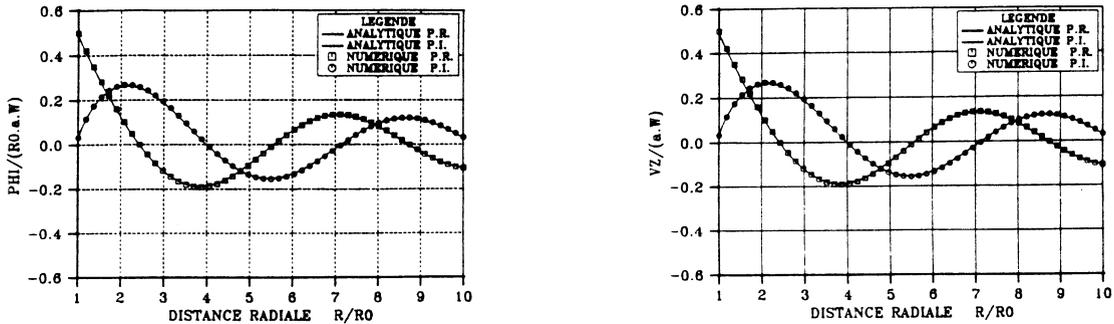


Figure 1 et 2: Evaluation du potentiel et de sa dérivée première sur la surface libre

Les courbes dans les figures ci-dessus sont les résultats analytiques et les points représentent les calculs numériques. Nous constatons que le potentiel et ses dérivées premières sont bien estimés sur la surface libre même pour des points proches du corps. La précision du calcul numérique est excellente aussi bien pour la partie réelle que pour la partie imaginaire.

La dérivée seconde spatiale du potentiel du premier-ordre sur la surface libre est aussi évaluée. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

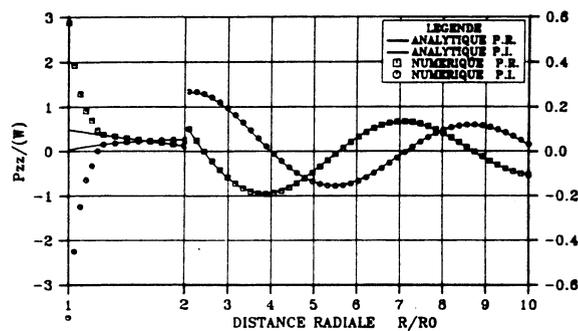


Figure 3. Evaluation de la dérivée seconde sur la surface libre

L'échelle d'une partie de l'abscisse sur cette figure est élargie pour mieux présenter l'évaluation numérique de la dérivée seconde du potentiel pour des points très proches du corps. Nous remarquons que le calcul numérique est de mauvaise précision pour des points proches du corps pour la raison numérique discutée au dernier paragraphe. L'évaluation de l'intégrale de Haskind sur la surface libre est impossible si nous utilisons directement l'expression de l'intégrale. Afin d'éliminer cette obstacle, une deuxième identité de transformation déduite du théorème de Riemann est développée. Elle s'exprime

par:

$$\int \int_S F(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(x, y, z) dS = \int \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x} F \cdot \frac{\partial}{\partial x} G + \frac{\partial}{\partial y} F \cdot \frac{\partial}{\partial y} G \right] dS - \oint_{\Gamma} F \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} G \cdot n_y + \frac{\partial}{\partial x} G \cdot n_x \right] d\Gamma$$

En appliquant cette identité de transformation d'intégrale, l'intégrale de Haskind sur la zone intérieure de la surface libre est transformée en une nouvelle intégrale sur la zone S_{L1} , une intégrale sur la ligne de flottaison et une autre sur la ligne de troncation. Ces intégrales ne contenant plus la dérivée seconde du potentiel verticale sont donc faciles à évaluer numériquement.

Dans la zone extérieure S_{L2} , nous utilisons les expressions asymptotiques du potentiel de perturbation du premier-ordre, dans un repère cylindrique (r, θ, z) . Une expression asymptotique sous la forme du produit d'une série de fonctions en θ et d'une fonction oscillante en r (proportionnelle à \sqrt{r}) peut être obtenue pour $\phi_P^{(1)}$, après un développement de la fonction de Kochin. Nous pouvons donc obtenir une expression pour le terme non-homogène, en introduisant l'expression asymptotique du potentiel de perturbation et celle du potentiel incident obtenue de la même façon. Cette expression asymptotique pour $a_{LD}^{(2)}$ s'écrit:

$$a_{LD}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{K_1 r K_2 r}} \left[B_1(\theta) e^{i(K_1 - K_2)r} + B_2(\theta) e^{i(K_1 + K_2)r} + B_3(\theta) e^{i(-K_1 - K_2)r} \right]$$

Ici K_1 et K_2 sont les nombres d'onde correspondant aux fréquences ω_1 et ω_2 d'une houle bichromatique. $B_i(\theta)$ ($i=1,2,3$) s'écrivent de la façon suivante:

$$B_i(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{i\ell}^C \cos(\ell\theta) + B_{i\ell}^S \sin(\ell\theta) \quad i = 1, 2, 3$$

Les constantes $B_{i\ell}^C$ et $B_{i\ell}^S$ sont déterminées par la solution complète du problème du premier-ordre. De même une expression pour le potentiel additionnel de radiation est donnée par:

$$\psi_j = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} R_{j\ell}^C \cos(\ell\theta) + R_{j\ell}^S \sin(\ell\theta) \right]$$

Le nombre d'onde ici est déterminé par la relation suivante:

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 = gk \cdot \tanh(kH)$$

où H est la profondeur d'eau.

Avec ces expressions, l'intégrale sur la zone extérieure de la surface libre peut être exprimée par:

$$F_{2s}^{(2)} = i(\omega_1 - \omega_2) \frac{\rho}{g} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_e}^{\infty} a_{LD}^{(2)} \cdot \psi_j \cdot r dr = \sum_{i=1}^3 I_{\theta i} \cdot I_{r i}$$

Cette intégrale sur une surface est ainsi séparée en intégrant en direction circonférencielle θ et en direction radiale r . En tenant compte de la propriété d'orthogonalité du produit de deux séries, l'intégrale en θ est calculée par:

$$I_{\theta i} = \int_0^{2\pi} B_i(\theta) \cdot R_j(\theta) d\theta = 2\pi \left[B_{i0}^C R_{j0}^C + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (B_{i\ell}^C R_{j\ell}^C + B_{i\ell}^S R_{j\ell}^S) \right]$$

et l'intégrale en direction radiale peut être obtenue facilement en utilisant les résultats de l'intégrale de Fresnel.

L'intégrale de Haskind sur la surface libre est ainsi évaluée en deux parties: celle sur la zone intérieure et celle sur la zone extérieure. Le choix du rayon de la ligne de troncation R_e dépend fortement de la convergence de l'intégrale. C'est-à-dire que le rayon de troncation doit être suffisamment grand pour que les expressions asymptotiques soient proches des valeurs exactes. L'examen de l'intégrale est donc nécessaire pour déterminer la distance de troncation. La figure 4 présente la convergence de

l'intégrale sur la surface libre dans un cas d'une houle bichromatique, pour le cylindre vertical. Le rayon de troncature sur la surface libre est porté en abscisse. Les courbes oscillant avec l'amplitude la plus grande résultent de l'intégrale sur la zone intérieure sans ajout de la partie sur la zone extérieure. Les courbes convergeant plus vite résultent de l'intégrale sur la zone intérieure à laquelle sont ajoutés les résultats asymptotiques de l'intégrale sur la zone extérieure. Ces résultats montrent que l'intégrale sur la surface libre oscille avec la distance de troncature et que cette oscillation s'amortit beaucoup plus vite en ajoutant le terme asymptotique provenant de l'intégration analytique de la troncature à l'infini. Nous remarquons aussi que la valeur d'intégration tend vers la moyenne des oscillations et que la convergence est bonne à partir de trois longueurs d'onde composées définies par:

$$\lambda_c = 2\pi / (K_1 - K_2 + k)$$

Cette longueur d'onde désigne en effet un des termes dans l'expression asymptotique du terme non-homogène $a_{LD}^{(2)}$.

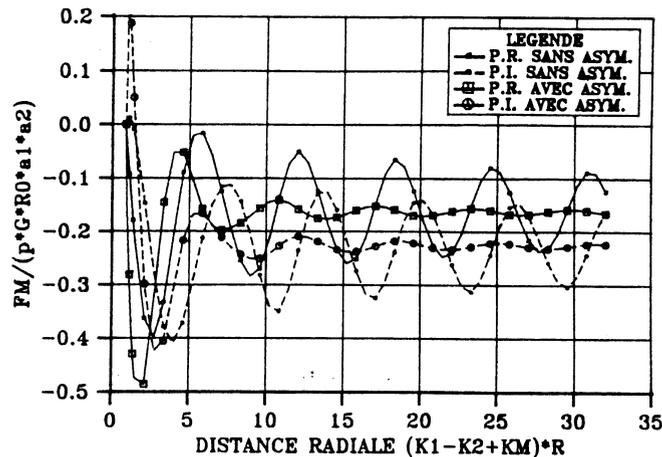


Figure 4. Convergence de l'intégrale sur la surface libre
Fréquences $\omega_1 = 3.25$ et $\omega_2 = 2.00$

L'évaluation numérique de l'intégrale sur la surface libre s'effectue jusqu'à cinq longueurs d'onde composées, en utilisant une méthode de quadrature classique. La zone intérieure est discrétisée en 10 points par longueur d'onde et 36 points dans la direction circulaire. La comparaison des résultats numériques est présentée sur la figure 5. Sur cette figure, la courbe est le module de l'intégrale exacte (analytique) en fonction de la distance de troncature et les points sont les résultats numériques. On remarque que l'intégrale numérique tend vers la même valeur que celle calculée analytiquement à une distance radiale égale à 3 longueurs d'onde composées.

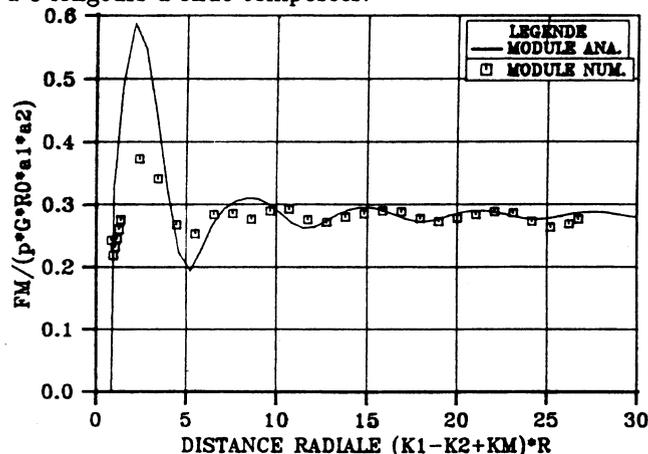


Figure 5. Comparaison des intégrales analytique et numérique sur la surface libre
Fréquences $\omega_1 = 3.25$ et $\omega_2 = 2.00$

Pour assurer la précision du calcul, la valeur moyenne des calculs de l'intégrale pour le rayon de troncature entre 4 et 5 longueurs d'onde composées est prise comme valeur de l'intégrale finale. Cette procédure d'intégration numérique, d'après les résultats obtenus, donne moins de 5 % d'erreur en comparaison avec la valeur exacte (analytique).

III. APPROXIMATIONS

La première approximation pour l'évaluation des efforts de basse fréquence a été proposée par Newman en 1974. Elle suppose que la différence des fréquences d'une houle bichromatique est très petite par rapport à leur somme. Dans ce cas, la deuxième partie des efforts (contribution du potentiel du second-ordre) tend vers zéro et les efforts de basse fréquence peuvent être exprimés par les efforts de dérive de fréquence moyenne. Nous écrivons:

$$F^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_1^{(2)}(\omega_{12}, -\omega_{12}) \quad \omega_{12} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

en supposant:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

L'intérêt de cette approximation est que seuls les efforts de dérive en houle régulière sont à évaluer. Elle permet de diminuer sensiblement le temps du calcul, dans le cas où un grand nombre de fréquences est à considérer (houle irrégulière). En contrepartie, la validité de l'approximation est limitée en raison de la contrainte sur les fréquences de houle.

Bowers (1976) a proposé une approximation de type Froude-Krylov, qui ne tient compte que de la contribution du potentiel de la houle incidente. Cette approximation peut s'écrire par:

$$F^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_{2I}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$$

Le potentiel de perturbation dû à la présence du corps est ainsi négligé, ce qui n'est apparemment raisonnable que pour des corps de petite dimension.

Pour la contribution du potentiel du second-ordre, Pinkster (1980) a développé une formulation qui consiste à calculer un coefficient de "gravité", en analysant les expressions du potentiel du second-ordre de la houle incidente. Cette approximation peut être écrite par:

$$F^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + f_{12} \cdot F^{(1)}(\omega_{12}) \quad \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$$

Ici $F^{(1)}(\omega)$ désigne les efforts du premier-ordre de même fréquence basse et f_{12} le coefficient en fonction des fréquences ω_1 et ω_2 . De nouveau, l'hypothèse de petite contribution due à la perturbation du corps entraîne que l'approximation n'est valable que pour des fréquences très basses.

Benschop (1985) a évalué quasi-analytiquement l'intégrale de Haskind sur la surface libre et montré que cette contribution est négligeable devant la première partie des efforts et l'intégrale de Haskind sur la carène. Il a donc approximé la contribution du potentiel du second-ordre par l'intégrale de Haskind sur la carène seule. Elle s'écrit par:

$$F^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) = F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_{2I}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) + F_{2c}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$$

Mais il a seulement considéré le cas d'une structure fixe. L'évaluation de l'intégrale de Haskind sur la surface libre sans tenir compte des mouvements du corps ne peut pas conduire à des conclusions générales.

IV. RESULTATS NUMERIQUES

Les développements numériques décrits dans le paragraphe II et les approximations rappelées au dernier paragraphe sont utilisés dans le cas d'une sphère à moitié immergée, flottant à la surface libre. Cet exemple d'une sphère est souvent choisi comme cas test des modèles numériques parce que c'est un flotteur de carène géométriquement simple. Une raideur horizontale (0.1265×10^6 N/M pour une

sphère de rayon $R_0=10$ M) est ajoutée pour qu'elle puisse avoir une réponse résonante de fréquence basse ($\omega_R=0.2$ Hz). La surface immergée de la sphère est représentée par 400 facettes au total (voir figure 6 ci-dessous).

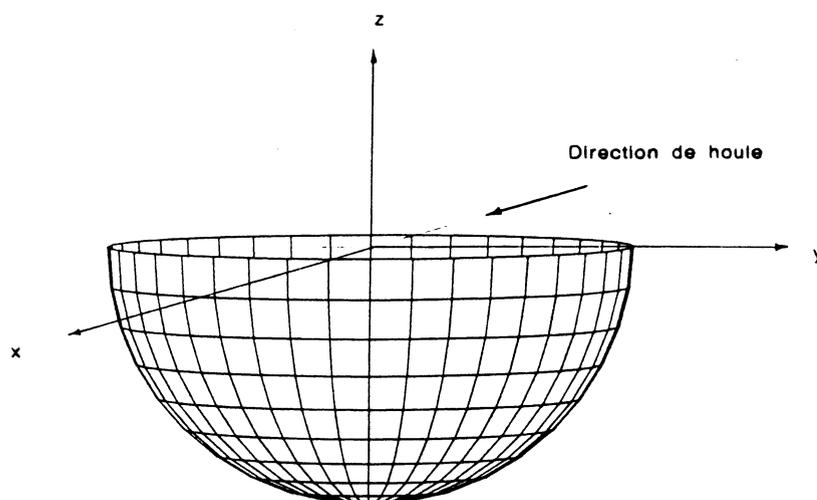


Figure 6. Discretisation d'une sphère à moitié immergée

Cette discrétisation nous permet d'évaluer numériquement le problème du premier-ordre avec un nombre d'onde allant jusqu'à $K \cdot R_0=4$ (la dimension de facette ne dépasse pas $1/6$ de longueur d'onde de la houle) et le problème du second-ordre avec un nombre d'onde allant jusqu'à $K \cdot R_0=2$ (la dimension de facette n'est pas plus grande que $1/15$ de longueur d'onde). Ces critères sont appliqués afin d'assurer la précision du calcul numérique.

Le problème complet du premier-ordre est évalué en utilisant la méthode de singularités de sources seules. Les efforts d'excitation hydrodynamiques et les mouvements du corps sont obtenus pour une houle régulière, en profondeur infinie. La figure 7 présente la réponse horizontale de la sphère soumise à une houle régulière.

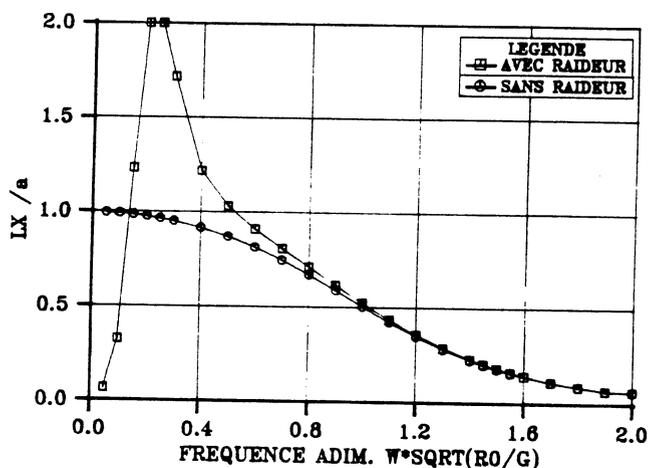


Figure 7. Réponse horizontale de la sphère

La courbe avec des marqueurs ronds correspond à la réponse de la sphère flottant librement sous l'action de la houle et la courbe avec des marqueurs carrés représente la réponse de la sphère contrainte par la raideur. Une réponse résonnante apparaît à la fréquence de 0.2 Hz. La solution du premier-ordre de ce modèle résonant sera utilisé dans la suite des calculs des efforts du second-ordre.

Dans le paragraphe II, nous avons défini la première et la deuxième parties des efforts du second-ordre. Les contributions provenant des quantités du premier-ordre constituent la première partie des

efforts. Cette partie des efforts est présentée sur les figures 8 et 9. La figure 8 présente la partie réelle des efforts adimensionnels de basse fréquence. L'abscisse est le nombre d'onde sans dimension défini par:

$$K_P \cdot R_0 = \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \right]^2 \cdot R_0/g$$

Les différences $(\omega_1 - \omega_2)$ des fréquences de la houle bichromatique varient de 0.00 à 0.40 Hz. La courbe $\omega_M = 0$ représente les efforts de dérive. Les autres courbes donnent les efforts de fréquence basse non-nulle.

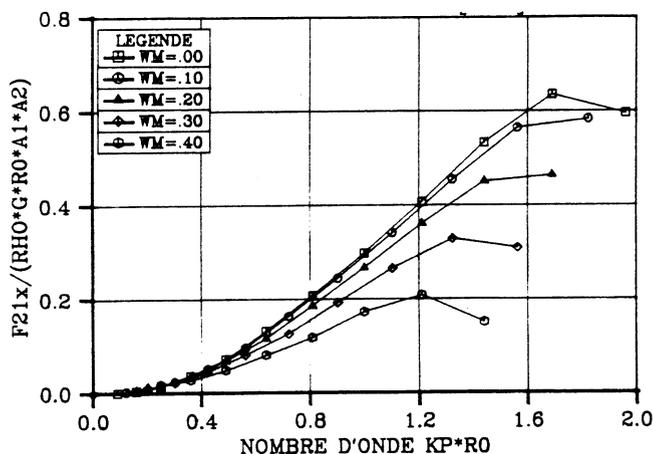


Figure 8. Partie réelle des efforts $F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$

Ces résultats montrent que la partie réelle des efforts diminue quand la différence des fréquences augmente.

La figure 9 présente la partie imaginaire des efforts du second-ordre. Comme les efforts de dérive sont constants, la partie imaginaire de ces efforts constants est bien nulle. Quand la différence des fréquences augmente, les efforts du second-ordre croissent également. Cela signifie que le déphasage des efforts de basse fréquence par rapport à la houle incidente augmente à partir de zéro (la déphasage des efforts de dérive étant zéro).

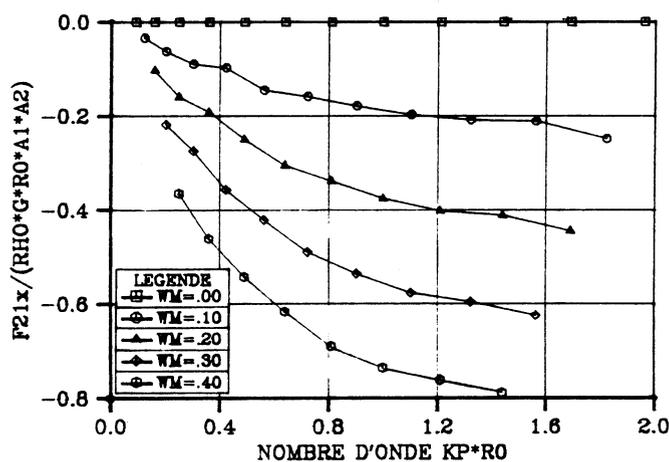


Figure 9. Partie imaginaire des efforts $F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$

La deuxième partie des efforts du second-ordre comprend trois contributions. La contribution du potentiel incident $F_{2I}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ est présentée sur la figure 10. Cette contribution est obtenue en

intégrant la pression due au potentiel incident du second-ordre, dont la partie réelle est nulle, sur la carène. La figure montre que les efforts augmentent fortement quand la différence des fréquences croît. Il est intéressant de noter que cette contribution est de signe inverse par rapport à la partie imaginaire des efforts $F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$.

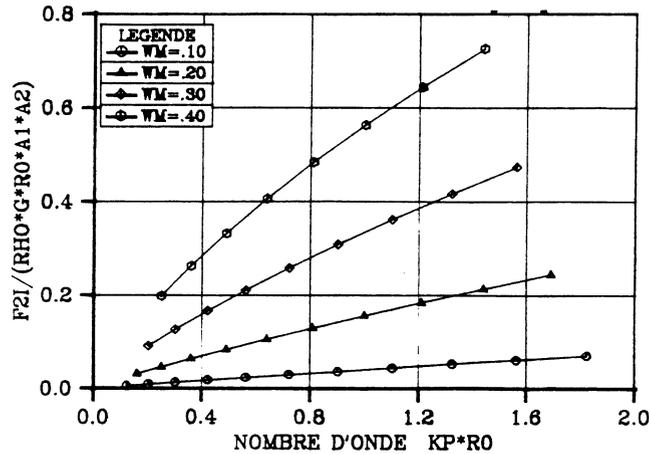


Figure 10. Contribution du potentiel incident

La contribution de l'intégrale de Haskind sur la carène $F_{2c}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ est représentée sur les figures 11 et 12. Cette intégrale, comme nous l'avons développé dans le paragraphe II, est calculée après une transformation d'intégrale qui consiste à évaluer une nouvelle intégrale sur la carène et une intégrale sur la ligne de flottaison, afin de faire disparaître les dérivées secondes du potentiel du premier-ordre qui ne peuvent pas être obtenues numériquement sur la carène.

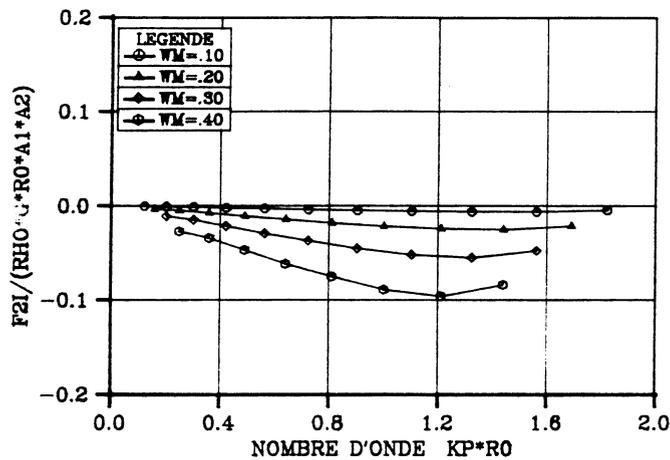


Figure 11. Partie réelle de l'intégrale de Haskind sur la carène

La partie réelle est présentée sur la figure 11. Les efforts sont relativement petits par rapport à la première partie des efforts $F_1^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ mais non-négligeables. La figure 12 présente la partie imaginaire de cette contribution. Les signes des efforts varient de négatif à positif quand les fréquences de houle augmentent.

Enfin l'intégrale de Haskind sur la surface libre $F_{2s}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ est une contribution délicate du fait que beaucoup d'efforts ont été consacrés à son évaluation. Cette contribution comprend une intégrale numérique sur la zone intérieure proche de la carène et le reste de la troncature à l'infini calculé analytiquement. L'intégrale sur la zone intérieure est transformée de façon à ne plus contenir de dérivées

secondes du potentiel du premier-ordre par rapport à l'axe z. Cette procédure d'évaluation prend environ 15 minutes de CPU sur Vax8700 pour une fréquence de calcul, soit relativement plus de temps que la solution du premier-ordre (5 minutes CPU).

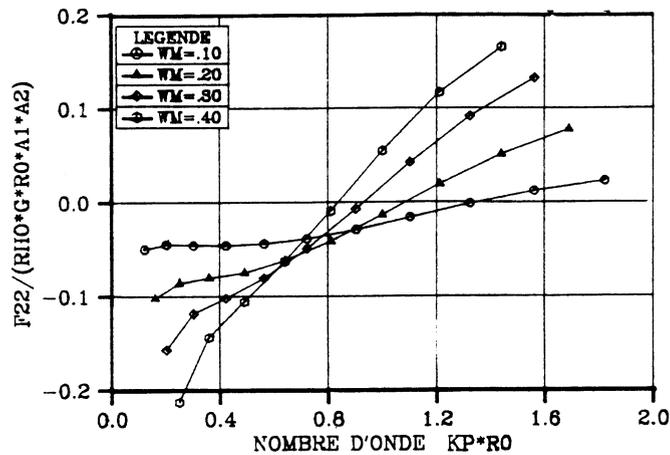


Figure 12. Partie imaginaire de l'intégrale de Haskind sur la carène

La figure 13 présente la partie réelle de cette contribution provenant de l'intégrale sur la surface libre. Les efforts sont relativement petits surtout dans la région où les fréquences de la houle incidente sont petites.

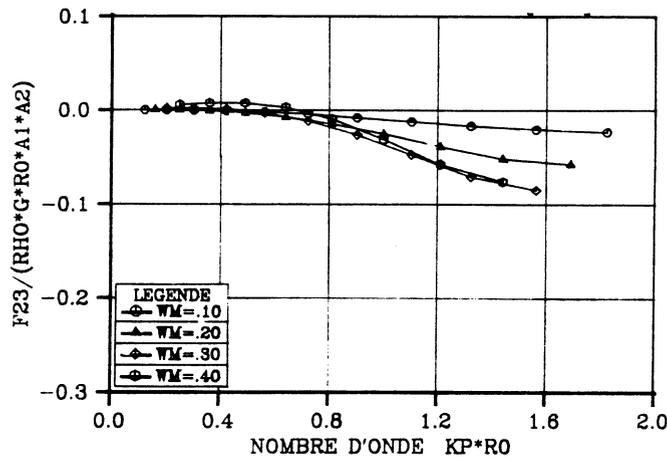


Figure 13. Partie réelle de l'intégrale de Haskind sur la surface libre

La partie imaginaire des efforts est présentée sur la figure 14 de la page suivante. Les efforts croissent rapidement avec la différence des fréquences. La contribution est loin d'être négligeable.

Les figures 15 et 16 présentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire des efforts complets du second-ordre. En comparant toutes les contributions avec les efforts totaux du second-ordre, nous remarquons que la première partie des efforts prend une grande place dans la partie réelle des efforts. Par contre, la partie imaginaire est constituée de tous les termes dans l'expression des efforts du second-ordre. Si on néglige une partie (la deuxième partie, par exemple) des efforts, le résultat n'est certainement pas complet. Si on néglige même la contribution de l'intégrale sur la surface libre, de faux résultats peuvent être induits puisque cette contribution représente au moins 10 pour cent des efforts totaux.

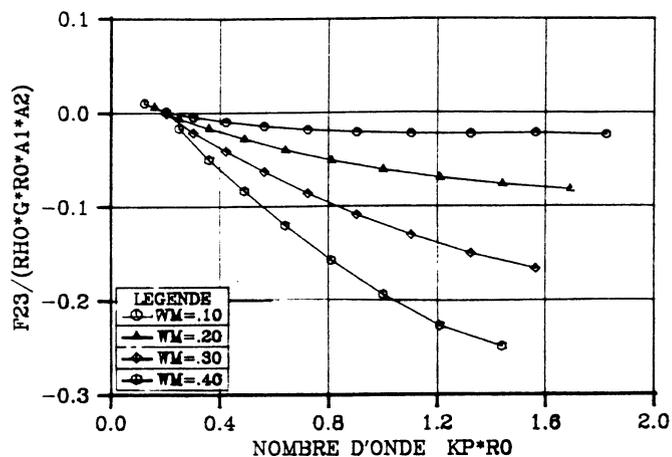


Figure 14. Partie imaginaire de l'intégrale de Haskind sur la surface libre

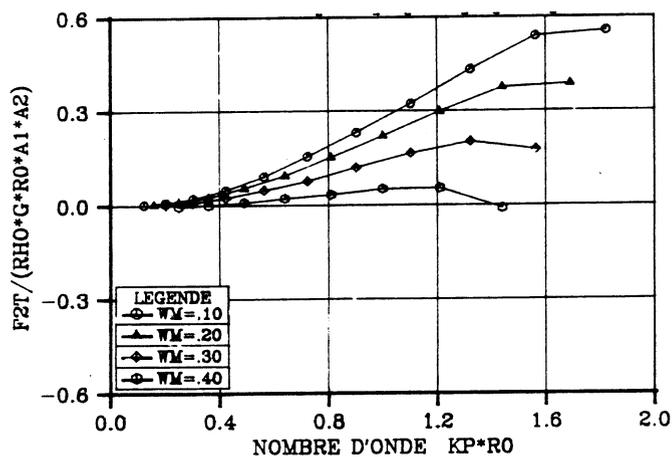


Figure 15. Partie réelle des efforts totaux du second ordre

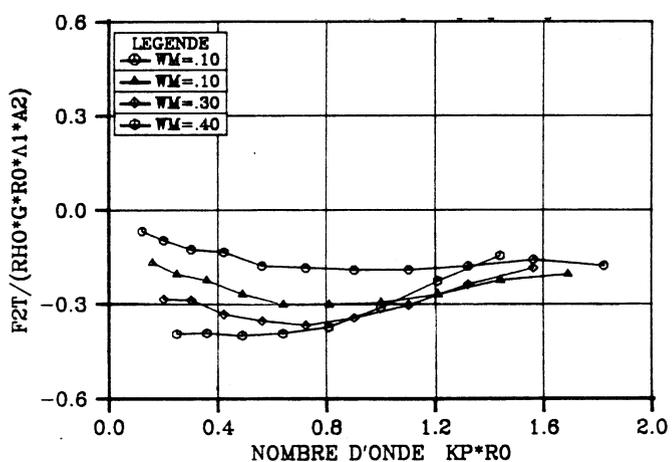


Figure 16. Partie imaginaire des efforts totaux du second ordre

La comparaison de différentes approximations que nous avons rappelées au paragraphe III a été effectuée après avoir évalué les efforts complets du second ordre. Les figures 17 et 18 présentent la comparaison pour une fréquence basse de 0.10 Hz. Pour la partie réelle (figure 17), les approximations sont voisines. Elles ne sont pas loin des valeurs exactes pour des fréquences petites, et même pour des fréquences plus grandes l'erreur des différences est tolérable.

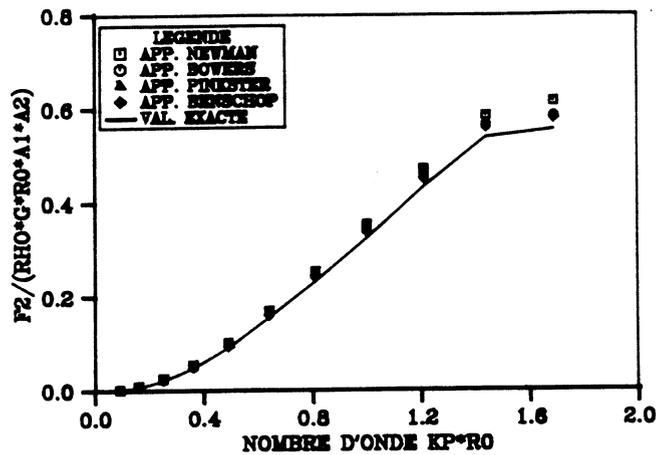


Figure 17. Comparaison de différentes approximations
Partie réelle des efforts ($\omega_1 - \omega_2 = 0.1$)

Pour la partie imaginaire des efforts du second ordre présentée sur la figure 18, la même remarque que pour la partie réelle peut être formulée. Mais l'approximation de Newman est nulle à cause de la méthode qui remplace les efforts de basse fréquence par les efforts de dérive constants (partie imaginaire nulle).

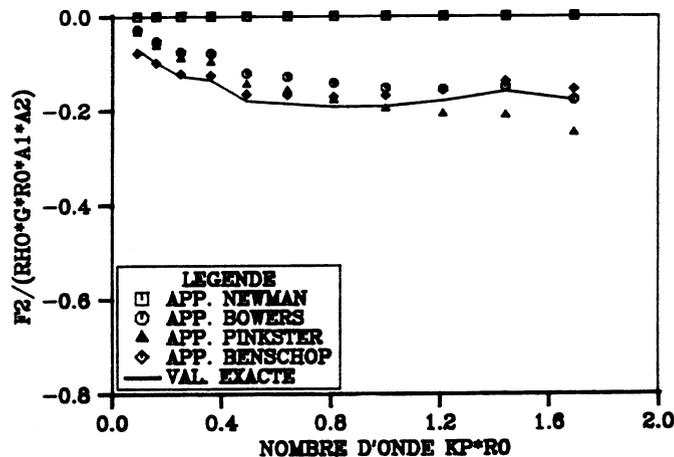


Figure 18. Comparaison de différentes approximations
Partie imaginaire des efforts ($\omega_1 - \omega_2 = 0.1$)

La comparaison pour une fréquence basse de $(\omega_1 - \omega_2) = 0.2$ est présentée sur les figures 19 et 20 de la page suivante. Pour la partie réelle des efforts, les approximations surestiment les valeurs exactes, surtout celle de Newman qui croît plus vite avec la fréquence de la houle incidente. De même pour la partie imaginaire des efforts, les différences sont appréciables. Les approximations de Bowers et de Benschop varient de la même façon que la valeur exacte mais des différences sont obtenues à cause de termes manquants dans ces approximations. L'approximation de Pinkster est bien vérifiée pour les

fréquences petites mais elle surestime les efforts pour les fréquences plus grandes.

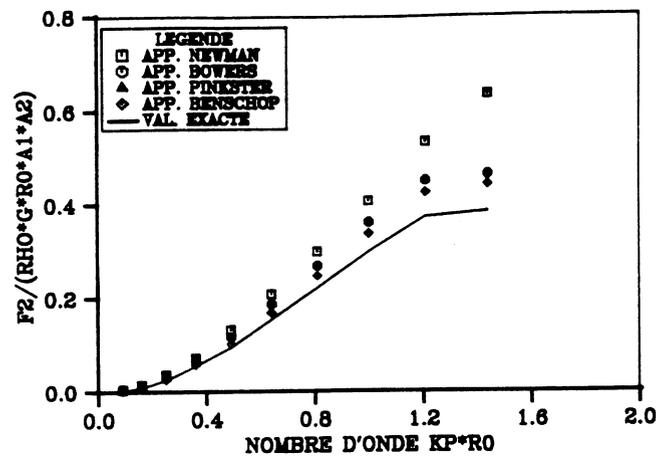


Figure 19. Comparaison de différentes approximations
Partie réelle des efforts ($\omega_1 - \omega_2 = 0.2$)

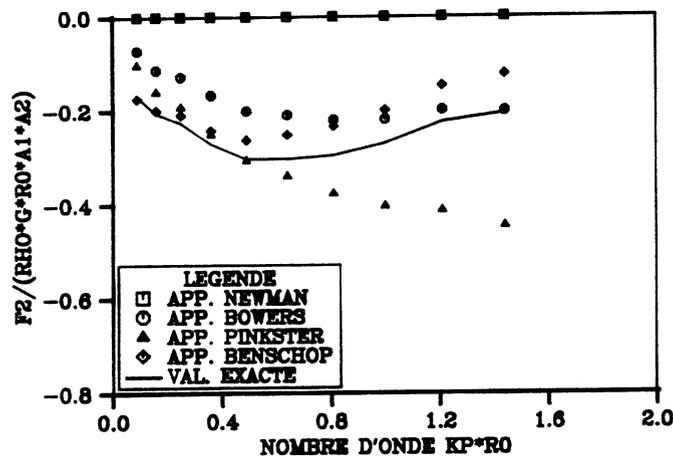


Figure 20. Comparaison de différentes approximations
Partie imaginaire des efforts ($\omega_1 - \omega_2 = 0.2$)

V. CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode numérique pour évaluer les efforts complets du second-ordre, sans approximation, pour un corps tridimensionnel de géométrie quelconque. Les principales difficultés numériques – évaluation des dérivées secondes du potentiel du premier-ordre et intégrale oscillante sur la surface libre – sont bien surmontées en utilisant les théorèmes de Stokes et de Riemann et en ajoutant la partie d'intégration analytique sur la surface libre à partir de la troncature jusqu'à l'infini. Différentes contributions aux efforts du second-ordre sont évaluées et analysées. La comparaison des résultats numériques des approximations proposées par divers auteurs et de la méthode exacte nous permet de remarquer, dans le cas de la sphère à moitié immergée, que les approximations ne sont valables que pour une fréquence basse très petite.

Des résultats numériques effectués pour la plate-forme ITTC par Chen (1988) montrent que la contribution du potentiel du second-ordre est négligeable. Ceci indique que l'importance des différentes

contributions aux efforts du second-ordre dépend de la géométrie du corps. Il sera donc très intéressant de faire des calculs, en utilisant la méthode présentée, pour une structure plus réaliste comme une plateforme semi-submersible afin d'analyser les différentes approximations et de trouver une méthode rapide et valable pour des problèmes pratiques.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Messieurs Molin de l'IFP, Clément et Ferrant du LHN de l'ENSM où cette étude a été effectuée. Leurs discussions et commentaires sur ce sujet ont été précieux et appréciés. Et la tolérance du Directeur de LHN (qu'il veuille bien trouver le témoignage de ma sincère reconnaissance) m'a permis de travailler, sans tenir compte du CPU du calcul, sur Vax8700.

REFERENCES

- Molin, B.** 1979 "Second order diffraction loads upon three-dimensional bodies." Applied Ocean Research. Vol:1 No:4 pp197-202
- Newman, J.N.** 1974 "Second-order, slowly-varying forces on vessels in irregular waves." Proceedings of International Symposium on the dynamics of marine vehicles and Structures in Waves pp193-197
- Bowers, E.C.** 1976 "Long-period oscillations of moored ships subject to short-wave seas." Transaction of the Royal Institution of Naval Architects, Vol:118 pp181-191 London
- Pinkster, J.A.** 1980 "Low frequency second-order wave exciting forces en a floating body." NSMB publication No:650
- Beschop, A., Hermans, A.J. and Huijsmans, R.H.M.** 1987 "Second-order diffraction forces on a ship in irregular waves." Applied Ocean Research Vol:9, No:2, pp96-103
- Matsui, T.** 1985 "Analysis of slowly varying wave drift forces on compliant structures." Proc. of 5th Int'l Symp. Offsh. Mech. Arc. Engng. pp289-296
- Chen, X.B.** 1988 "Etude des réponses du second-ordre d'une structure soumise à une houle aléatoire." Thèse de Doctorat, ENSM de Nantes
- Boudet, L.** 1988 "Etude numérique et expérimentale du problème de diffraction de deuxième ordre." Rapport de DEA, ENSM de Nantes
- Kim, M.H. and Yue, D.K.P.** 1988 "The complete second-order diffracted waves around an axisymmetric body." Rapport de MIT