

2èmes JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

13 au 15 Février 1989 - Nantes

Diffraction du second ordre sur un cylindre vertical Résultats numériques et expérimentaux

Loïc BOUDET *
Yves-Marie SCOLAN **

* *Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes*

** *Institut Français du Pétrole*

RESUME

Nous décrivons dans cet article une méthode de résolution du problème de diffraction du second ordre. Le cadre théorique a été élaboré par B.Molin (1987). Pour valider nos résultats nous faisons référence aux méthodes semi-analytiques de calcul des efforts du second ordre sur un cylindre d'axe vertical ainsi qu'aux résultats expérimentaux obtenus par L.Boudet (1988).

ABSTRACT

We describe a method to solve the second order diffraction problem around a vertical cylinder. The theoretical frame was elaborated by B.Molin (1987). The validity of the results is obtained thanks to the semi-analytical calculation of the second order forces on a vertical cylinder, and experimental results of L.Boudet as well.

INTRODUCTION

L'intérêt de cette étude est lié à la conception de plates-formes semisubmersibles ou à lignes tendues. Ces structures sont formées de cylindres verticaux, en général de section circulaire, surmontant des pontons. Des essais en bassin ont fait apparaître, pour certaines valeurs de la période de l'onde excitatrice et pour une géométrie donnée une sur-élévation importante de la surface libre. Il est donc important de modéliser correctement la cinématique de l'écoulement autour des cylindres afin, notamment, de positionner le pont de ces structures.

Actuellement, les modèles capables de simuler complètement le comportement hydrodynamique de ces structures sont basés sur une théorie linéaire du problème de Diffraction / Radiation – les réponses d'un flotteur à la houle (efforts et mouvements) sont proportionnelles, pour une pulsation donnée ω , à l'excitation avec un certain déphasage. Les hypothèses faites sont assez restrictives, mais elles permettent d'appréhender correctement les phénomènes ; on vérifie, par des essais en bassin, la validité de ces modèles.

Cependant, un certain nombre de phénomènes ne sont pas modélisables à partir d'une telle théorie. Aussi l'extension du problème au deuxième ordre d'approximation permettra d'avoir accès aux efforts proportionnels au carré de l'amplitude de l'onde excitatrice et pour les pulsations 0 et 2ω .

Les hypothèses de fluide parfait et écoulement irrotationnel permettent de nous placer dans le cadre d'une théorie potentielle. L'hypothèse de faible perturbation (amplitude de la houle faible devant la taille du corps) permet de résoudre le problème dans un domaine fixe. On développe en outre le potentiel des vitesses et l'élévation de la surface libre en série de perturbation d'un petit paramètre qui s'identifie "naturellement" à la cambrure de la houle. Les problèmes ainsi établis sont résolus successivement par la seule donnée des solutions des problèmes d'ordres plus faibles.

Lors de l'établissement des équations du problème au second ordre, on constate que la complexité du second membre de la condition de surface libre ne permet plus de calculer simplement la fonction de Green qui vérifie cette condition ainsi qu'une condition de radiation à l'infini. La méthode proposée par B.Molin, consiste en la recherche du comportement asymptotique du potentiel de diffraction du 2nd ordre. On met alors en évidence deux types de solutions. La première est liée au système d'onde du premier ordre (onde liée). La deuxième est une onde pour laquelle on peut définir une condition de dispersion linéaire (onde libre). On peut alors appliquer une condition de type Sommerfeld à cette dernière composante, ou encore la décomposer sur la base de fonctions propres et considérer ses coefficients comme de nouvelles inconnues du problème.

Comme application, on considère dans cet article le cas d'un cylindre vertical soumis à une houle régulière. Une extension possible à l'étude de plusieurs cylindres est envisageable puisqu'on dispose d'une méthode semi-analytique de calcul, en théorie linéaire, de l'écoulement prenant en compte l'interaction entre les cylindres (Mc Iver et DV Evans 1984).

NOTATION

Soit $R(o, x, y, z)$ un repère fixe, le plan (o, x, y) est horizontal et l'axe oz vertical ascendant. La structure est formée d'un cylindre vertical (C) de rayon a reposant sur le fond. La surface libre correspond au plan $z = 0$ et le fond a pour équation $z = -h$. On repère un point par ses coordonnées polaires (r, θ) où θ est mesuré à partir de l'axe (o, x)

Le domaine de calcul est délimité par :

- la surface libre (Sl)
- la surface du cylindre (C)
- la surface de contrôle (Σ) de rayon R
- la surface du fond (F)

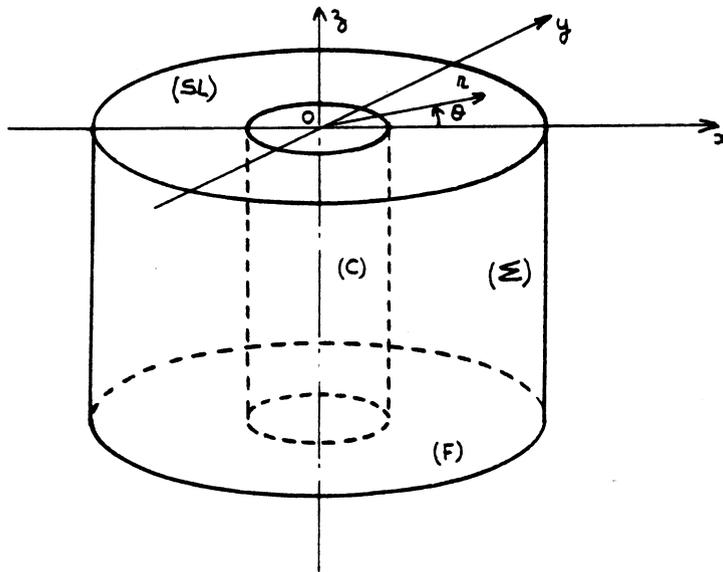


figure 1 : description du domaine de calcul

On adopte les notations suivantes : $\Phi^{(k)} = \text{Re}(\phi^{(k)} e^{-ik\omega t})$ pour $k = 1, 2$
 La houle incidente se propage suivant la direction des x positifs.
 On rappelle l'expression des différents potentiels utilisés :

- $\Phi^{(1)}$: potentiel total du 1^{er} ordre
- $\Phi_I^{(1)}$: potentiel incident du 1^{er} ordre

$$\Phi_I^{(1)} = -\frac{ag \, chk(z+h)}{\omega \, chkh} \text{Re}(I e^{-i\omega t}) \quad \text{avec} \quad I = e^{ikr \cos \theta} \quad (1)$$

- $\Phi_D^{(1)}$: potentiel de diffraction du 1^{er} ordre

$$\Phi_D^{(1)} = -\frac{ag}{\omega} \frac{chk(z+h)}{chkh} \text{Re}(De^{-i\omega t}) \quad (2)$$

$$\text{avec } D = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \varepsilon_n i^n H_n(kr) \cos n\theta \quad \text{et} \quad A_n = -\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} \quad (3)$$

où $J(\cdot)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et $H(\cdot)$ la fonction de Hankel ($H(\cdot) = J(\cdot) + iY(\cdot)$).

- $\Phi^{(2)}$: potentiel total du 2nd ordre
- $\Phi_I^{(2)}$: potentiel incident du 2nd ordre

$$\Phi_I^{(2)} = -\frac{3}{8} a^2 \omega \frac{ch2k(z+h)}{sh^4kh} \text{Re}(ie^{2ikr \cos \theta} e^{-2i\omega t}) - \frac{a^2 gkt}{2sh(2kh)} \quad (4)$$

Cette solution est obtenue en résolvant le problème au 2nd ordre en absence de toute perturbation due au corps ; l'adjonction d'un terme linéaire en t est nécessaire pour que la moyenne temporelle de l'élévation de surface libre du 2nd ordre $\eta^{(2)}$ soit nulle.

- $\Phi_D^{(2)}$: potentiel de diffraction du 2nd ordre

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL DE DIFFRACTION DU 2nd ORDRE

On rappelle tout d'abord les équations du problème au second ordre.

Condition de continuité dans le fluide : $\Delta \Phi^{(2)} = 0 \quad (5)$

Condition de surface libre :

$$\Phi_{,tt}^{(2)} + \Phi_{,z}^{(2)} = \frac{1}{g} \Phi_{,t}^{(1)} (\Phi_{,tt}^{(1)} + g\Phi_{,z}^{(1)})_{,z} - ((\nabla \Phi^{(1)})^2)_{,t} \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (6)$$

Condition de glissement sur le cylindre : $\Phi_{,n}^{(2)} = 0 \text{ en } r = a \quad (7)$

Condition sur le fond : $\Phi_{D,n}^{(2)} = 0 \text{ en } z = -h \quad (8)$

Condition de radiation : $\text{Rad}(\Phi^{(2)} - \Phi_I^{(2)}) = 0 \quad (9)$

On rappelle les résultats de B.Molin sur la décomposition du potentiel de diffraction $\Phi_D^{(2)}$ en ondes liées et libres loin du corps.

Les ondes liées sont des solutions asymptotiques du problème constitué des équations (5),(6) et (8) (on développe le second membre de (6) jusqu'en $O(\frac{1}{kr})$).

$$\phi^{liee} = \frac{ia^2 gk^2}{\omega} \left\{ \frac{3th^2kh - 1 - 2 \cos \theta}{\Omega th \Omega h - \frac{4\omega^2}{g}} \right\} F(\theta) \frac{ch\Omega(z+h)}{ch\Omega h} \frac{e^{ikr(1+\cos \theta)}}{\sqrt{kr}}$$

$$+\frac{3}{8}ia^2\omega F^2(\theta)\frac{ch2k(z+h)e^{2ikr}}{sh^4khkr}+O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right) \quad (10)$$

$$\text{avec } \Omega = k\sqrt{2(1+\cos\theta)} \text{ et } F(\theta) = \frac{(1-i)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \varepsilon_n \cos n\theta \quad (11)$$

Le premier terme correspond à l'interaction de l'onde incidente avec l'onde plane équivalente au potentiel de diffraction, l'onde résultante se propage dans la direction médiane. Le deuxième terme correspond à l'interaction de l'onde de diffraction avec elle-même.

Les ondes libres sont également solutions du problème constitué des équations (5),(6) et (8), mais dans ce cas le second membre de la condition de surface libre est nul, et de plus elles vérifient la condition de radiation de la théorie linéaire (pulsation double : 2ω)

Il est alors possible d'écrire ces ondes libres sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi^{libre} = & \frac{chk_{20}(z+h)}{chk_{20}h} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{m0}^{(2)} i^m H_m(k_{20}r) \cos m\theta \\ & + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\cos k_{2i}(z+h)}{\cos k_{2i}h} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mi}^{(2)} K_m(k_{2i}r) \cos m\theta \end{aligned} \quad (12)$$

k_{20} est solution de l'équation : $\frac{4\omega^2}{g} = k_{20}th(k_{20}h)$ et

les k_{2i} sont solutions de l'équation : $\frac{4\omega^2}{g} = -k_{2i}tg(k_{2i}h)$

LE PROBLEME AUX LIMITES POUR LE POTENTIEL DE DIFFRACTION DU 2nd ORDRE

Le potentiel de diffraction du 2nd ordre vérifie les équations suivantes :

Condition de continuité dans le fluide : $\Delta\phi_D^{(2)} = 0$ (13)

Condition de surface libre : $\phi_{D,z}^{(2)} - \frac{4\omega^2}{g}\phi_D^{(2)} = \frac{\alpha}{g}$ en $z = 0$ (14)

avec

$$\frac{\alpha}{a^2\omega^3} = i\left(1 - \frac{1}{2sh^2kh}\right)\{D^2 + 2ID\} + \frac{i}{k^2th^2kh}\left\{2I_{,r}D_{,r} + \frac{2}{r^2}I_{,\theta}D_{,\theta} + D_{,r}^2 + \frac{1}{r^2}D_{,\theta}^2\right\} \quad (15)$$

Condition de glissement sur le cylindre : $\phi_{D,n}^{(2)} = -(\phi_{I,n}^{(2)})_{r=a}$ (16)

Condition sur le fond : $\phi_{D,n}^{(2)} = 0$ en $z = -h$ (17)

Condition de radiation : 2 méthodes ont été envisagées successivement :

1) On affiche une condition de type Sommerfeld à distance finie R pour les ondes libres : $\phi^{libre} = \phi_D^{(2)} - \phi^{liee}$

$$\phi_{D,r}^{(2)} = ik_{20}\phi_D^{(2)} + \phi_{,r}^{liee} - ik_{20}\phi^{liee} \quad \text{en} \quad r = R \quad (18)$$

2) La deuxième méthode s'inspire des travaux de Clément (Thèse 1979) sur le problème de diffraction-radiation en théorie linéaire. Le principe est de définir le comportement asymptotique du potentiel de perturbation sur une surface cylindrique de grande dimension entourant le corps. On en déduit alors une décomposition du potentiel sur une base de fonctions propres dont les coefficients constituent de nouvelles inconnues du problème.

L'extension de cette méthode au problème du second ordre est tout à fait envisageable compte tenu des résultats de B.Molin et de la décomposition qui est faite de ϕ^{libre} (Cf eq.(12)).

Ainsi on raccorde les dérivées normales par la relation :

$$\phi_{D,r}^{(2)} = \phi_{,r}^{libre} + \phi_{,r}^{liee} \quad (19)$$

Les coefficients $A_{mi}^{(2)}$ qui constituent les nouvelles inconnues sont déterminées en minimisant la fonctionnelle :

$$J(M) = \|\phi_D^{(2)} - \phi^{libre} - \phi^{liee}\|_{(M \in \Sigma)} \quad (20)$$

ceci assure le raccord des potentiels extérieur et intérieur.

Indépendamment du choix de la méthode, il est nécessaire d'optimiser la position de la surface (Σ). Le critère est d'assurer un "bon" raccord entre l'expression du second membre α de la condition de surface libre et son développement asymptotique. Pour cela on définit une erreur δ de la façon suivante :

$$\delta = \frac{|\alpha_{exact} - \alpha_{asympt.}|}{\max_{\theta \in \{0, \pi\}} |\alpha_{exact}|} \quad (21)$$

La figure (2) représente les isovaleurs de kR telles que $\delta < 0.05$. Ce résultat permet non seulement d'optimiser la taille du domaine, mais il est, de plus, assez général car il ne dépend que de la géométrie. La figure (12) montre le profil du module de α . En profondeur infinie on aurait : $\alpha = 0$ pour $\theta = 0$, et l'erreur relative $\frac{|\alpha_{exact} - \alpha_{asympt.}|}{|\alpha_{exact}|}$ serait très importante, c'est pourquoi on divise en fait par le \max de α_{exact}

LA METHODE

La méthode retenue pour résoudre l'équation de Laplace pour le potentiel de diffraction du 2nd ordre, est une méthode intégrale. Pour ce faire on a utilisé une distribution mixte de singularités (sources et doublets) : la fonction de Green est le potentiel d'une source tridimensionnelle. Du fait de la condition de Neumann homogène sur le fond, on choisit, en fait, le potentiel d'une source augmentée de son symétrique

par rapport au fond. D'autre part, par souci d'optimisation de la place mémoire – lors de la résolution du système linéaire – on tire profit des symétries géométriques ; ceci se fait, bien sûr au détriment du temps nécessaire aux calculs des coefficients d'influence. Le problème étant elliptique, il est nécessaire d'afficher des conditions aux limites sur chacun des bords du domaine.

Dans les développements qui suivent on note : n_i la normale intérieure au domaine et pour simplifier les notations : $\phi_D^{(2)} = \phi$

L'équation intégrale a pour expression :

$$2\pi\phi - \int_S \phi G_{,n_i} ds = - \int_S G \phi_{,n_i} ds \quad (22)$$

où $(S) = (Sl) \cap (Cyl) \cap (\Sigma)$ et G est la fonction de Green du problème. En reportant les expressions de $\phi_{,n_i}$ dans cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi\phi - \int_{Sl} \phi \left(G_{,n_i} + \frac{4\omega^2}{g} \cdot G \right) ds - \int_{Cyl} \phi G_{,n_i} ds - \int_{\Sigma} \phi G_{,n_i} ds = \\ \int_{Sl} \alpha \cdot G ds + \int_{Cyl} \phi_{I,n_i}^{(2)} \cdot G ds - \int_{\Sigma} \phi_{,n_i} \cdot G ds \end{aligned} \quad (23)$$

Cette équation intégrale est résolue par collocation ; on discrétise la surface (S) en N facettes. Sur chaque facette le potentiel est constant ; il est calculé au barycentre des points sommets de la facette. On définit les coefficients suivants :

$$D_{ij} = - \int_{\sigma_j} G_{ij,n_i} ds_j, \quad D_{ii} = 2\pi \quad \text{et} \quad S_{ij} = \int_{\sigma_j} G_{ij} ds_j \quad (24)$$

On désigne par :

- σ_j la surface de la facette j
- G_{ij} la fonction de Green du problème $G_{ij} = \frac{1}{\|P_i P_j\|} + \frac{1}{\|P_i P'_j\|}$, P_j désigne le point influençant, P'_j son symétrique par rapport au fond et P_i le point influencé.

L'équation intégrale discrétisée s'écrit finalement :

$$\sum_{j=1}^N \phi_j \left(D_{ij} + \begin{Bmatrix} -\frac{4\omega^2}{g} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot S_{ij} \right) = \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \phi_{I,n_i}^{(2)} \\ -\phi_{j,n_i} \end{Bmatrix} S_{ij} \quad (25)$$

La géométrie étudiée présente 2 plans de symétrie (xoz) et (yoz) , et comme le plan (xoz) est plan de symétrie de l'écoulement, on résout finalement 2 systèmes linéaires du type :

$$\sum_{j=1}^N \phi_j^\kappa \left(D_{ij}^\kappa + \begin{Bmatrix} -\frac{4\omega^2}{g} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot S_{ij}^\kappa \right) = \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} \alpha_j^\kappa \\ \phi_{I,n_i}^{\kappa(2)} \\ -\phi_{j,n_i}^\kappa \end{Bmatrix} S_{ij}^\kappa \quad \text{pour } \kappa = 1, 2 \quad (26)$$

avec : $X_j^1 = X_j + X_{j_{Sx}} + X_{j_{Sy}} + X_{j_{So}}$ et $X_j^2 = X_j + X_{j_{Sx}} - X_{j_{Sy}} - X_{j_{So}}$ on désigne par $X_{j_{Sp}}$ la valeur de la fonction X au point de contrôle $P_{j_{Sp}} = Sp(P_j)$, Sx est la symétrie par rapport au plan (xoz) , Sy la symétrie par rapport au plan (yoz) et So la symétrie par rapport au point O centre du repère.

En reportant les conditions aux limites sur (Σ) dans l'équation (26), on obtient :

1) première méthode :

$$\sum_{j=1}^N \phi_j^\kappa (D_{ij}^\kappa + \begin{Bmatrix} -\frac{4\omega^2}{g} \\ -ik_{20} \\ 0 \end{Bmatrix}) \cdot S_{ij}^\kappa = \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} \alpha_j^\kappa \\ \phi_{I_j, n_i}^{\kappa(2)} \\ -(\phi_{j, n_i}^{\kappa, liee} + ik_{20} \phi^{\kappa, liee}) \end{Bmatrix} S_{ij}^\kappa \quad \kappa = 1, 2 \quad (27)$$

2) deuxième méthode : on note : $\phi^{libre} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mk}^{(2)} \phi_{mk}^{libre}$

$$\sum_{j=1}^N \phi_j^\kappa (D_{ij}^\kappa + \begin{Bmatrix} -\frac{4\omega^2}{g} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}) \cdot S_{ij}^\kappa = \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} \alpha_j^\kappa \\ \phi_{I_j, n_i}^{\kappa(2)} \\ -\phi_{j, n_i}^{\kappa, liee} \end{Bmatrix} S_{ij}^\kappa - \sum_{k=0}^{M_k-1} \sum_{m=0}^{M_m-1} A_{mk}^{(2)} \sum_{j=1}^{N_\Sigma} \phi_{mkj, n_i}^{\kappa, libre} S_{ij}^\kappa \quad \kappa = 1, 2 \quad (28)$$

Les coefficients $A_{mk}^{(2)}$ sont jusqu'ici inconnus. Chacun des termes apparaissant dans le second membre de ce système définira les $M_k \cdot M_m + 1$ seconds membres pour lesquels on résout le système.

On notera les solutions : Ψ_i et $\{(\psi_{mki})_{m=0, M_m-1}\}_{k=0, M_k-1}$ au point de contrôle $n^o i$ de la discrétisation.

L'intérêt pratique d'une telle méthode est dès lors évident :

- meilleure évaluation des ondes libres. (Cf figure (11))
- résolution d'un système linéaire de même taille que précédemment mais réel.
- nécessité de n'inverser qu'une seule fois la matrice du système pour l'ensemble des seconds membres.

Enfin, pour calculer les coefficients $A_{mk}^{(2)}$, on écrit des 2 façons possibles le potentiel de diffraction ϕ_i en tout points M_i de discrétisation de la surface de contrôle (Σ)

$$\phi_i = \phi_i^{liee} + \sum_{k=0}^{M_k-1} \sum_{m=0}^{M_m-1} A_{mk}^{(2)} \phi_{mki}^{libre} = \Psi_i + \sum_{k=0}^{M_k-1} \sum_{m=0}^{M_m-1} A_{mk}^{(2)} \psi_{mki} \quad (29)$$

Le nombre de facettes N_Σ sur la surface de contrôle étant plus grand que le nombre $M_k M_m$ de termes dans la série, on définit un système sur-déterminé qu'on résout par une méthode des moindres carrés de type Householder. Pour l'application numérique on tronque la somme en $\cos m\theta$ à $M_m = 20$.

MISE EN OEUVRE DES CALCULS ET RESULTATS

La plupart des calculs ont été réalisés sur le CRAY-XMP de l'IFP dont la mémoire centrale a une capacité de 3 millions de mots. Le calcul des coefficients d'influence ainsi que la résolution des systèmes linéaires ont été effectués grâce aux routines du logiciel DIODORE écrit à PRINCIPIA.

Le gain de temps et en place mémoire obtenu en résolvant l'équation intégrale (28) plutôt que (27) est significatif, il est lié principalement à la résolution de systèmes linéaires à matrice réelle, en outre le temps de calcul des coefficients des ondes libres est négligeable par rapport au temps de résolution des 2 équations intégrales.

La figure (3) représente un maillage du domaine. Il est important de bien mailler les intersections des différentes surfaces. En effet au 1^{er} ordre il apparaît un problème d'irrégularité des solutions de part et d'autre de l'intersection si on n'assure pas une continuité dans la taille des facettes de jonction. Au deuxième ordre on pouvait donc s'attendre à un problème de même type d'autant plus que la solution est beaucoup moins régulière. On a opté finalement pour un raccord tel que la taille des facettes décroît sinusoidalement jusqu'à l'intersection. Enfin, pour évaluer correctement l'élévation de surface libre il est nécessaire de mailler finement radialement la surface libre car la longueur d'onde des ondes libres est de l'ordre du quart de celle du premier ordre. Pour la plupart des tests effectués on dispose d'environ de 2 à 3 facettes par longueur d'onde $\lambda^{(2)} = \frac{2\pi}{k_{20}}$. Ceci est insuffisant. Le maillage représenté sur la figure (4) est composé de 2997 facettes (dont 2045 sur la surface libre); il nous a permis de disposer de 5 facettes / $\lambda^{(2)}$.

Cependant pour traiter de tels cas il est nécessaire de modifier la méthode de résolution des systèmes linéaires. En effet au delà de 1500 facettes, on emploie une méthode de Gauss par blocs. Ceci permet de manipuler des matrices de rang $\simeq N/2$ si la matrice initiale est de rang N . Toutefois, le coût informatique s'en est considérablement accru du fait des nombreuses entrées/sorties que nécessite la méthode. A titre d'exemple, le cas de 1500 facettes coûte environ 380 secondes CPU, et le cas de 2997 facettes coûte 3040 secondes

Afin de valider nos résultats, nous les avons comparés, entre autres, à ceux de Kim et Yue (1988). Leur méthode est basée sur la décomposition du potentiel en série de Fourier de l'angle polaire, ceci les conduit à résoudre des équations intégrales mono-dimensionnelles pour chaque mode et de plus l'intégrale sur la surface libre est calculée semi-analytiquement. On a représenté sur la figure (5) le profil de la pression totale du 2nd ordre (incident + diffracté). On constate un bon accord entre les résultats. Il persiste toutefois une différence aux abords de la surface libre. Miloh (1980) prouve l'existence d'une singularité pour le problème de diffraction au 2nd ordre à l'intersection cylindre/surface libre. En effet il met en évidence l'incompatibilité des conditions de glissement (eq.(16)) et de surface libre (eq.(15)) au point d'intersection. On constate d'ailleurs, numériquement, qu'une discrétisation plus fine augmente la valeur de la solution à l'intersection. Enfin on note que la pression ne tend pas vers 0 près du fond.

On dispose, en outre, des résultats de B.Molin. On peut en effet obtenir par des

calculs semi-analytiques l'effort horizontal de diffraction du 2nd ordre. Les figures (6) et (7) prouvent donc la validité de la méthode. De plus les tests effectués montrent qu'une discrétisation fine n'est pas nécessaire pour calculer cet effort (quelques centaines de facettes suffisent), mais alors il n'est plus possible d'évaluer correctement les élévations de surface libre.

Les figures (8 à 10) représentent la contribution du potentiel de diffraction du 2nd ordre à l'élévation de surface libre. Pour ce cas, la surface libre est discrétisée en 2045 facettes. On distingue nettement en amont du cylindre les ondes liées qui se propagent suivant la bissectrice de l'angle formé par les directions de la houle incidente et du potentiel de diffraction. Superposées à ces dernières, on note les ondes libres qui se propagent radialement. "Sous le vent" du cylindre, par contre, on ne modélise plus rien de très significatif. Le tracé du module permet d'observer un clapotis dans une zone où les amplitudes des ondes libres et liées sont du même ordre de grandeur ($35^\circ < \theta < 70^\circ$).

La deuxième méthode envisagée –équation intégrale (28)– a permis d'avoir accès au potentiel des ondes libres. La figure (11) représente le profil des composantes du potentiel de diffraction du 2nd ordre à l'intersection de la surface libre et de la surface de contrôle. Bien que la méthode des moindres carrés soit approximative, on respecte un assez bon accord entre $|\phi^{libre}|$ et $|\phi_D^{(2)} - \phi^{liee}|$.

La figure (13) représente le module des élévations de surface libre près du cylindre. On note principalement que la contribution au 2nd ordre des termes quadratiques du potentiel du 1^{er} ordre est du même ordre de grandeur que celle du potentiel de diffraction du 2nd ordre.

Enfin on confronte nos résultats avec les mesures expérimentales effectuées par L. Boudet au Bassin d'Essais des Carènes de l'ENSM. Ces essais consistaient à mesurer les élévations de surface libre en divers points autour d'un cylindre.

La figure (14), tout d'abord, représente un enregistrement de l'élévation de surface libre. La caractéristique des effets du deuxième ordre est évidente :

- crêtes du signal analysé pointues et d'amplitude plus importante que celle les creux
- période du signal total double de celle des harmoniques

Cependant la figure (15) montre combien il est difficile d'approcher correctement les effets du 2nd ordre. Les causes en sont principalement :

- la "propreté" relative de la houle incidente
- la variation du volume du bassin liée au mouvement du batteur

CONCLUSION

Les résultats numériques obtenus prouvent la validité de la méthode. Avant d'étendre l'étude au cas d'un groupe de cylindres, il convient de bien définir certains critères :

- position de la surface de contrôle (raccord des potentiels intérieurs et extérieurs)
- convergence des résultats en fonction de la troncature des sommes infinies (eq.(12))
- "bonne" discrétisation de la surface libre et de ses intersections

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Quelques réflexions sur la résolution du problème de diffraction au deuxième ordre. B.Molin. 1^{eres} Journées de l'Hydrodynamique de Nantes (1987)
- [2] The complete second-order diffracted waves around an axisymmetric body. Part 1. monochromatic incident waves. M-H Kim and D.K.P.Yue (avril 1988)
- [3] Etude numérique et expérimentale du problème de diffraction de deuxième ordre. L.Boudet. Rapport de DEA (ENSM) 1988
- [4] Irregularities in solutions of nonlinear wave diffraction problem by vertical cylinder. T. Miloh Journal of the Waterway. ASCE (1980)
- [5] Contribution à l'étude théorique et expérimentale des mouvements de corps flottants induits par une houle régulière en profondeur finie uniforme. A. Clément Thèse de docteur-ingénieur (1979)
- [6] Approximation of wave forces on cylinders arrays. McIver et DV Evans. Applied Ocean Research 1985.

RESULTATS

paramètres : h : profondeur du cylindre
 a : rayon du cylindre
 A : amplitude de la houle incidente
 ω : pulsation de la houle incidente

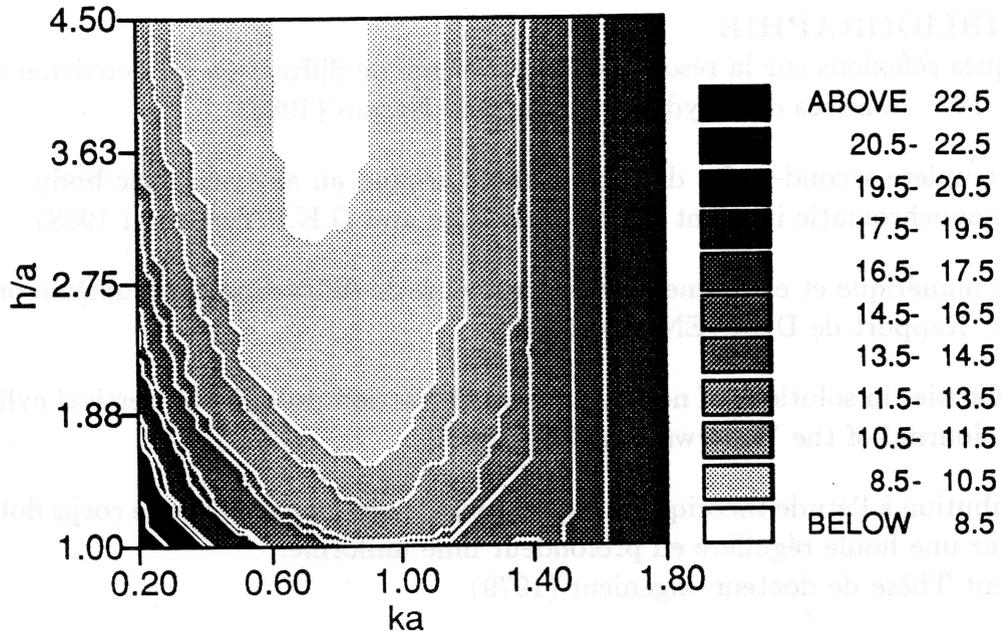


figure 2 : isovaleur de kR pour $\delta < 0.05$

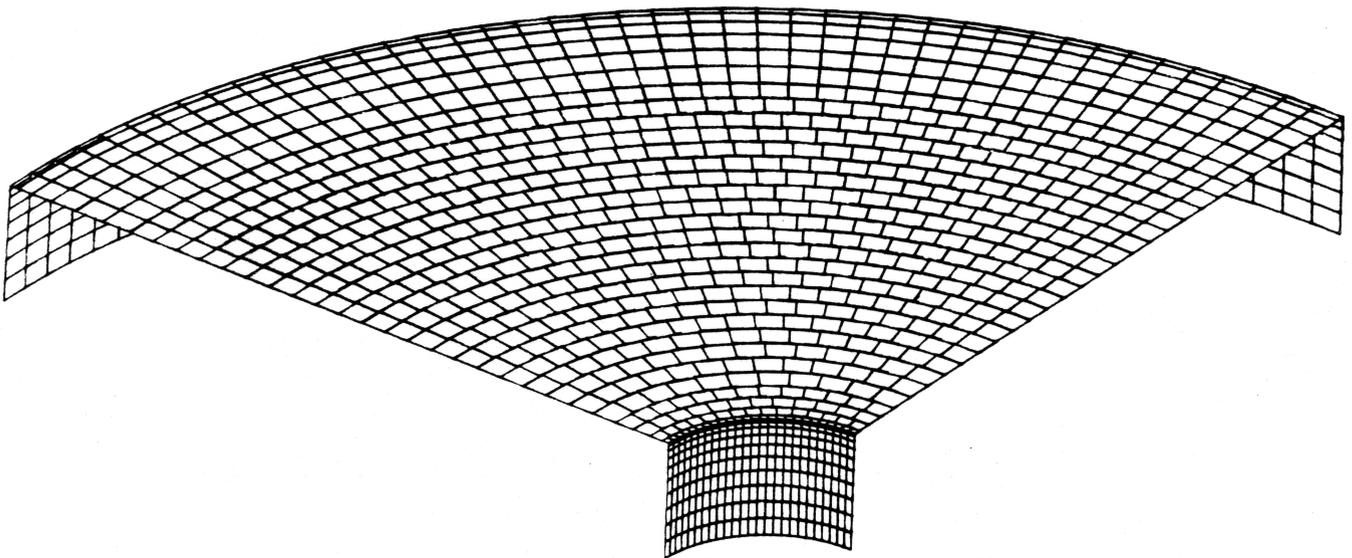


figure 3 : maillage du domaine avec raffinement de la discrétisation près des intersections

surface libre : 890 facettes
 surface de contrôle : 344 facettes
 surface cylindre : 250 facettes

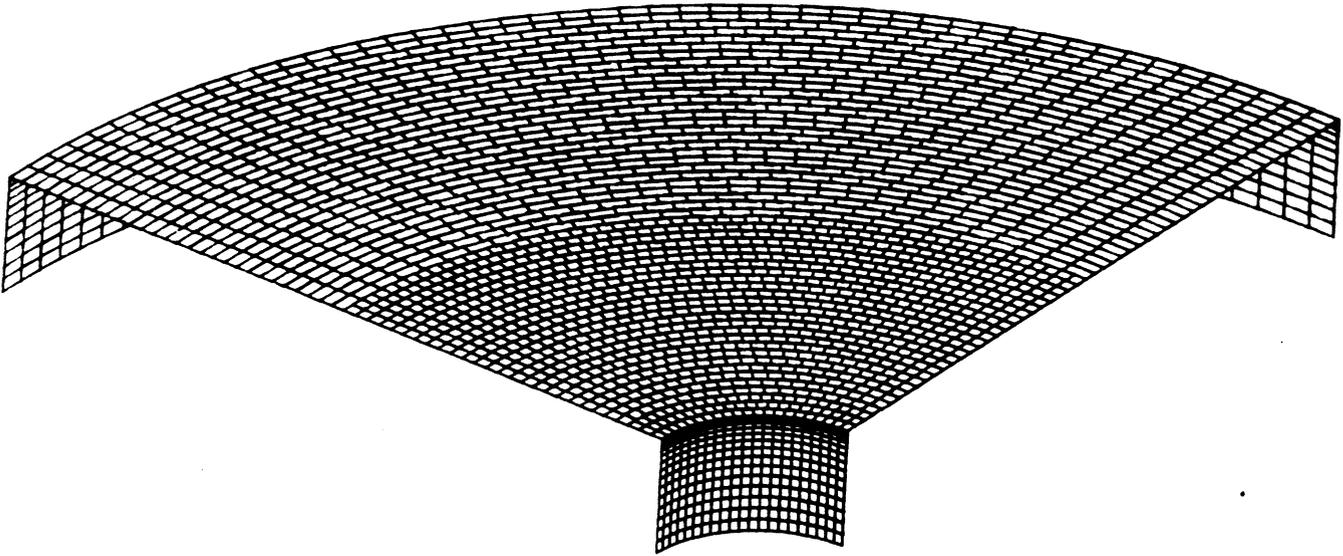


figure 4 : discrétisation fine du domaine

surface libre : 2045 facettes
 surface de contrôle : 647 facettes
 surface cylindre : 315 facettes

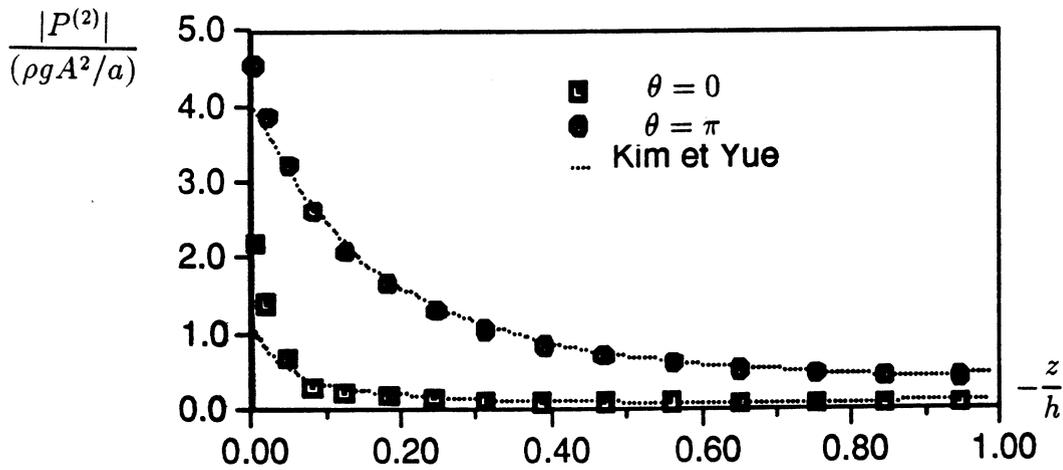


figure 5 : module de la pression du 2^{eme} ordre le long du cylindre
 (direction de la houle incidente : $\theta = 0$, $h = 4a$, $\frac{a\omega^2}{g} = 2$)

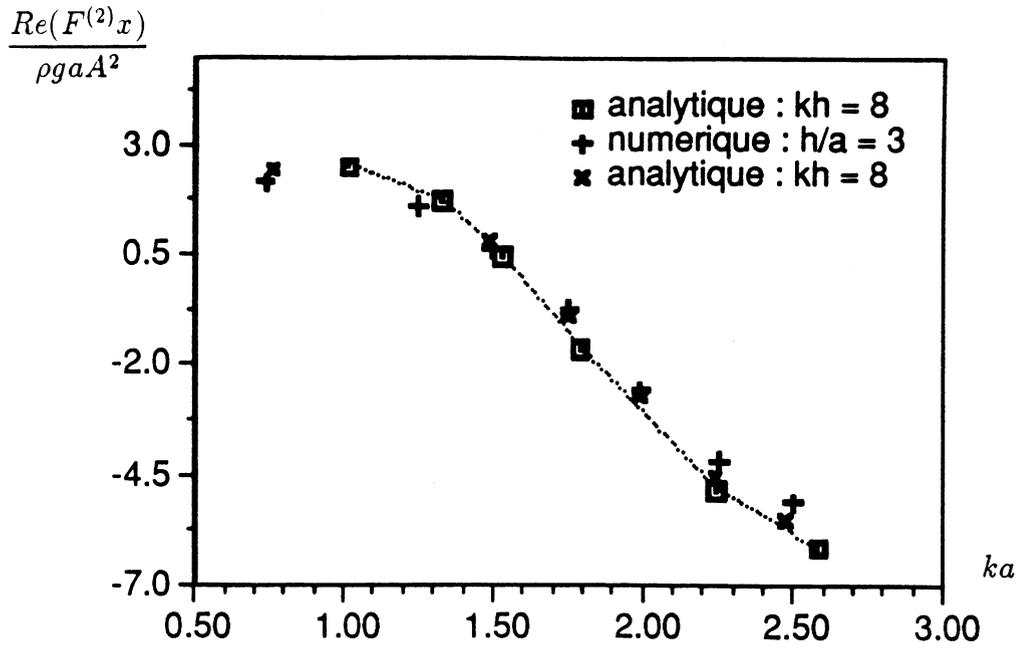


figure 6 : partie réelle de l'effort de diffraction du 2^{ème} ordre (comparaison analytique/numérique)

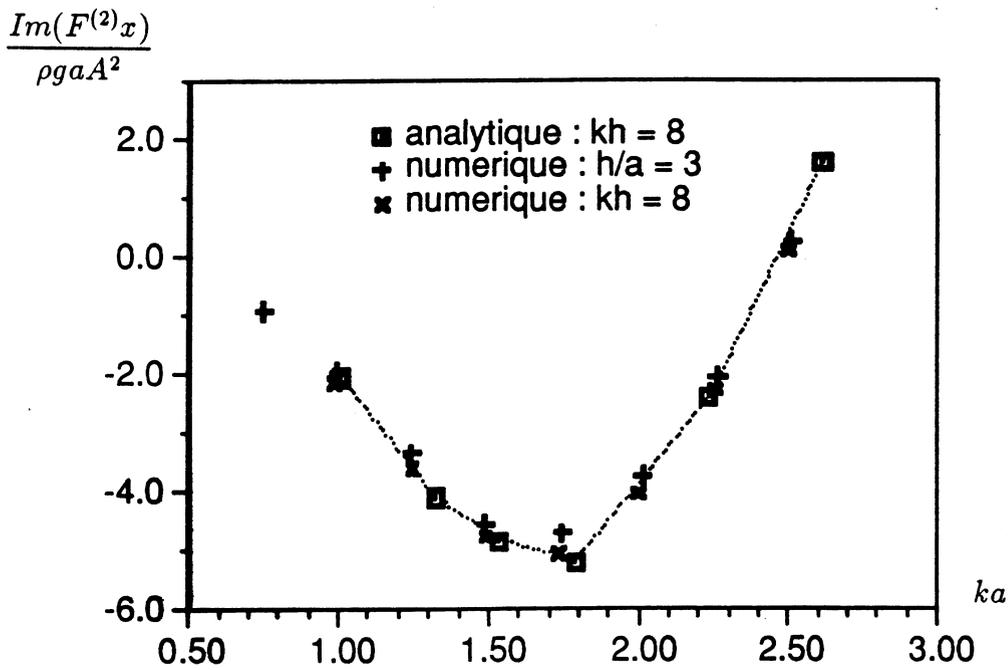


figure 7 : partie imaginaire de l'effort de diffraction du 2^{ème} ordre (comparaison analytique/numérique)

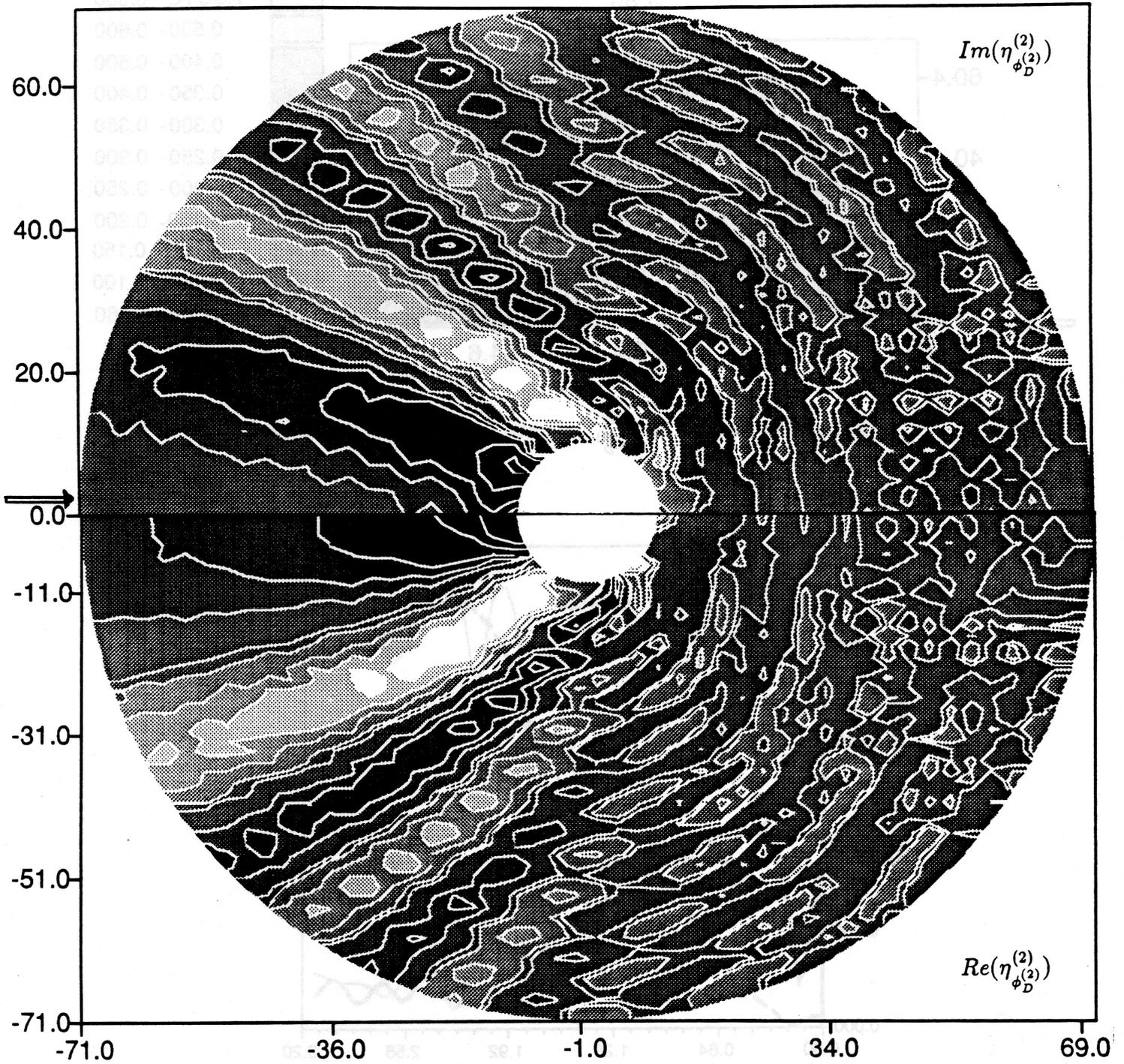
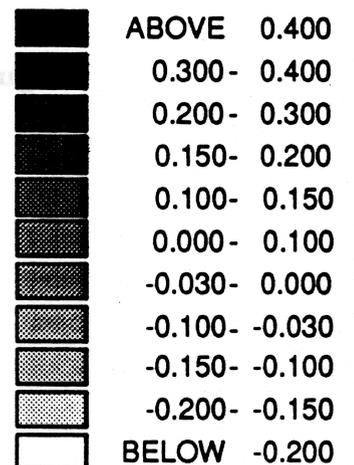


figure 8-9 : partie réelle (1/2 plan inférieur) et partie imaginaire (1/2 plan supérieur) de $\eta_{\phi_D}^{(2)}$: contribution du potentiel de diffraction du 2nd ordre à l'élévation de surface libre.

la houle incidente se propage suivant la flèche, ($h = a$, $\frac{a\omega^2}{g} = 2$)



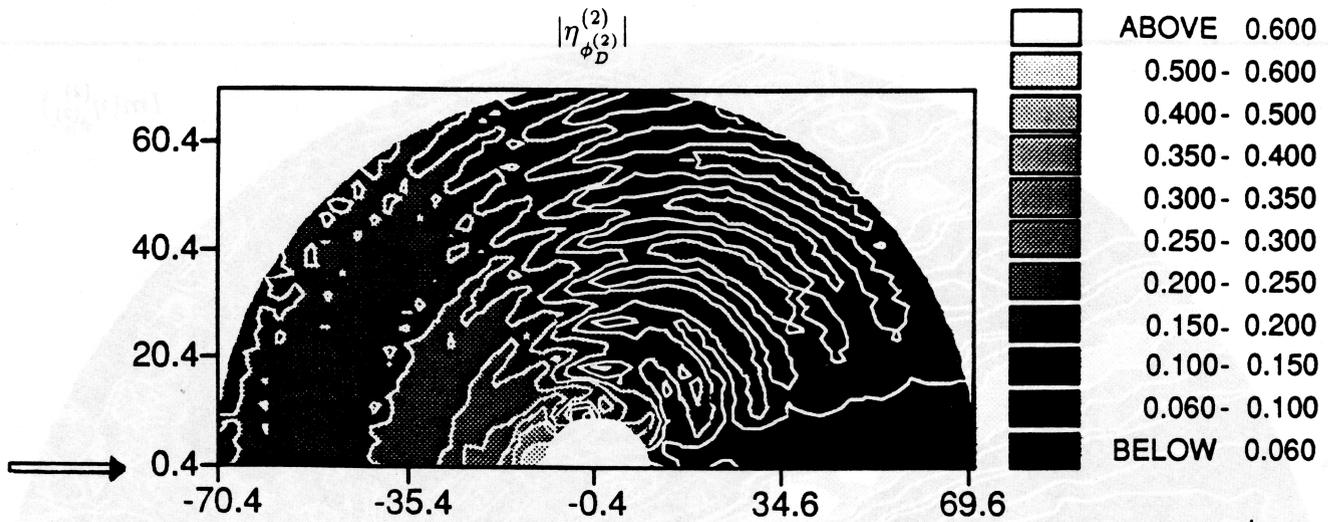


figure 10 : module de $\eta_{\phi_D}^{(2)}$ (mêmes données que précédemment)

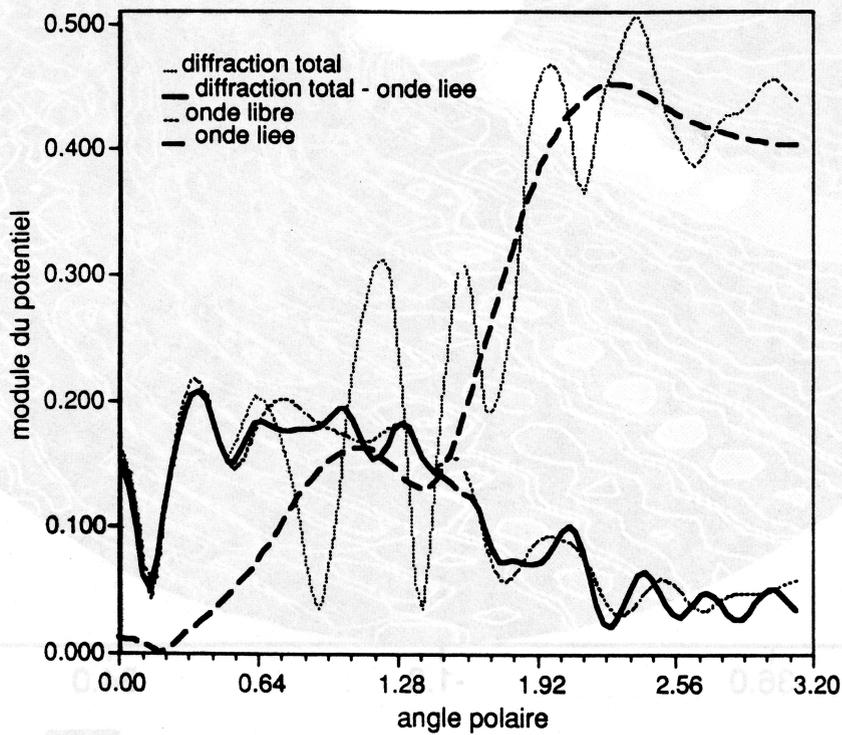


figure 11 : potentiels à l'intersection de (Σ) et (SI)
raccord des potentiels intérieur et extérieur
 $h = a$, $\frac{a\omega^2}{g} = 2.8$, $kR = 71$

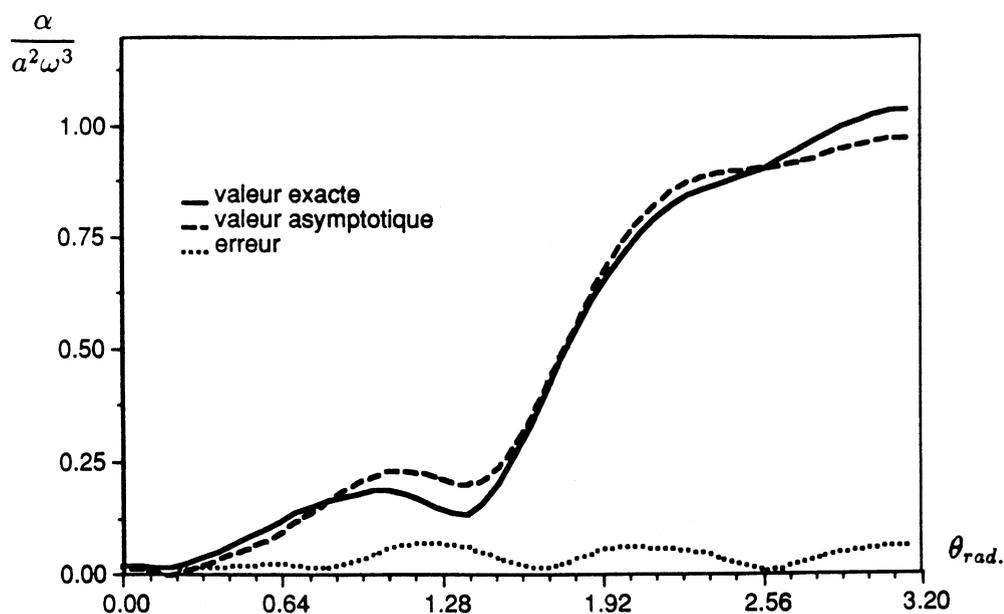


figure 12 : module du second membre de la condition de surface libre
 $h = a$, $\frac{a\omega^2}{g} = 2.8$

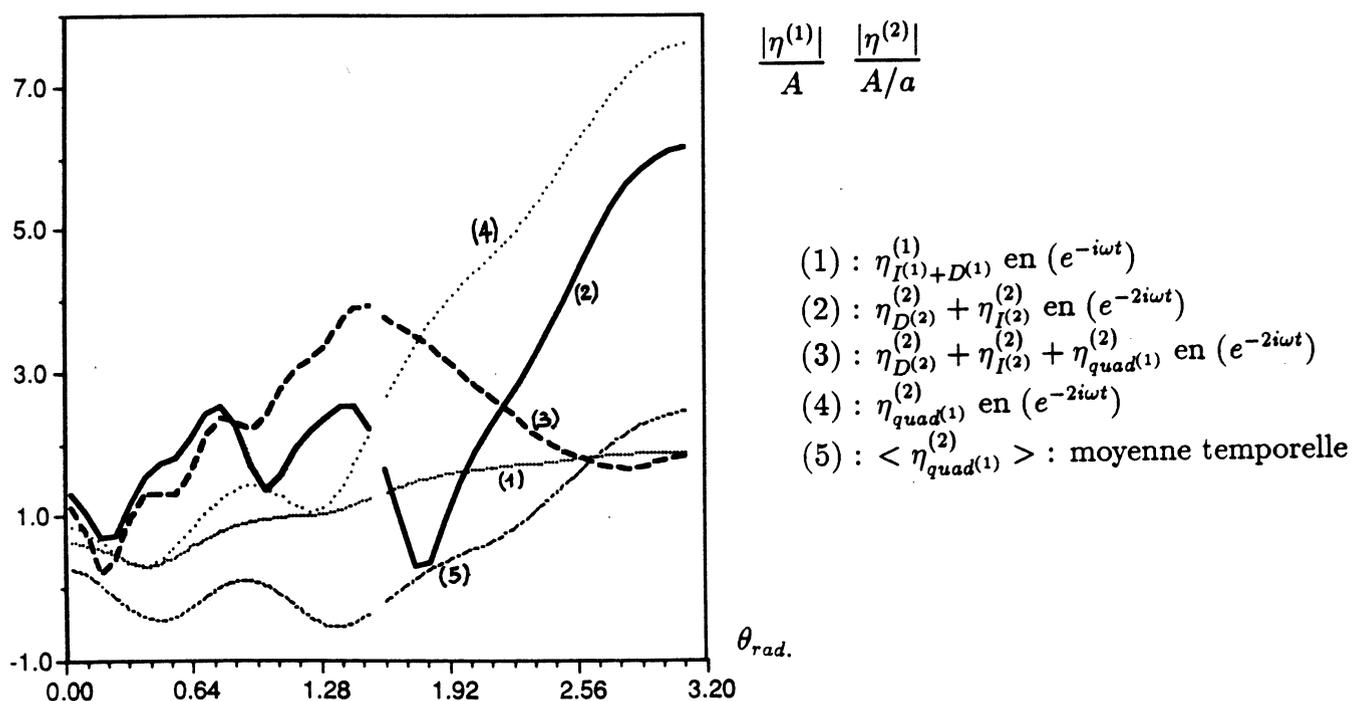


figure 13 : module des composantes de l'élévation de surface libre
 sur le cylindre (direction de la houle incidente : $\theta = 0$, $h = a$, $\frac{a\omega^2}{g} = 2.8$)

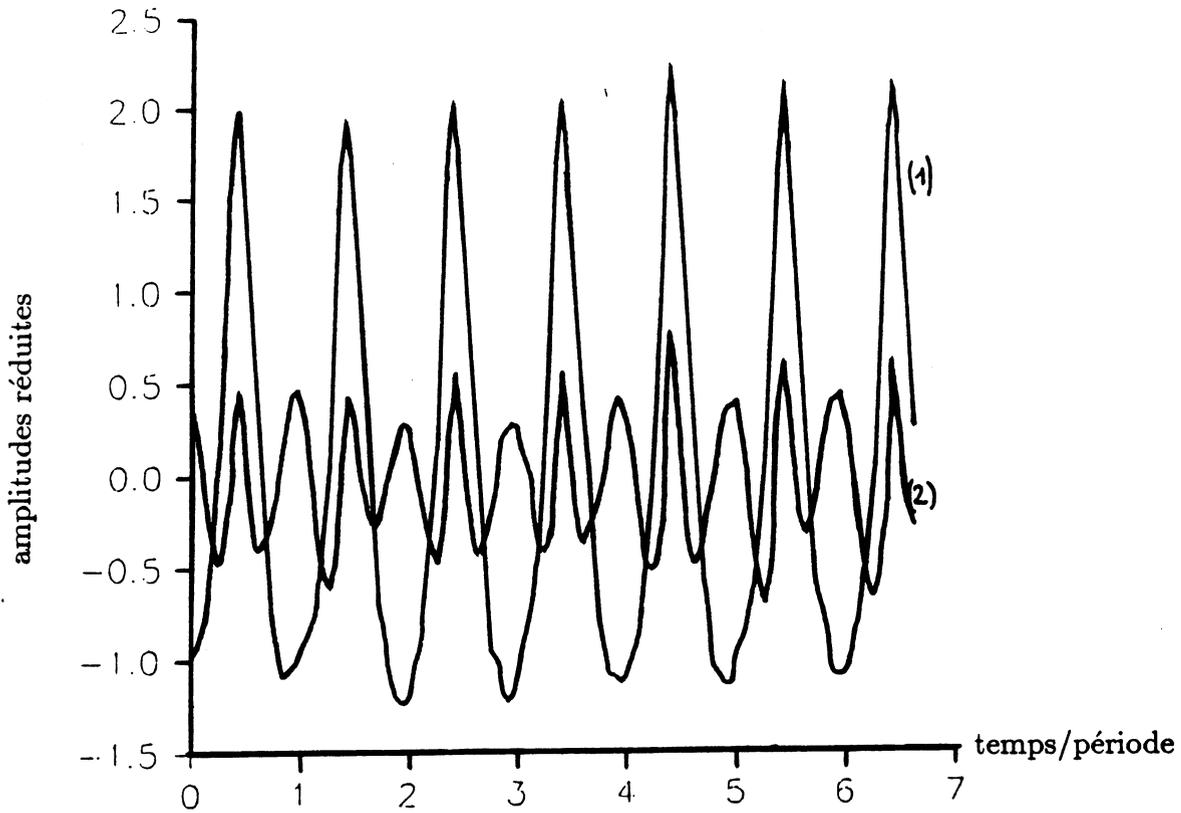


figure 14 : résultats expérimentaux : comparaison des enregistrements signal total (1) et signal total moins le fondamental (2)

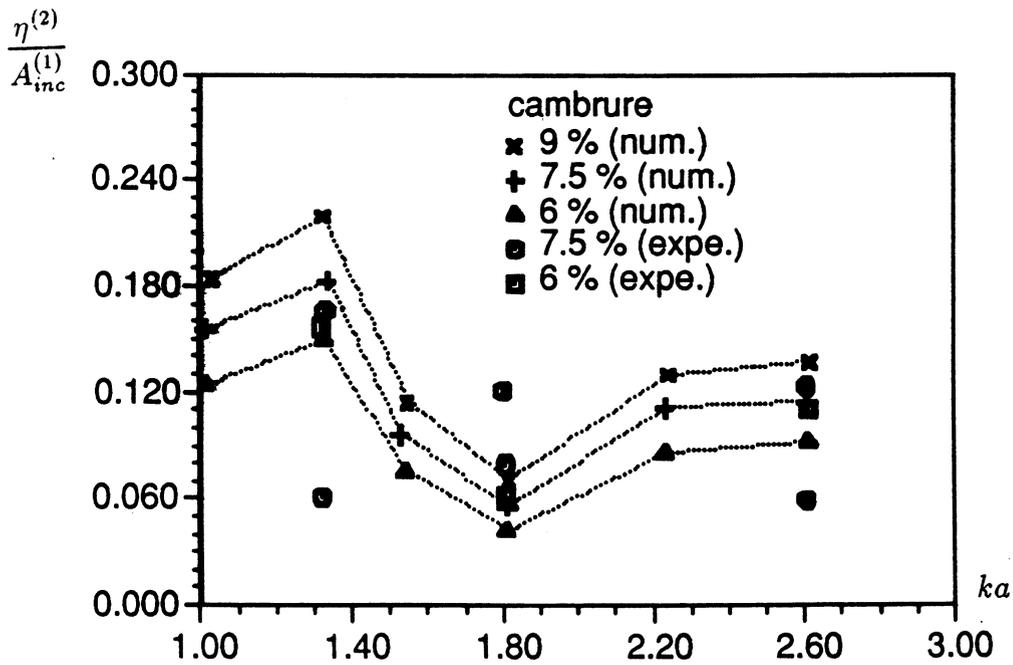


figure 15 : élévation de la surface libre du 2nd ordre
comparaison numérique/expérience