

2èmes JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

13 au 15 Février 1989 - Nantes

---

**CALCUL DES EFFORTS HYDRODYNAMIQUES  
SUR UN CYLINDRE HORIZONTAL  
en théorie potentielle non-linéaire**

**Raymond Cointe**  
Institut Français du Pétrole  
Rueil-Malmaison

**Résumé.**

*Le problème abordé ici est celui de la simulation mathématique de l'interaction entre un liquide et un cylindre fixe ou en mouvement forcé au voisinage de la surface libre. On suppose l'écoulement potentiel mais l'on prend en compte complètement les conditions aux limites non-linéaires, en particulier celles de surface libre. Le logiciel Sindbad permettant la résolution numérique du problème est présenté. L'application considérée en est le calcul des efforts de diffraction-radiation sur un cylindre horizontal partiellement ou totalement immergé. Les résultats numériques sont comparés à des résultats théoriques et expérimentaux déjà publiés.*

**Summary.**

*This paper deals with the mathematical simulation of two-dimensional water-solid interaction for forced motions in the vicinity of a free-surface. The only assumption made is that of potential flow. In particular, the fully nonlinear free-surface boundary conditions are accounted for. Sindbad, a code that allows the problem to be solved numerically, is described. The procedure is applied to the calculation of diffraction-radiation loads acting on a horizontal cylinder, either surface-piercing or not. The numerical results are compared to theoretical and experimental results available in the literature.*

### Introduction.

De manière classique, la théorie potentielle linéaire est utilisée pour calculer les efforts hydrodynamiques exercés sur une structure de dimension suffisante pour perturber de façon significative l'écoulement incident (dimension caractéristique supérieure au cinquième de la longueur d'onde). Les modèles de diffraction-radiation qui en résultent sont maintenant devenus des outils indispensables pour le concepteur.

Les phénomènes non-linéaires observés expérimentalement et non prévus par la théorie potentielle linéaire sont souvent attribués à la viscosité et pris en compte de manière empirique (par exemple en utilisant la formule de Morison). Néanmoins, il convient d'insister sur le fait que, même en théorie potentielle, les phénomènes de surface libre ont des effets non-linéaires.

Dans certains cas, ces effets peuvent être pris en compte en écrivant la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique fonction d'un petit paramètre  $\epsilon$ . Pour le problème de diffraction-radiation, ce petit paramètre est lié à la cambrure de la houle. Le développement au premier ordre (c'est-à-dire comprenant un seul terme linéaire en  $\epsilon$ ) correspond alors à la solution linéaire du problème. Les effets non-linéaires apparaissent donc avec le développement à l'ordre suivant, au second ordre (c'est-à-dire comprenant en plus du terme linéaire en  $\epsilon$  un terme proportionnel à  $\epsilon^2$ ). La solution au second ordre, comme celle au premier ordre, n'est a priori valable que dans la limite  $\epsilon$  petit. Son intérêt n'est donc pas d'étendre le domaine de validité de la théorie linéaire mais plutôt de permettre une première estimation des phénomènes non-linéaires. C'est le cas en particulier du calcul des mouvements d'une structure à sa fréquence propre lorsque celle-ci se trouve en dehors de la gamme énergétique du spectre de houle. Selon la théorie linéaire, il n'y a pas d'excitation à la fréquence propre ; seule une théorie non-linéaire peut permettre d'aborder le problème.

D'autres problèmes n'autorisent pas une approche asymptotique construite à partir de la solution linéaire. Il s'agit de l'étude des comportements "extrêmes" pour lesquels les hypothèses liées à la linéarisation ne peuvent pas être faites. Cela s'applique en particulier à l'étude de problèmes tels que la stabilité, l'impact ou les grands mouvements à la résonance.

Si un développement asymptotique au second ordre permet une première approche des phénomènes non-linéaire, le domaine de validité de ce développement ne peut être défini a priori. Un développement asymptotique à un ordre plus élevé n'a aucune raison d'avoir un domaine de validité plus étendu. L'estimation du domaine de validité des théories asymptotiques passe donc par une comparaison avec des résultats expérimentaux ou une solution "exacte" du problème non-linéaire.

L'objet de cette étude est justement de calculer les efforts de diffraction-radiation exercés sur un cylindre horizontal immergé partiellement ou totalement dans le cadre de la *théorie potentielle non-linéaire*. Cette théorie n'est limitée que par l'hypothèse d'irrotationalité ; elle prend en compte complètement les conditions aux limites non-linéaires de surface libre.

Le problème est abordé ici à l'aide d'une simulation temporelle (logiciel *Sindbad*) dont la philosophie est plus voisine de celle d'un essai en bassin que de celle d'un calcul linéaire classique de diffraction-radiation. Le développement de simulations non-linéaires de ce type — demandant de puissants moyens de calcul — est très récent. Cette étude permet donc aussi d'illustrer sur un cas simple, mais réaliste, la mise en oeuvre d'un "essai" dans un bassin de houle numérique.

Compte-tenu du coût d'un essai de ce type, il ne s'agit pas (du moins à court terme) de remplacer les calculs classiques de diffraction-radiation, au premier ou au second ordre. L'utilisation de simulations non-linéaires doit bien sûr permettre de calculer certains comportements extrêmes. Elle doit aussi conduire à mieux définir le domaine d'utilisation des théories approchées existantes et, le cas échéant, permettre d'en développer d'autres. A côté des essais en bassin ou au réel et des théories approchées, il s'agit donc d'un nouveau moyen d'analyse des phénomènes physiques complexes que l'ingénieur doit prendre en compte lors de la conception.

### Résultats antérieurs.

Dean (1948) étudia la diffraction de la houle en utilisant la théorie du potentiel linéarisé dans le cas du cylindre complètement immergé. Il découvrit que la houle incidente n'est pas réfléchiée par le cylindre. La houle transmise a donc la même amplitude que la houle incidente, seule la phase est modifiée au passage du cylindre. Ursell (1950) étudia le même problème, donna un résultat d'unicité et exprima la solution. Ogilvie (1963) étendit les résultats d'Ursell au cas de la radiation et au calcul de la force de dérive au second ordre.

Chaplin (1984) a étudié en laboratoire les efforts de diffraction sur un cylindre horizontal complètement immergé à faible nombre de Keulegan-Carpenter (absence de détachement). Si les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie dans la limite où la cambrure de la houle tend vers zéro, d'importants effets non-linéaires ont été observés expérimentalement. En particulier, le coefficient d'inertie mesuré décroît rapidement quand la cambrure augmente. Grue et Granlund (1988) ont réalisé des expériences similaires, mais en s'intéressant surtout au train de vague diffracté. Dans le cas du cylindre perçant, Yamashita (1977) a étudié le pilonnement et mis en évidence une augmentation de la masse ajoutée avec l'amplitude du mouvement de pilonnement.

De nombreuses études ont concerné le calcul des efforts en utilisant la théorie potentielle du second-ordre. En particulier, on notera les travaux de Vada (1987) pour le cylindre complètement immergé. Cependant, ces théories au second-ordre restent limitées par l'hypothèse de faible amplitude et ne peuvent expliquer les variations du coefficient d'inertie ou de la masse ajoutée avec l'amplitude.

On est naturellement conduit à s'interroger sur l'origine de ces non-linéarités. Stansby et Slaouti (1984) et Dommermuth (1987) ont étudié le problème potentiel non-linéaire pour la diffraction sur un corps totalement submergé. Les premiers n'ont cependant pas mis en évidence de réponse non-linéaire significative, tandis que le second ne s'est intéressé qu'aux efforts moyens. Faltinsen (1977) puis Hwang et al. (1987) ont étudié le problème de radiation en pilonnement en utilisant des méthodes semblables. Ces derniers ont pu prédire de manière satisfaisante le comportement non-linéaire de la force.

### Principe de la simulation mathématique.

L'étude du problème de diffraction-radiation pour un cylindre horizontal (écoulement bidimensionnel) est abordé ici à l'aide d'une simulation temporelle. Cette simulation est l'objet du logiciel **Sindbad** (Simulation numérique d'un bassin de houle) développé à l'IFP depuis deux ans.

Ce logiciel doit permettre de prendre en compte, pour un écoulement potentiel bidimensionnel de géométrie arbitraire, les conditions aux limites de surface libre non-linéaires complètes. Le principe de la simulation est d'associer à un suivi de la surface libre utilisant des "marqueurs" la prise en compte de la liaison cinématique d'incompressibilité et d'irrotationalité par une méthode intégrale. Cela permet de ne considérer que des inconnues définies sur la frontière du fluide.

On commence par décrire rapidement le principe de la méthode de simulation. Afin d'alléger les notations, des variables sans dimensions sont définies. Les échelles sont choisies de telle sorte que  $g$  et  $\rho$  soient égaux à 1. Cela laisse encore arbitraire le choix d'une échelle de longueur.

On suppose l'écoulement bidimensionnel et le fluide parfait. On suppose également que l'écoulement est irrotationnel, de telle sorte que le champ des vitesses dérive d'un potentiel  $\phi$  (tel que  $\vec{\nabla}\phi = \vec{u}$ ). Le fluide occupe le domaine  $\Omega$ , supposé borné. La frontière du fluide,  $\Gamma$ , est scindée en deux parties (non nécessairement connexes) :  $\Gamma_d$  qui correspond à la surface libre et  $\Gamma_n$  qui correspond au reste de la frontière.

On supposera connues à chaque instant la position de  $\Gamma_n$  et la dérivée normale de  $\phi$  le long de cette frontière. Cela correspond en particulier aux mouvements forcés d'un corps rigide : le long de la frontière de l'objet, il y a continuité de la vitesse normale.

La surface libre est une surface matérielle le long de laquelle la pression est connue.  $\Gamma_d$  sera paramétrisée (au moins localement) par des équations du type :

$$\vec{x} = (x, y) = \vec{X}(s, t) = (X, Y).$$

La courbe  $\vec{X}(s, t_0)$  détermine la surface libre à l'instant  $t = t_0$ . La courbe  $\vec{X}(s_0, t)$  détermine la trajectoire du marqueur identifié par  $s_0$ .

A partir de  $s$ , on définit le repère orthonormé direct  $(\vec{s}, \vec{n})$ . L'orientation de  $s$  sera fixée de telle sorte que  $\vec{n}$  soit la normale extérieure au fluide. La difficulté du problème provient du fait que l'on ne connaît pas a priori la dépendance en temps de la fonction  $\vec{X}$ .

La condition cinématique de surface libre s'obtient en exprimant que la surface libre est toujours constituée des mêmes particules. En considérant un incrément élémentaire de temps  $\delta t$ , on doit donc avoir :

$$\vec{X}(s, t) + \vec{\nabla}\phi \delta t = \vec{X}(s + \delta s, t + \delta t).$$

$\delta s$  n'est pas nécessairement égal à zéro. En effet, il n'est pas nécessaire que  $s$  paramétrise la même

particule aux instants  $t$  et  $t + \delta t$ . En faisant tendre  $\delta t$  vers zéro, on en déduit :

$$\vec{X}_s \frac{ds}{dt} + \vec{X}_t = \vec{\nabla} \phi.$$

On obtient donc finalement :

$$\vec{X}_t \cdot \vec{s} = \phi_s - \vec{X}_s \cdot \vec{s} \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{X}_t \cdot \vec{n} = \phi_n.$$

Pour interpréter ces équations, on considère le marqueur  $M_0$  identifié par  $s_0$ . Sa trajectoire est donnée par :  $\vec{X}_{M_0}(t) = \vec{X}(s_0, t)$ . La seconde équation exprime que la vitesse normale de ce marqueur est égale à la vitesse normale du fluide. La première permet de calculer la vitesse tangentielle. *Le choix de cette vitesse tangentielle, lié à celui de  $s$ , est arbitraire.*

En pratique, on choisira cette vitesse de telle sorte que

$$\vec{X}_s \cdot \vec{s} \frac{ds}{dt} = (1 - \zeta) \phi_s,$$

où  $\zeta$  est une constante. Le cas  $\zeta = 1$  identifie marqueurs et particules à la surface libre. On retrouve alors la paramétrisation lagrangienne de la surface libre utilisée en premier par Longuet-Higgins et Cokelet (1976). Le choix  $\zeta = 0$  conduit à un déplacement tangentiel nul des marqueurs le long de la surface libre. On a en effet :

$$\vec{X}_t = \zeta \phi_s \vec{s} + \phi_n \vec{n}.$$

Il peut être utile, dans certaines conditions, de choisir une valeur de  $\zeta$  différente de 1. C'est le cas en particulier si l'on souhaite simuler un courant : annuler le mouvement tangentiel des marqueurs permet de ne pas avoir à se soucier des particules entrantes ou sortantes. Pour les applications décrites ici (où il n'est pas nécessaire de simuler un courant), on prendra cependant  $\zeta = 1$ .

Avec un choix approprié du potentiel, l'équation de Bernoulli peut s'écrire :

$$y + \phi_t + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi = -p,$$

où la pression  $p$  inclut la constante de Bernoulli. Comme l'on suppose la pression connue à la surface libre (et, ici, constante), cette équation  $y$  constitue une condition aux limites, dite dynamique.

Afin d'exprimer cette équation en termes d'inconnues à la surface libre, on est conduit à définir la "trace" sur la surface libre d'une fonction  $A$  définie dans le domaine fluide :

$$\mathcal{T}[A](s, t) = A(\vec{X}(s, t), t),$$

On notera que, parce que la surface libre est mobile, la trace de la dérivée temporelle n'est pas égale à la dérivée de la trace :

$$\mathcal{T}[A_t] = \mathcal{T}[A]_t - \mathcal{T}[\vec{\nabla} A] \cdot \vec{X}_t.$$

En utilisant cette relation, on vérifie alors que l'équation de Bernoulli peut s'écrire :

$$Y + \mathcal{T}[\phi]_t + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) (\mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{s})^2 - \frac{1}{2} (\mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{n})^2 = -p.$$

On est donc conduit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{T}[\phi]_t = -Y - \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) (\mathcal{T}[\phi]_s)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{n})^2 - p \\ \vec{X}_t = \zeta \mathcal{T}[\phi]_s \vec{s} + \mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{n} \vec{n} \end{cases}$$

Pour cela, il est nécessaire de connaître la relation qui lie la composante normale de la trace du gradient du potentiel à la trace du potentiel, c'est-à-dire  $\mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{n}$  à  $\mathcal{T}[\phi]$ , que nous noterons  $\Phi$ .

On écrira cette relation :

$$\mathcal{T}[\vec{\nabla} \phi] \cdot \vec{n} = \mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t],$$

où  $\mathcal{F}$  exprime la liaison cinématique d'incompressibilité et d'irrotationalité.  $\mathcal{F}$  peut s'obtenir en résolvant pour  $\phi$  dans le domaine fluide, puis en calculant la composante normale de la trace du gradient de  $\phi$ . On doit pour cela résoudre :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0, & \vec{x} \in \Omega \\ \phi_n &= f, & \vec{x} \in \Gamma_n \\ \phi &= T[\phi], & \vec{x} \in \Gamma_d.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  peut aussi s'obtenir directement en utilisant la formule de Green :

$$-\theta^P \Phi^P + \int_{\Gamma_d} \{\Phi^Q G_{n^Q}^{PQ} - \mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t]^Q G^{PQ}\} ds^Q = \int_{\Gamma_n} \{f^Q G^{PQ} - g^Q G_{n^Q}^{PQ}\} ds^Q, \quad (1)$$

où  $\theta^P$  est l'angle entre les tangentes à la frontière au point  $P$  (égal à  $\pi$  si la frontière est régulière en  $P$ ) et  $G$  est la fonction de Green,  $G^{PQ} = \ln ||\vec{PQ}||$ . Dans la mesure où l'on suppose connus  $f$  et  $\Gamma_n$  à l'instant  $t$ , cette équation permet en effet de calculer directement  $\mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t]$  (et la variable intermédiaire  $g$  qui correspond à la trace de  $\phi$  sur  $\Gamma_n$ ), sans avoir à effectuer le relèvement de  $\Phi$  dans  $\Omega$ . On notera que la dépendance en temps de  $\mathcal{F}$  provient des conditions aux limites sur  $\Gamma_n$  ( $f$  et  $\Gamma_n$  pouvant dépendre du temps).

Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \Phi_t = -Y - (\frac{1}{2} - \zeta)\Phi_s^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t])^2 - p \\ \vec{X}_t = \zeta\Phi_s \vec{s} + \mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t] \vec{n} \end{cases} \quad (2)$$

Il ne fait plus intervenir que des inconnues définies sur la surface libre  $\Gamma_d$ .

Afin de le résoudre, il suffit a priori de se donner, outre les valeurs de  $f$  et de  $\Gamma_d$  à chaque instant, celles de  $\vec{X}$  et  $\Phi$  à l'instant initial.

La résolution numérique s'effectue en discrétisant en espace la surface libre initiale, c'est-à-dire en se donnant  $n$  abscisses  $s_i$ . On écrit alors les  $3n$  équations d'évolutions (2) correspondant aux  $n$  marqueurs choisis. Afin d'évaluer les seconds-membres, on doit d'abord discrétiser  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire résoudre l'équation intégrale (1). Cette résolution s'effectue par collocation en prenant une variation linéaire des inconnues sur chaque segment. La fonction de Green et sa dérivée sont intégrées analytiquement sur chaque segment. Outre sa précision, cette méthode permet de vectoriser sur CRAY le calcul des coefficients d'influence. La dérivée tangentielle de  $\Phi$  est ensuite évaluée en utilisant une formule de Lagrange à trois points.

Les seconds-membres étant évalués, l'intégration en temps pour les  $3n$  inconnues ( $\Phi_i, \vec{X}_i$ ) s'effectue par une méthode standard, en l'occurrence un algorithme de Runge-Kutta au quatrième ordre. Afin de réduire l'effort numérique, la géométrie n'est pas modifiée pendant les quatre sous-pas d'intégration de la méthode de Runge-Kutta (c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte de la dépendance de  $\mathcal{F}$  en  $\vec{X}$  et  $\Gamma_n$  pendant ces sous-pas).

Le problème ainsi formulé est non-linéaire, d'une part parce que  $\mathcal{F}$  dépend de  $\vec{X}$  et  $\Gamma_n$ , d'autre part parce que (2) contient des termes quadratiques. Si l'on néglige ces termes quadratiques ainsi que la dépendance de  $\mathcal{F}$  en  $\vec{X}$  et  $\Gamma_n$  (en prenant la valeur de  $\mathcal{F}$  sur la position moyenne de la frontière), on retrouve le problème classique de diffraction-radiation linéaire (en transitoire). Ce cas peut être considéré comme un cas particulier du cas général non-linéaire ; une option de **Sindbad** permet de résoudre le problème linéaire. On notera que pour cette option, l'équation intégrale (1) ne doit être discrétisée et inversée qu'une seule fois. Le coût du calcul linéaire est donc très réduit.

Si le principe du code de calcul est assez simple, certaines difficultés ont été rencontrées lors de sa mise en oeuvre informatique. Ces difficultés sont décrites dans la section suivante.

### Difficultés rencontrées.

#### *Intersection fluide-structure.*

Les équations que nous avons écrites dans la section précédente s'appliquent en tout point de  $\Gamma_d$  ou de  $\Gamma_n$  où la frontière est régulière. Cependant, des singularités sont attendues aux points anguleux de la frontière et aux points d'intersection fluide-structure.

Les premières applications de la méthode que nous venons de décrire concernaient l'étude de la houle non-linéaire (voir par exemple Longuet-Higgins et Cokelet, 1976). Elles supposaient la solution périodique en espace de telle sorte que l'existence d'aucun point singulier n'était à craindre.

La généralisation de cette méthode au calcul des problèmes d'interaction fluide-structure dans le cas du corps perçant s'est vite heurtée au problème du traitement numérique du point d'intersection. Le plus souvent, ce point d'intersection est un noeud du maillage et l'on peut alors choisir de le faire appartenir soit à  $\Gamma_d$ , soit à  $\Gamma_n$ , soit aux deux. C'est apparemment cette dernière méthode, préconisée par Lin, Newman et Yue (1984) qui donne le meilleur résultat.

L'approche suivie ici est différente. Elle consiste à traiter de manière particulière le point d'intersection. Une analyse asymptotique du comportement à l'intersection dans le cas du régime faiblement non-linéaire (faible accélération de l'obstacle par rapport à celle de la gravité) a montré que le potentiel était "faiblement régulier" au point d'intersection, c'est-à-dire que  $\phi$  y était continu alors que ses dérivées tangentielles et normales pouvaient y subir une discontinuité de première espèce (Cointe, 1988). Ce résultat est valable quel que soit l'angle d'intersection entre la surface libre et l'obstacle. Le cas du régime impulsif (grande accélération de l'obstacle) pose de sérieuses difficultés (Cointe, Jami et Molin, 1987), et il n'a pas été possible de conclure. En tout état de causes, l'hypothèse faite pour le calcul numérique est que le potentiel est faiblement régulier aux points d'intersections. Cette hypothèse est également faite aux points anguleux du contour (elle y est justifiée pour un angle intérieur plus petit que  $\pi$ ).

La position du point d'intersection et la valeur correspondante du potentiel et de ses dérivées sont alors calculées par extrapolation en fonction des valeurs aux noeuds voisins.

Si les marqueurs situés à la surface libre sont suivis en utilisant l'équation (2), les parois sont remaillées à chaque pas de temps en utilisant la position instantanée des points d'intersection et un pas constant.

#### *Génération et absorption de la houle.*

Une autre difficulté intervient lorsque l'on souhaite modéliser une interaction houle-structure. Il est en effet alors nécessaire de générer cette houle et d'éviter sa réflexion sur les murs afin de ne pas avoir à utiliser un domaine de calcul excessivement grand.

On sait qu'en théorie linéaire, on peut prendre comme houle incidente une houle d'Airy et qu'il est possible d'utiliser une condition de radiation car l'on peut séparer, à l'infini, les ondes entrantes des ondes sortantes. L'écriture d'une condition de radiation au second-ordre pose de sérieuses difficultés et elle n'est pas envisageable pour le problème non-linéaire complet.

En l'absence d'approche mathématique satisfaisante, on a choisi d'utiliser une approche pragmatique similaire à celle d'un essai en bassin. La houle est générée dans le bassin par les mouvements d'un générateur, de type piston ou volet. Sa réflexion est évitée en disposant une zone d'absorption qui permet de dissiper l'énergie incidente. Cette zone d'absorption est obtenue en ajoutant un terme dissipatif aux équations (2), c'est-à-dire en substituant à celles-ci :

$$\begin{cases} \Phi_t = -Y - (\frac{1}{2} - \zeta)\Phi_s^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t])^2 - p - \nu(X) (\Phi - \Phi_e) \\ \vec{X}_t = \zeta\Phi_s \vec{s} + \mathcal{F}[\vec{X}, \Phi, t] \vec{n} - \nu(X) (\vec{X} - \vec{X}_e) \end{cases} \quad (3)$$

où l'indice  $e$  indique que la valeur correspond au fluide à l'équilibre. La fonction  $\nu(X)$  est homogène à une fréquence et n'est non-nulle que dans la zone absorbante. Elle doit être la plus régulière possible. En pratique, on la prend telle que ses dérivées premières et secondes soient continues. Comme on le verra dans la suite, cette méthode simple est tout à fait efficace.

#### *Validation des résultats.*

Dans la mesure où il existe très peu de résultats concernant les problèmes d'hydrodynamique transitoire, la validation du code de calcul pose problème.

Une étude détaillée du problème transitoire dans un canal rectangulaire a été effectuée (Cointe, Molin et Nays, 1988). Cette étude a permis de définir un régime faiblement non-linéaire (faible accélération du batteur) et de déterminer des solutions approchées au premier et second-ordre dans des cas bien déterminés. La plupart de ces solutions étant quasi-analytiques, la comparaison avec les résultats numériques provenant de la simulation non-linéaire a permis de s'assurer de la précision du code de calcul.

D'une manière générale, les résultats numériques sont d'abord comparés à ceux de théories approchées dans le domaine de validité de ces théories. Ce n'est qu'ensuite que les frontières de ce domaine de validité sont recherchées et, éventuellement, franchies, le plus souvent en comparant alors les résultats à ceux d'observations expérimentales. L'expérience semble montrer qu'une approche "prudente" de ce type est nécessaire afin de s'assurer de la validité physique des résultats obtenus.

D'autre part, un certain nombre de tests sont effectués au cours de la simulation afin d'évaluer sa précision. En particulier (lorsqu'il n'y a pas de zone absorbante) il est vérifié que la puissance fournie au liquide,

$$- \int_{\Gamma} p \phi_n ds,$$

est bien égale à la puissance qu'il absorbe,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \phi \phi_n ds + \int_{\Omega} y dv \right).$$

### Canal à houle.

La plupart des calculs décrits dans cette étude ont été effectués pour la même géométrie du canal à houle. Il convient donc d'abord de décrire ce "bassin de houle numérique".

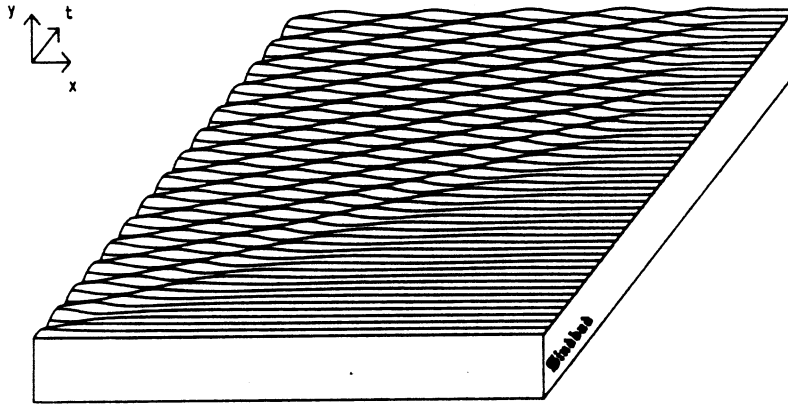


Figure 1 — Simulation d'une houle de cambrure  $\alpha\kappa = 0,15$

L'échelle de longueur arbitraire qu'il nous restait à fixer est choisie égale à la profondeur du canal,  $h$  (supposée constante). Les unités sont donc telles que  $\rho = 1$ ,  $g = 1$ ,  $h = 1$ .

La houle est générée dans le canal à l'aide d'un batteur piston. Ce batteur, initialement au repos, est mis en mouvement sinusoïdal de pulsation  $\omega = 1,85$  (période  $T = 3,40$ ) et d'amplitude  $a/2$  à  $t = 0$ . Le déplacement du batteur est donc :

$$\ell = -\frac{a}{2} \cos(\omega t), \quad t > 0.$$

D'après la théorie linéaire, le nombre d'onde de la houle générée est donné par  $\kappa \simeq 3,42$  (longueur d'onde  $\lambda = 1,84$ ) ; on est donc en eau profonde. L'amplitude de la houle générée est alors, toujours d'après la théorie linéaire, très proche de  $a$ . En pratique, pour tous les résultats présentés ici la cambrure de la houle incidente est relativement faible et l'on supposera son amplitude égale à  $a$ .

Afin d'absorber la houle, une zone absorbante dont la longueur est égale à une longueur d'onde et demie peut être située à chaque extrémité du canal. Dans le cas de la houle générée par un batteur piston situé à gauche, une plage absorbante est placée à droite. La fonction  $\nu$  est alors donnée par :

$$\nu(X) = \alpha \omega \left[ \frac{\kappa}{2\pi} (X - X_0) \right]^2, \quad X \geq X_0,$$

où  $X_0$  est l'origine de la zone absorbante et  $\alpha$  est pris égal à 0,5.

La figure 1 donne un exemple de génération et d'absorption de houle dans le canal numérique. Le calcul s'effectue ici avec 40 points de discrétisation par longueur d'onde <sup>1</sup> et 40 pas de temps par période. La longueur du bassin est 10 (soit 5,5 longueurs d'onde). La simulation est effectuée sur 15 périodes et le temps de calcul est d'environ 440 s. sur le CRAY-XMP de l'IFP. La cambrure de la houle est  $\kappa a = 0,15$ .

#### Diffraction de la houle sur un cylindre totalement immergé.

La première application que nous considérons est le calcul de la diffraction de la houle sur un cylindre totalement immergé (et fixe). On commence par comparer les résultats numériques pour le calcul des efforts aux résultats expérimentaux de Chaplin (1984) et théoriques d'Ogilvie (1963) et Vada (1987). On s'intéresse ensuite au calcul de la houle diffractée et l'on compare les résultats obtenus à ceux, expérimentaux, de Grue et Granlund (1988) et ceux, théoriques, de Vada (1987).

Comme nous l'avons déjà indiqué, il n'y a pas, au premier-ordre, de réflexion sur le cylindre. Ce résultat ayant été confirmé expérimentalement, cela permet de ne pas avoir à se soucier de la réflexion sur le batteur de l'onde réfléchie par le cylindre.

#### Efforts de diffraction.

Les efforts de diffraction sont calculés directement par intégration de la pression le long de la frontière du cylindre. Celle-ci est calculée numériquement à partir de l'équation de Bernoulli.

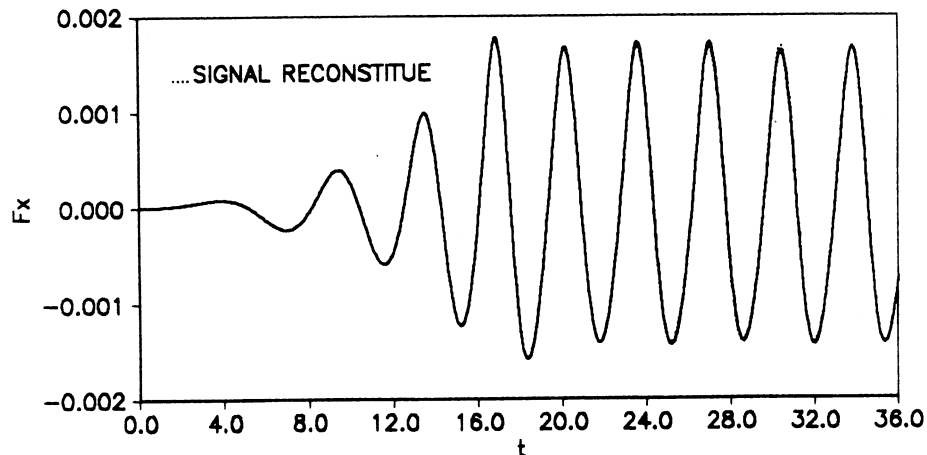


Figure 2 — Force horizontale transitoire sur le cylindre  
 $\kappa a = 0,10$ ,  $\kappa r = 0,21$ ,  $\kappa y_c = -0,41$

On montre sur la figure 2 un exemple de calcul transitoire de la force horizontale s'exerçant sur l'objet. Le cylindre est circulaire de rayon  $r = 0,06$ , la position de son centre est donnée par  $x_c = 3,5$ ,  $y_c = -0,12 = -2r$ . L'amplitude de la houle est  $a = 0,029$  ( $a\kappa = 0,10$ ). On rappelle que le batteur est mis en mouvement sinusoïdal à  $t = 0$ . Le calcul est effectué dans un canal de longueur 10 avec 200 marqueurs à la surface libre et environ 60 pas de temps par période. Pour une dizaine de périodes (600 pas de temps), le temps de calcul est de 450 s. sur le CRAY-XMP de l'IFP.

Afin de comparer ce calcul des efforts aux résultats expérimentaux et aux résultats linéaires, on analyse le signal établi par décomposition en série de Fourier. En supposant ce signal périodique, de pulsation  $\omega$ , on écrit alors pour les composantes horizontales et verticales de la force :

$$\frac{F_x}{r^3 \omega^2} = F_x^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_x^{(n)} \cos(n\omega t + \theta^{(n)})$$

<sup>1</sup>Seuls la surface libre et les murs verticaux du canal sont discrétisés lorsque le fond est plat. L'effet de celui-ci est pris en compte en prolongeant l'écoulement par symétrie.



$\kappa a$	$K_c$	$F_x^{(0)}$	$F_y^{(0)}$	$F_x^{(1)}$	$F_y^{(1)}$	$F_x^{(2)}$	$F_y^{(2)}$
0,05	0,50	0,00	0,04	1,07	1,07	0,07	0,07
0,07	0,75	0,00	0,10	1,58	1,58	0,15	0,15
0,10	1,00	-0,01	0,16	2,07	2,06	0,24	0,25
0,12	1,25	-0,02	0,24	2,52	2,51	0,33	0,34
0,14	1,47	-0,03	0,30	2,88	2,87	0,41	0,41

Tableau 1 — Efforts de diffraction

$$\kappa r = 0,21, \kappa y_c = -0,41$$

$$\frac{F_y}{r^3 \omega^2} = F_y^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_y^{(n)} \cos(n\omega t + \theta^{(n)}).$$

En pratique, l'analyse de Fourier est effectuée sur les quatre dernières périodes du signal. On indique sur la figure 2 le signal reconstitué à partir des deux premières harmoniques. Même si le régime n'est pas complètement établi, cette reconstitution est satisfaisante.

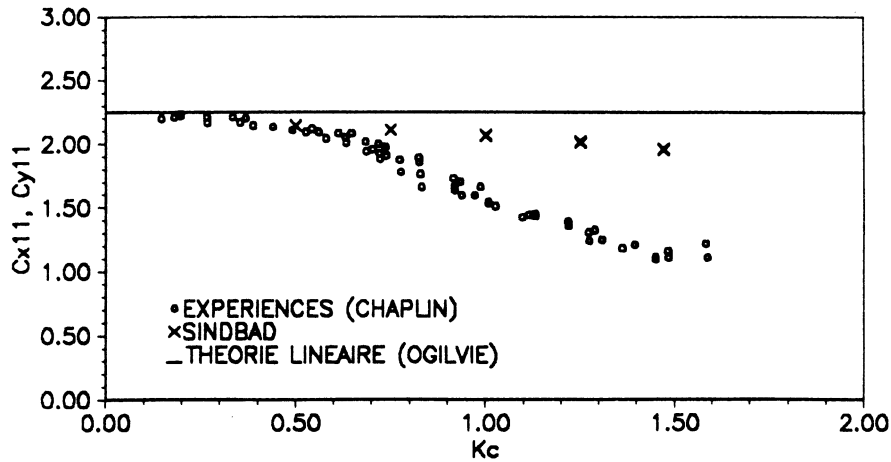


Figure 3 — Coefficients d'inertie

$$\kappa r = 0,21, \kappa y_c = -0,41$$

Il est classique d'introduire le nombre de Keulegan-Carpenter,  $K_c$ . Pour une houle linéaire en eau profonde,  $K_c$  est proportionnel à l'amplitude de la houle,

$$K_c = \frac{\pi a}{r} \exp(\kappa y_c).$$

Le tableau 1 donne les valeurs de  $F_x^{(n)}$  et  $F_y^{(n)}$  pour  $n = 0, 1, 2$  en fonction de  $K_c$  pour le cas décrit précédemment. Ce cas correspond au cas E de Chaplin (1984, p. 455).

En suivant Chaplin (1984), on écrira :

$$F_x^{(n)} = \sum_{m \geq 1} C_{xnm} K_c^m, \quad F_y^{(n)} = \sum_{m \geq 1} C_{ynm} K_c^m.$$

Les coefficients d'inertie classiques sont égaux à  $C_{x11}$  et  $C_{y11}$ . D'après la théorie linéaire, ces coefficients sont les seuls non-nuls et ils sont égaux. Ogilvie (1963) en donne la valeur numérique. Ils tendent vers 2 lorsque la profondeur d'immersion tend vers l'infini.

La figure 3 illustre les variations des coefficients d'inerties horizontaux et verticaux en fonction de  $K_c$ . Le coefficient d'inertie tend vers la valeur prédite par la théorie linéaire, 2,25, à faible cambrure.

S'il décroît bien avec  $K_c$ , en accord avec les résultats expérimentaux de Chaplin, cette décroissance est beaucoup moins rapide. Cela semble confirmer l'hypothèse de Chaplin selon laquelle ce phénomène serait dû à la viscosité (création d'une circulation autour du cylindre). On notera cependant que ce cas, le seul correspondant à un cylindre faiblement immergé étudié de manière détaillée par Chaplin, est relatif à un cylindre de faible dimension par rapport à la longueur d'onde de la houle ( $\kappa r = 0,21$ ).

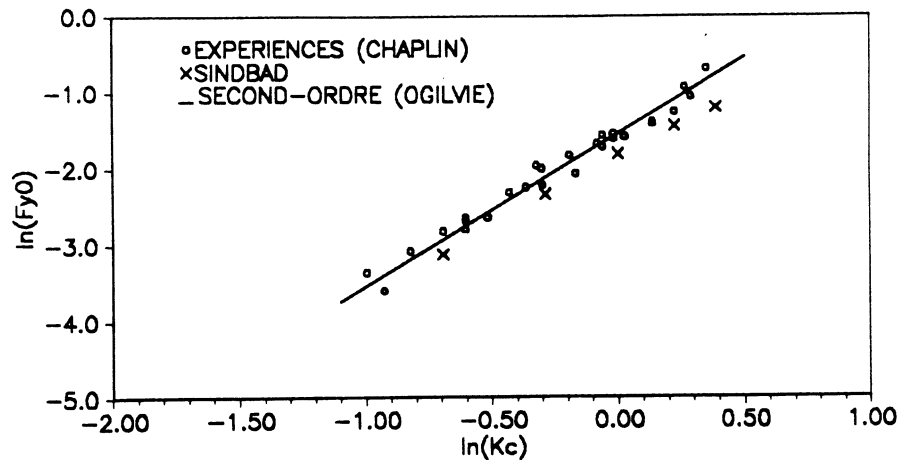


Figure 4 — Force de dérive verticale  
 $\kappa r = 0,21, \kappa y_c = -0,41$

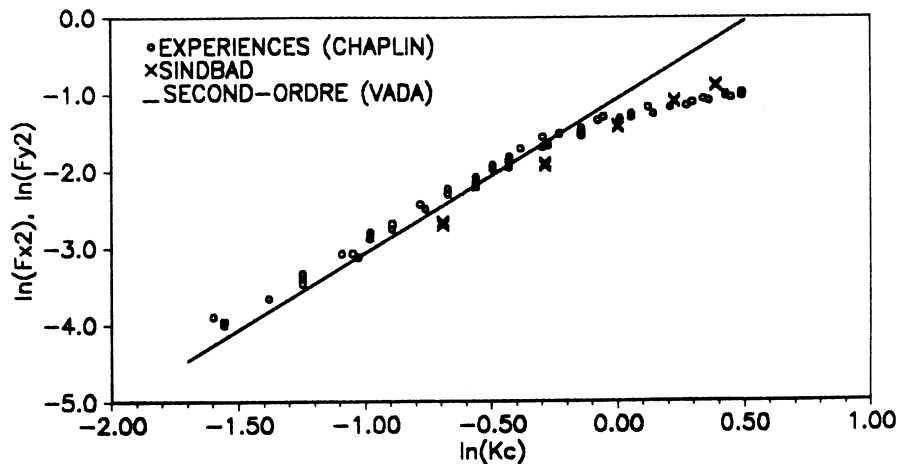


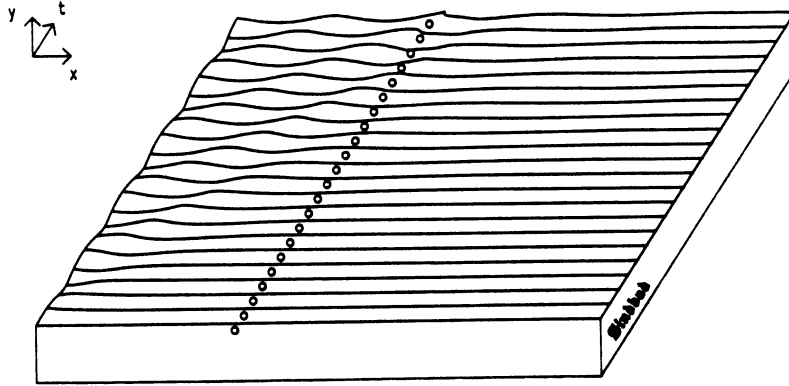
Figure 5 — Seconde harmonique  
 $\kappa r = 0,21, \kappa y_c = -0,41$

Au second-ordre, il n'y a pas de force de dérive horizontale. Le calcul conduit effectivement à des valeurs très faibles de  $F_x^{(0)}$ , de l'ordre de grandeur de la précision du calcul. On notera cependant qu'un effort de dérive horizontale négatif semble apparaître lorsque la cambrure augmente (tableau 1). Ces résultats, qui ne peuvent apparaître qu'à un ordre supérieur ou égal au quatrième, vont dans le sens de ceux obtenus en utilisant une théorie spectrale par Dommermuth (1987).

Les figure 4 et 5 montrent la variation de  $F_y^{(0)}$  et  $F^{(2)}$  avec  $K_c$ . Les résultats du calcul sont comparés aux résultats expérimentaux de Chaplin (1984) et à ceux provenant d'un calcul au second-ordre (Ogilvie, 1963 ; Vada, 1987). On notera cependant que le calcul au second-ordre pour la force de dérive verticale  $F_y^{(0)}$  ne demande pas le calcul du potentiel au second-ordre.

A faible nombre de Keulegan-Carpenter, tous les résultats sont en bon accord entre eux. La simulation non-linéaire semble cependant sous-estimer les efforts. Cela peut être dû au fait qu'à faible cambrure la précision du calcul ne permet pas d'estimer de manière précise les efforts du second-ordre ou au fait que la houle générée par le batteur a une amplitude plus faible que  $a$ . Lorsque  $K_c$  augmente, on note que  $F^{(2)}$  ne se comporte plus en  $K_c$  au carré. Cette tendance est cependant bien prédite par le calcul numérique non-linéaire, de telle sorte que les effets visqueux ne semblent intervenir de manière significative que pour le coefficient d'inertie.

Le calcul effectué pour  $K_c = 2,00$  ( $\kappa a = 0,20$ ) conduit au déferlement. Ce déferlement se traduit par la création d'un jet juste à l'aval du cylindre (figure 6).



**Figure 6 — Déferlement sur le cylindre**

$$\kappa a = 0,20, \kappa r = 0,21, \kappa y_c = -0,41$$

#### *Houle diffractée.*

Après les efforts exercés sur le cylindre, nous nous intéressons à la houle diffractée. D'après la théorie au second-ordre, une onde libre de nombre d'onde  $4\kappa$  (et de pulsation  $2\omega$ ) est créée au passage sur le cylindre. Des calculs récents (Vada, 1987) ont montré que l'amplitude de cette onde libre peut être du même ordre de grandeur que celle de l'onde incidente. Dans le cadre de la théorie au second-ordre, l'onde incidente s'écrit :

$$a \cos(\kappa x - \omega t + \theta) + \frac{1}{2} a^2 \kappa \cos 2(\kappa x - \omega t + \theta),$$

et l'onde diffractée :

$$a_1 \cos(\kappa x - \omega t + \theta_1) + a_2' \cos 2(\kappa x - \omega t + \theta_1) + a_2 \cos(4\kappa x - 2\omega t + \theta_2),$$

où  $a_2' = \frac{1}{2} a_1^2 \kappa$ .

Des résultats expérimentaux (Grue et Granlund, 1988) ont été obtenus pour valider les résultats théoriques de Vada (1987). Ils se situent donc dans le domaine où une réponse au second-ordre importante est attendue.

Nous avons étudié le cas pour lequel Grue et Granlund donnent des résultats expérimentaux. Dans notre canal, cela conduit à prendre  $r = 0.117$  et  $y_c = -0.1755$ . On a alors  $\kappa r = 0,4$  et  $y_c = -1,5r$ .

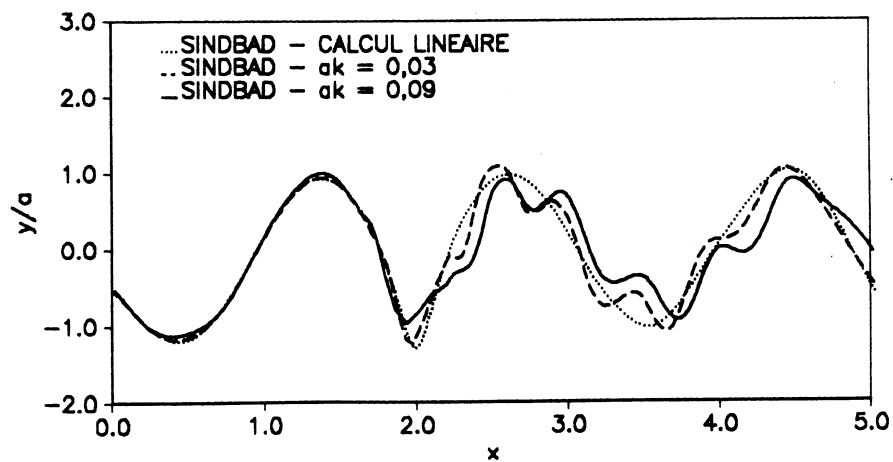
Afin de mettre en évidence l'apparition des ondes courtes diffractées, il est nécessaire d'utiliser un maillage très fin : la longueur d'onde de l'onde libre de pulsation  $2\omega$  est en effet quatre fois plus courte que celle de l'onde mère. Nous avons pris  $x_c = 2$  et un canal de longueur 8, avec 340 marqueurs sur la surface libre (pour un total de 400). Avec environ 60 pas de temps par période du fondamental et un calcul sur une dizaine de périodes, on arrive à un temps de calcul de 1400 s. sur le CRAY-XMP de l'IFP.

$\kappa a$	$K_c$	$F_x^{(0)}$	$F_y^{(0)}$	$F_x^{(1)}$	$F_y^{(1)}$	$F_x^{(2)}$	$F_y^{(2)}$
0,03	0,13	0,00	0,02	0,31	0,32	0,02	0,02
0,05	0,21	0,00	0,03	0,47	0,47	0,03	0,03
0,07	0,30	0,00	0,06	0,64	0,64	0,05	0,05
0,09	0,37	-0,01	0,08	0,77	0,75	0,06	0,07
0,10	0,44	-0,02	0,10	0,90	0,88	0,08	0,09

**Tableau 2 — Efforts de diffraction**

$$\kappa r = 0,40, \kappa y_c = -0,60$$

De la même manière que dans le cas précédent, on a calculé les efforts. Ces résultats sont donnés dans le tableau 2. On observe sur ce tableau des tendances similaires à celles du tableau 1. En particulier, on notera que le calcul semble indiquer l'existence d'un effort de dérive horizontal négatif.



**Figure 7 — Houle diffractée**

$$\kappa r = 0,4, \kappa y_c = -0,60, t = 7T$$

On montre sur la figure 7 les profils de surface libre à  $t = 7T$  pour différentes amplitudes de la houle incidente. Si l'apparition d'ondes courtes à l'aval du cylindre est évidente, on constate que leur amplitude relative ne croît pas comme le carré de la houle incidente (ce que prédit une théorie au second-ordre).

$a\kappa$	$K_c$	$a_1/a$	$a_2^t/a$	$a_2/a$
0,03	0,13	0,87	0,03	0,25
0,05	0,21	0,78	0,03	0,28
0,07	0,30	0,73	0,03	0,28
0,09	0,37	0,70	0,04	0,23
0,10	0,44	0,70	0,04	0,22

**Tableau 3 — Houle diffractée**

$$\kappa r = 0,40, \kappa y_c = -0,60, t_0 = 7T, x_0 = x_c + 1,36\lambda$$

Afin d'étudier ce phénomène de manière plus précise, on effectue une analyse harmonique de l'onde diffractée. Cette analyse s'effectue en espace, à un instant donné ( $t = t_0$ ), sur une longueur d'onde

du signal ( $x \in [x_0 - \lambda, x_0]$ ). Le tableau 3 donne les résultats obtenus pour  $t_0 = 7T$  et  $x_0 = x_c + 1,36\lambda$ . La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus à un autre point de mesure conduit à un bon accord pour les amplitudes du second-ordre (écart inférieur à 4 %). L'accord est moins bon pour les amplitudes linéaires (écart allant jusqu'à 10 %). Cela provient du fait que le coût du calcul a conduit à réduire la taille du bassin et le temps de simulation.

En tout état de causes, le comportement qualitatif est le même : l'amplitude de l'onde transmise du premier-ordre décroît avec l'amplitude incidente ; l'amplitude de l'onde transmise du second-ordre croît puis passe par un maximum. Ces deux effets sont non-linéaires ; ils ne peuvent pas être pris en compte par une théorie au second-ordre.

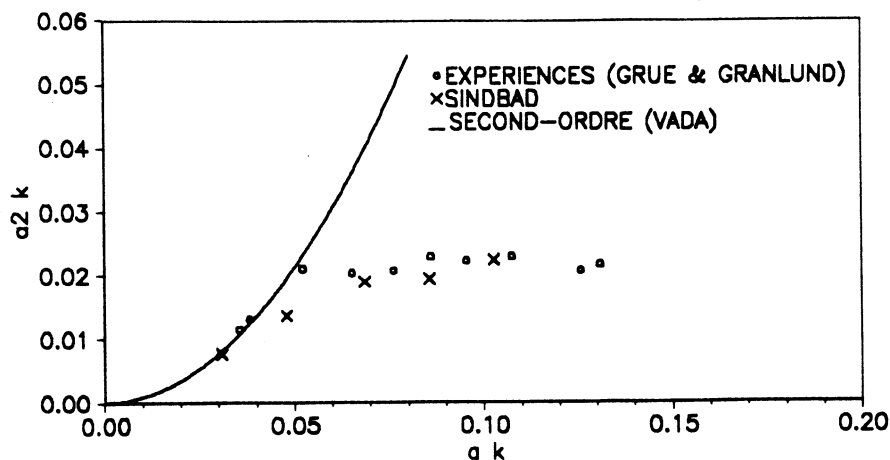


Figure 8 — Onde libre diffractée du second-ordre  
 $\kappa r = 0,40$ ,  $\kappa y_c = -0,60$

Sur la figure 8, on compare les résultats expérimentaux, ceux de la théorie au second-ordre et ceux de la simulation numérique pour l'onde libre du second-ordre. L'accord entre la simulation et les expériences est excellent. Il conduit à la conclusion que le domaine de validité de la théorie au second-ordre est, dans ce cas particulier, plutôt restreint.

On notera que le calcul numérique donne toujours des résultats pour  $a\kappa \geq 0,085$  alors que le déferlement est observé expérimentalement. Cela est vraisemblablement dû au lissage de la solution qui est utilisé afin d'empêcher l'apparition d'instabilités dont l'origine (physique et/ou numérique) n'est pas bien identifiée. L'apparition d'instabilités dans le calcul se traduit par le fait que, pour  $a\kappa \geq 0,085$ , une modification automatique du pas de temps est effectuée lorsque la première vague formée arrive sur le cylindre. Cette modification automatique du pas de temps, similaire à celle utilisée par Longuet-Higgins et Cokelet (1976), est effectuée dès que, durant une itération, une particule est déplacée d'une distance supérieure à la taille des segments voisins.

Pour  $a\kappa = 0,12$ , le calcul numérique n'a pas pu être poursuivi au delà de  $t = 10,9$ . De manière surprenante, l'instabilité n'apparaît pas à la crête de la vague située au dessus du cylindre mais au creux juste en aval de celui-ci. Physiquement, il semble que les particules soient entraînées très rapidement au-dessus du cylindre, conduisant à une concentration de particules à son aval et à une faible densité de particules à son sommet (figure 9).

Il serait évidemment intéressant de comparer ces calculs théoriques pour les trajectoires des particules à des observations expérimentales.

#### Pilonnement forcé d'un cylindre perçant la surface libre.

La seconde application que nous considérons est le calcul des efforts de radiation sur un cylindre à moitié immergé en mouvement de pilonnement forcé. Il s'agit d'illustrer les possibilités du code de calcul dans le cas du corps perçant.

Les caractéristiques du canal sont les mêmes que précédemment. C'est maintenant le cylindre qui joue le rôle de générateur de houle. Un mouvement de pilonnement lui est donné à partir de l'instant

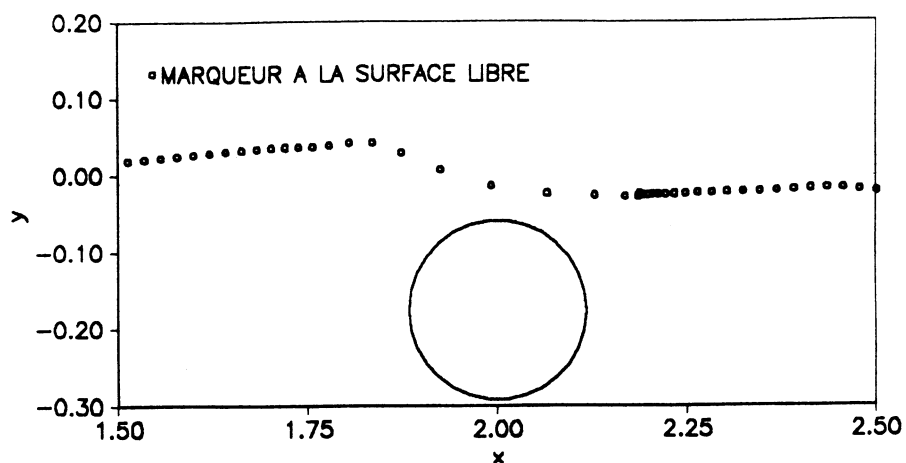


Figure 9 — Instabilité à l'aval du cylindre

$t = 0$  où le fluide est supposé au repos. Ce mouvement est défini par :

$$y_c = -a_p \cos(\omega t), \quad t > 0,$$

où  $a_p$  est l'amplitude du mouvement. De même que dans le cas précédent, on prend  $\omega = 1,85$  et le nombre d'onde de la houle radiée est  $\kappa \simeq 3,42$ .

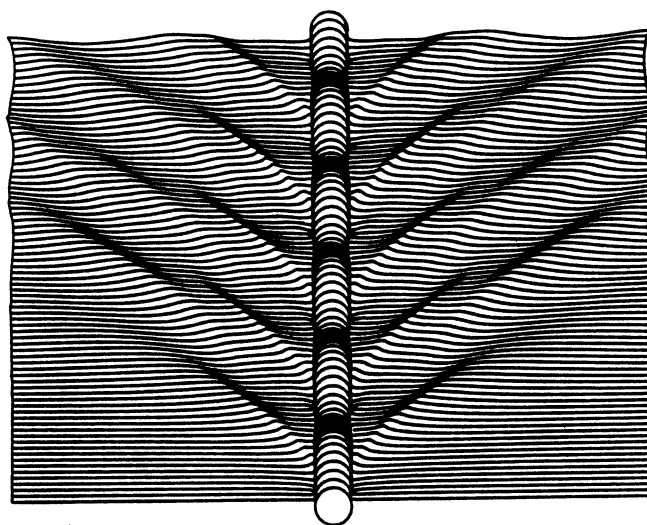


Figure 10 — Pilonnement forcé d'un cylindre  
 $\kappa r = 0,64, a_p = 0,4r$

Afin d'éviter la réflexion des ondes radiées sur les bords du domaine de calcul, une zone absorbante est située dans ce cas des deux côtés du canal. Les caractéristiques de ces zones sont identiques à celles de la zone absorbante utilisée dans le cas précédent.

A cause des mouvements du cylindre, le marqueur le plus proche de l'objet peut se rapprocher ou s'éloigner excessivement du point d'intersection, conduisant à des difficultés numériques. Celles-ci sont évitées en utilisant un remaillage automatique de la surface libre dès que la distance du marqueur au

point d'intersection devient plus petite que  $c_{min} \Delta$  ou plus grande que  $c_{max} \Delta$ ,  $\Delta$  étant le pas moyen de maillage de la surface libre. En pratique, on prend  $c_{min} = 0,2$  et  $c_{max} = 0,8$ . Le remaillage s'effectue en utilisant des splines cubiques.

On montre sur la figure 10 les profils de surface libre pour  $\kappa r = 0,64$  et  $a_p = 0,4r$  (ne sont représentés que les deux tiers du domaine de calcul). Certaines difficultés numériques apparaissent dans la phase de décélération du mouvement haut. Elles se traduisent encore par une modification automatique du pas de temps. Ce phénomène a également été observé numériquement par Hwang et al. (1987) ; physiquement, il semble qu'un jet soit créé au voisinage de l'intersection. Pour le calcul présenté ici, on notera cependant que le maillage est uniforme et qu'aucun lissage particulier n'est appliqué à l'intersection.

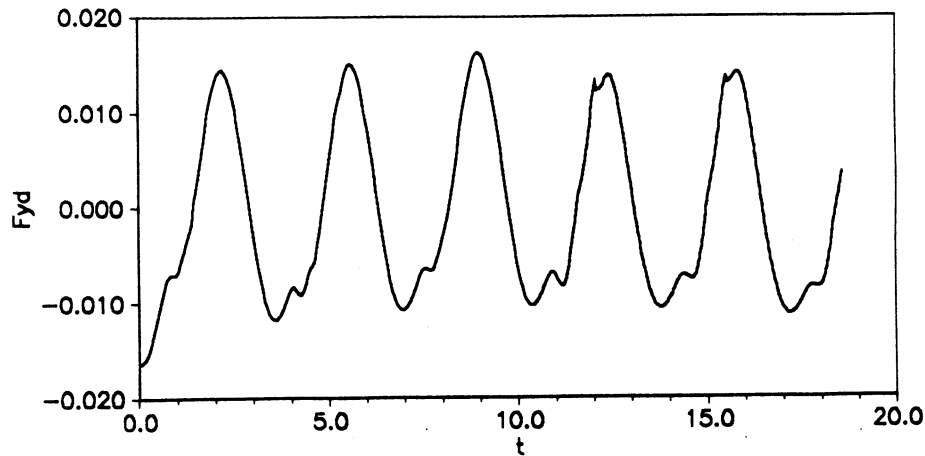


Figure 11 — Force verticale dynamique sur le cylindre  
 $\kappa r = 0,64$ ,  $a_p = 0,4r$

Enfin, on montre sur la figure 11 la force verticale dynamique sur le cylindre (c'est-à-dire la force verticale à laquelle on a retirée la force hydrostatique calculée analytiquement) pour  $\kappa r = 0,64$  et  $a_p = 0,4r$ . Les résultats sont en accord raisonnable avec ceux de Hwang et al. (1987). En particulier, l'analyse harmonique permet de calculer la masse ajoutée et le coefficient d'amortissement. On constate que la masse ajoutée croît avec l'amplitude du mouvement de pilonnement tandis que le coefficient d'amortissement décroît, en accord avec les résultats expérimentaux de Yamashita (1977). Des résultats plus détaillés seront publiés ultérieurement.

#### Conclusions.

On a présenté une méthode numérique (logiciel **Sindbad**) de calcul des efforts de diffraction-radiation sur un cylindre horizontal partiellement ou totalement immergé, fixe ou en mouvement forcé. Outre les efforts, les déformées de surface libre sont calculées. Cette méthode permet de s'affranchir des hypothèses classiques de faible cambrure (et/ou petits mouvements) ; seule subsiste l'hypothèse d'écoulement irrotationnel.

Alors même que le calcul s'effectue ici en transitoire et dans un domaine borné, la méthode permet de retrouver avec une précision satisfaisante les résultats des théories asymptotiques en régime établi au premier et second-ordre. La simulation non-linéaire permet de plus d'évaluer le domaine de validité des théories asymptotiques. Elle est, en général, en bon accord avec les résultats expérimentaux disponibles.

Les principales limitations de la méthode tiennent au fait que les effets visqueux ne sont pas pris en compte et, surtout, que la simulation ne peut être poursuivie au-delà du déferlement.

Ses extensions en cours ou à venir incluent la mise au point d'un batteur-absorbeur pour généraliser les calculs de diffraction et l'étude des mouvements libres d'un flotteur. On disposera ainsi d'un outil de calcul permettant de résoudre une large classe de problèmes potentiels bidimensionnels, à la fois en théorie linéaire et en théorie non-linéaire.

**Remerciements.**

Cette étude a été effectuée en partie dans le cadre d'une convention entre l'IFP et la DRET (convention DRET N° 88/073). Cette dernière est remerciée pour son soutien.

**Références.**

Chaplin, J.R., 1984, "Nonlinear forces on a horizontal cylinder beneath waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 147, pp. 449-464.

Cointe, R., 1988, "Remarks on the numerical treatment of the intersection point between a rigid body and a free surface," *Proceedings, Third International Workshop on Water Waves and Floating Bodies* (Woods Hole).

Cointe, R., Jami, A., et Molin, B., 1987, "Nonlinear impulsive problems," *Proceedings, Second International Workshop on Water Waves and Floating Bodies* (Bristol).

Cointe, R., Molin, B., et Nays, P., 1988, "Nonlinear and second-order transient waves in a rectangular tank," *Proceedings, BOSS'88* (Trondheim), Tapir Publishers, Trondheim, pp. 705-719.

Dean, W.R., 1948, "On the reflexion of surface waves by a submerged circular cylinder," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 44, pp. 483-491.

Dommermuth, D.G., 1987, "Numerical methods for solving nonlinear water-wave problems in the time domain," Ph.D. Dissertation, MIT.

Faltinsen, O.M., 1977, "Numerical solution of transient nonlinear free-surface motion outside and inside moving bodies," *Proceedings, Second Int. Conf. Num. Ship Hydrodynamics* (Berkeley).

Grue, J., et Granlund, K., 1988, "Impact of nonlinearity upon waves traveling over a submerged cylinder," *Proceedings, Third International Workshop on Water Waves and Floating Bodies* (Woods Hole).

Hwang, J.H., Kim, Y.J., et Kim, S.Y., 1988, "Nonlinear hydrodynamic forces due to two-dimensional forced oscillations," *Proceedings, IUTAM Symposium on Nonlinear Water Waves* (Tokyo), Springer-Verlag, Berlin, pp. 231-238.

Lin, W.-M., Newman, J.N., et Yue, D.K., 1984, "Nonlinear forced motions of floating bodies," *Proceedings, Fifteenth Symposium Naval Hydrodynamics* (Hambourg), National Academy Press, Washington, D.C.

Longuet-Higgins, M.S., et Cokelet, E.D., 1976, "The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation," *Proc. R. Soc. London*, Vol. A 364, pp. 1-26.

Ogilvie, T.F., 1963, "First- and second-order forces on a cylinder submerged under a free surface," *J. Fluid Mech.*, Vol. 16, pp. 451-472.

Stansby, P.K., et Slaouti, A., 1984, "On non-linear wave interaction with cylindrical bodies: a vortex sheet approach," *Appl. Ocean Res.*, Vol. 6, pp. 108-115.

Ursell, F., 1950, "Surface waves in the presence of a submerged circular cylinder, I and II," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 46, pp. 141-158.

Vada, T., 1987, "A numerical solution of the second-order wave-diffraction problem for a submerged cylinder of arbitrary shape," *J. Fluid Mech.*, Vol. 174, pp. 23-37.

Yamashita, S., 1977, "Calculations of the hydrodynamic forces acting upon thin cylinders oscillating vertically with large amplitude," *J. Soc. Naval Arch. Japan*, Vol. 141.