

---

Discrétisation des Equations de Navier-Stokes  
Pour un Ecoulement Incompressible

G. B. DENG

LHN, Groupe de Modélisation Numérique  
ENSM NANTES

Résumé

Quelques problèmes concernant la méthode de Rhie & Chow sont discutés: le mode de localisation des variables dépendantes, les conditions aux limites pour le champ de pression et le traitement du terme instationnaire. Des schémas utilisés pour discrétiser l'équation de transport sont comparés. Un schéma simple, précis, facile à utiliser dans le cas tridimensionnel est proposé. Il permet le calcul d'un écoulement à grand nombre de Reynolds.

Summary

Some problems concerning the application of the method of Rhie & Chow are discussed: grid configurations, boundary conditions applied to the pressure field, and treatment of the unsteady term in the pressure equation. Some schemes used for the discretization of transport equation are compared. A scheme which is simple, accurate and easy to extend to three-dimensional cases is proposed. It can be used to calculate large Reynolds number flows.

## 1. Introduction

Malgré l'augmentation de la puissance des ordinateurs, le temps de calcul et la taille mémoire représentent encore d'importantes limitations lorsque l'on souhaite résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles pour un fluide incompressible.

S'il est souhaitable d'utiliser un maillage colocalif, car l'opérateur de convection peut être mis sous une forme discrète commune à toutes les équations de transport, on constate que depuis longtemps, l'utilisation d'un maillage entrelacé domine par suite des exigences d'obtention d'une solution en pression ne présentant pas "d'oscillations en damier". Rhie & Chow ont proposé en 1981 une nouvelle méthode d'interpolation permettant d'utiliser un maillage colocalif tout en s'affranchissant des "oscillations en damier" considérées jusqu'alors comme inévitables avec un maillage colocalif. Cette contribution majeure a conduit à une popularisation croissante du maillage colocalif (Peric [1985], Majumdar et al [1988], Patel & Chen [1989]) etc. Toutefois certains problèmes subsistent lors de l'utilisation de cette méthode: comment localiser des variables dépendantes, quelles conditions aux limites doivent être imposées sur le champ de pression, et comment traiter le terme instationnaire dans l'équation de pression, etc. La première partie de cet article est consacrée à l'examen de ces problèmes.

Le choix de la discrétisation de l'équation de transport est une autre difficulté importante commune à toutes les méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes. Dans la deuxième partie, des schémas à 9 points (ou 27 points en 3D) sur un maillage structuré sont étudiés. Du point de vue de la simplicité et de la précision des algorithmes, force est en effet de constater que peu de méthodes sont satisfaisantes pour résoudre un écoulement à grand nombre de Reynolds, surtout dans le cas tridimensionnel.

Le schéma décentré hybride est simple, stable dans le cas des grands nombre de Reynolds, mais sa précision est peu satisfaisante et il pose encore quelquefois des problèmes de convergence. Il est souhaitable d'utiliser un schéma qui a, au moins dans certain cas, une précision du second ordre. La méthode de Chen & Chen [1982], dite "finite analytique", possède une précision du second ordre quand le pas du maillage  $h \rightarrow 0$ , et est stable quand le nombre de Reynolds devient grand. Cette méthode a été couronnée de succès en 2D et 3D parabolisé. Mais sa complexité et son coût empêchent son application dans le cas de résolution des équations de Navier-Stokes complètes dans un domaine tridimensionnel.

C'est dans le but de trouver une méthode simple, relativement précise et adaptée au calcul des écoulements de forte convection que la discrétisation exponentielle a été exploitée. Une méthode basée sur cette discrétisation est proposée. Les résultats obtenus dans une cavité entraînée montrent que la méthode proposée a une précision formelle en  $H^2$ . L'extension de cette méthode à des problèmes tridimensionnels est également étudiée.

## 2. Equations et Notations sur la Transformation de Système de Coordonnées.

Afin de simplifier la présentation, l'argumentation va être développée dans le cas bidimensionnel. Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations régissant un écoulement incompressible bidimensionnel sont les suivantes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2.3)$$

Les variables dans ces équations adimensionnelles ont leur signification habituelle. En introduisant les notations suivantes pour la transformation de système de coordonnées:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{J} \left( b_1^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + b_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{J} \left( b_2^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + b_2^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (2.5)$$

$$\Delta = g^{11} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \eta} + f^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + f^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.6)$$

où

$$b_1^1 = y_\eta$$

$$b_1^2 = -y_\lambda$$

$$b_2^1 = -x_\eta$$

$$b_2^2 = x_\lambda$$

$$g^{11} = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$$

$$g^{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$g^{12} = x_\lambda x_\eta + y_\lambda y_\eta$$

$$J = \sqrt{g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12}} = |x_\lambda y_\eta - x_\eta y_\lambda|$$

$$f^1 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \lambda} (J g^{1j})$$

les trois équations (2.1) - (2.3) peuvent être mises sous la forme suivante:

$$(b_1^1 U + b_2^1 V)_\lambda + (b_1^2 U + b_2^2 V)_\eta = 0 \quad (2.7)$$

$$g^{11} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 2A \frac{\partial U}{\partial \lambda} + 2B \frac{\partial U}{\partial \eta} + S_u \quad (2.8)$$

$$g^{11} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + g^{22} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 2A \frac{\partial V}{\partial \lambda} + 2B \frac{\partial V}{\partial \eta} + S_v \quad (2.9)$$

où

$$2A = \frac{\text{Re}}{J} (b_1^1 U + b_2^1 V) - f^1$$

$$2B = \frac{\text{Re}}{J} (b_1^2 U + b_2^2 V) - f^2$$

$$S_u = \text{Re} \frac{1}{J} (b_1^1 P_\lambda + b_1^2 P_\eta) - 2g^{12} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \eta}$$

$$S_v = \text{Re} \frac{1}{J} (b_1^2 P_\lambda + b_2^2 P_\eta) - 2g^{12} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial \eta}$$

L'équation de continuité est mise sous la forme fortement conservative (2.7). Les équations (2.8) et (2.9) sont classiquement discrétisées par un schéma à 9 points, ce qui nous donne une formule discrète notée sous la forme suivante si l'inconnue  $\phi$  représente l'une des composantes de vitesse (ou toute autre quantité transportée):

$$\phi_p = \sum C_{nb} \phi_{nb} - C_q S_\phi \quad (2.10)$$

Les coefficients  $C_{nb}$  et  $C_q$  résultent du choix de la méthode de discrétisation, ils dépendent des composantes de la vitesse d'advection  $U$ ,  $V$  et des paramètres géométriques de la molécule. Le problème stationnaire est souvent résolu comme limite quand  $t \rightarrow \infty$  du problème d'évolution. Dans ce cas, la forme discrète de l'équation de transport instationnaire s'écrit:

$$\phi_p^{(n+1)} = \frac{\sum C_{nb} \phi_{nb} + C_q (\text{Re } \phi_p^{(n)} / \tau - S_\phi)}{1 + C_q \text{Re} / \tau} \quad (2.11)$$

où  $\tau$  est le pas de temps. Une différentiation implicite de la dérivée temporelle est utilisée pour obtenir cette formule.

### 3. La Construction de l'Equation de Pression

#### 3.1 Le Choix des Méthodes d'Interpolation

L'une des principales difficultés que l'on rencontre dans la résolution numérique des écoulements incompressibles est que ni l'équation de continuité ni les équations de quantité de mouvement ne peuvent fournir une équation différentielle permettant de résoudre le champ de pression. Il est toutefois possible d'en obtenir une en reportant l'équation de quantité de mouvement dans l'équation de continuité. Cela est en général effectué sur les formes discrétisées.

C'est sur la construction de l'équation de pression que reposent les diverses méthodes de discrétisation, une fois introduits les choix de variables dépendantes et le mode d'entrelacement. Une méthode de discrétisation doit assurer le couplage des champs de pression et de vitesse, fournir une équation de pression qui assure la convergence du schéma, minimiser le temps de calcul et la taille mémoire.

En général, les équations de quantité de mouvement servent à déterminer le champ de vitesse, alors que l'équation de continuité est utilisée pour construire l'équation de pression.

Afin d'assurer la conservation de la masse, l'équation de continuité est souvent discrétisée sous forme conservative. Les flux traversant les faces du volume de contrôle doivent être connus et les méthodes permettant de les évaluer peuvent être classées en deux groupes.

Les flux nécessaires peuvent être interpolés à partir des variables dépendantes servant à définir le champ de vitesse. Pour cette méthode, dite d'interpolation directe, le succès dépend du choix des variables dépendantes ainsi que leur mode d'entrelacement. Un maillage entrelacé est souvent utilisé. Voir Karki [1986] et Peric [1985] pour une discussion sur ce sujet. Parmi plusieurs possibilités, Karki a choisi la composante covariante dans un maillage entrelacé comme variable dépendante. Les équations de quantité de mouvement dans un système cartésien local sont alors discrétisées sans évaluation des symboles de Christoffel. Bien que cette méthode permette de résoudre un écoulement dans un domaine complexe, les exigences de taille mémoire et de temps de calcul sont très lourdes lorsqu'un écoulement tridimensionnel est calculé au moyen d'une molécule à 27 points si bien que cette méthode, séduisante dans son principe a été abandonnée. La méthode développée dans ce travail relève plutôt du second groupe des méthodes, dite méthodes d'interpolation indirecte. Elles permettent d'utiliser un maillage colocalif et elles se caractérisent par le fait que le flux permettant d'établir le bilan local de la masse ne peut pas être représenté par des interpolations de variables dépendantes quelle que soit la méthode d'interpolation utilisée. On peut trouver un mode de calcul des flux de façon telle que le couplage du champ de pression est assuré pour tout choix de variable dépendante et pour tout mode d'entrelacement. Toutefois, en générale, à la suite de Rhie & Chow, les composantes cartésiennes (ou polaires) de vitesse sont retenues comme variables dépendantes et le maillage est choisi colocalif.

La particularité essentielle de cette méthode réside dans le mode d'interpolation utilisé afin d'évaluer les flux intervenant dans le bilan local de masse. Au lieu d'utiliser une interpolation (3.1) pour évaluer le flux  $U_e$  (Fig. 1),

$$U_e = 0.5 * (U_P + U_E) \quad (3.1)$$

ce qui conduirait à un champ de pression bruité par une oscillation en damier. Rhie et Chow ont proposé une interpolation qui évite les oscillations en damier. La formule discrète de l'équation de quantité de mouvement (2.10) est réécrite sous la forme (3.2):

$$U = \hat{U} - C_U P_x \quad (3.2)$$

où

$$U = \sum C_{nb} U_{nb} + C_q \cdot 2g^{12} U_{,3} \eta$$

$$C_U = Re C_q$$

Contrairement à (3.1), l'interpolation ne porte plus sur  $U$ , mais sur  $\hat{U}$  et  $C_U$ . le terme  $P_x$  est évalué au point  $e$ . Ainsi:

$$U_e = 0.5 * (\hat{U}_E + \hat{U}_P) - 0.5 * (C_{UE} + C_{UP}) P_{,xe} \quad (3.3)$$

### 3.2 Localisation des Variables Dépendantes et Conditions aux Limites Pour le Champ de Pression

Il est bien connu que pour le modèle continu, quand une condition de Dirichlet est imposée sur le champ de vitesse, les équations de Navier-Stokes sont bien déterminées: aucune condition aux limites n'est nécessaire pour le champ de pression. Mais, pour le modèle discret, si l'on veut évaluer le gradient de pression partout par une formulation centrée dans le plan de calcul, on est obligé d'ajouter des inconnues en pression à la surface du domaine. Il est donc nécessaire d'imposer des conditions aux limites supplémentaires - non nécessaires pour le modèle continu - afin de fermer les équations discrètes. Toutefois, un choix judicieux des variables dépendantes et de leur mode de localisation simplifie l'écriture des conditions aux limites. Certains modes de localisation vont être examinés dans ce qui suit en supposant connues les composantes de vitesse à la paroi.

#### Mode 1

On localise toutes les inconnues au noeud du maillage (Fig. 1). Pour ce mode de localisation, la pression à la paroi est nécessaire. Par exemple,  $P_S$  est indispensable pour évaluer le débit à travers la surface DC. Ce débit intervient dans le bilan local de masse permettant de construire l'équation de pression au point C. Il manque une équation pour déterminer  $P_S$ . Donc, il est nécessaire d'avoir des conditions aux limites pour pouvoir résoudre le système d'équations de pression. Ici, on ne s'intéresse pas à la façon dont ces conditions aux limites sont précisées, mais plutôt aux autres modes de localisation permettant de supprimer les inconnues en pression à la paroi.

#### Mode 2

Les variables dépendantes sont toutes localisées au centre du volume. Pour ce mode de localisation, il est possible d'établir le bilan local de masse pour les volumes de contrôle qui se trouvent à la frontière - le volume ABCD (Fig. 2) par exemple - sans faire intervenir les inconnues en pression à la paroi. Il faut à cette fin utiliser une dérivée décentrée pour évaluer certains termes peu importants du gradient de pression. L'influence sur la précision de la solution est alors faible.

Le flux traversant DC est une quantité connue quand une condition de Dirichlet est imposée sur le champ de vitesse. Seul le terme  $P_\eta$  évalué aux points e et w fait intervenir  $P_S$ ,  $P_{Se}$  et  $P_{Sw}$  qui se trouvent à la paroi si une formule centrée est utilisée. Si la contribution de  $P_\eta$  est petite, une dérivée décentrée suffisante ne fera pas intervenir les inconnues de pression aux points frontières. Comme le modèle continu, les conditions aux limites imposées sur le champ de vitesse permettent alors de déterminer le champ de pression et aucune condition supplémentaire n'est nécessaire. Pour que la solution soit unique, il suffit que les conditions aux limites imposées sur le champ de vitesse vérifient la condition d'incompressibilité, c'est-à-dire,

$$\int \vec{V} \cdot \vec{n} \, da = 0 \quad (3.4)$$

et que le niveau de champ de pression soit fixé sur un point quelconque. Afin de clarifier l'argument, reportons l'équation (3.2) dans (2.7) et examinons le coefficient du terme  $P_\eta$  évalué au point e. Ce coefficient est :

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{1}{J} b_1^1 C_u b_1^2 + \frac{1}{J} b_2^1 C_v b_2^2 \right) \\ & = - C_u (b_1^1 b_1^2 + b_2^1 b_2^2) / J \\ & = C_u (y_\eta y_\lambda + x_\eta x_\lambda) / J \\ & = C_u \vec{e}_\lambda \cdot \vec{e}_\eta / \sqrt{g^{11} g^{22}} / J \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où

$$\begin{aligned} C_u & = C_v = 0.5 (C_q^E + C_q^C) \operatorname{Re} \\ & \quad \frac{x_\lambda \vec{i} + y_\lambda \vec{j}}{\sqrt{g^{11}}} \\ \vec{e}_\lambda & = \frac{x_\eta \vec{i} + y_\eta \vec{j}}{\sqrt{g^{22}}} \\ \vec{e}_\eta & = \frac{x_\eta \vec{i} + y_\eta \vec{j}}{\sqrt{g^{22}}} \end{aligned}$$

Si le maillage est orthogonal à la paroi, le produit des deux vecteurs unités  $\vec{e}_\lambda \cdot \vec{e}_\eta$  est nul. Par conséquent, les inconnues de pression à la frontière n'interviennent pas dans l'équation de pression. Ce résultat provient de ce que l'on évalue en fait sur chaque facette de volume de contrôle, la composante contravariante de vitesse lors de la formation de l'équation de pression, la somme des dérivées de pression évaluées sur la facette représente le gradient de pression dans la direction perpendiculaire à cette facette qui "pilote" la composante contravariante de vitesse correspondante. Dans l'exemple donné, si le maillage est orthogonal, la direction de la composante contravariante de vitesse au point e est parallèle à  $\vec{e}_\lambda$ , si bien que le gradient de pression suivant cette direction ne fait pas intervenir des points qui se trouvent dans la direction  $\eta$

En général, le coefficient devant  $P_\eta$  n'est pas nul, mais il est souvent petit. On peut utiliser une dérivée décentrée pour évaluer  $P_\eta$ , c'est-à-dire:

$$P_\eta^e = \frac{P_N + P_{NE} - P_P - P_E}{2}$$

Les arguments suivants indiquent que cette mesure est acceptable:

(i). Pour la plupart des applications, l'orthogonalité du maillage au loin est quasiment assurée, l'utilisation d'une dérivée décentrée est donc sans influence au loin.

(ii). Il est difficile de maintenir l'orthogonalité d'un maillage à la surface d'un solide, mais si le gradient de vitesse le long de la ligne s'écartant de la paroi est grand, le gradient de pression est en général beaucoup plus petit. De

plus, le maillage est en général suffisamment fin au voisinage de la paroi pour qu'une différentiation précise du premier ordre soit suffisante.

(III). A l'intérieur du domaine, des dérivées centrées sont utilisées dans l'espace de calcul afin d'évaluer les gradients de pression, la programmation s'en trouve simplifiée. Toutefois, le maillage régulier dans l'espace de calcul correspond à un maillage non orthogonal et à pas inégaux dans l'espace physique. La précision du schéma dans l'espace physique n'a donc aucune raison d'être du second ordre. Il est donc probable que la dégradation d'erreur provoquée par la décentration aux frontières est minime en comparaison du gain obtenu résidant dans la non introduction de conditions aux limites numériques pour la pression.

En revanche, une dérivée décentrée ne doit pas être utilisée pour évaluer le gradient de pression intervenant dans l'équation de quantité de mouvement à la paroi: aucun terme de gradient de pression n'est nul dans ces équations même si le maillage est orthogonal. Mais une fois que le champ de pression à l'intérieur du domaine est connu, une dérivée décentrée du second ordre peut être utilisée afin de maintenir la précision. Par exemple:

$$P_{\eta}P = \frac{-P_{NN} + 4P_N - 3P_P}{2}$$

Pour le mode de localisation considéré ici, l'ennui provient de la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement dans des volumes de contrôle adjacents à la paroi. Outre l'utilisation d'une dérivée décentrée du second ordre pour maintenir la précision, il apparaît nécessaire d'utiliser des demi volumes de contrôle pour la discrétisation. Ces traitements spéciaux provoquent un changement brutal sur les coefficients de l'équation discrète et un changement structurel sur les dérivées de pression: ce qui rend le système non linéaire plus difficile à résoudre. Il en résulte différents problèmes: oscillations, difficulté d'imposition de conditions aux limites sur le champ de vitesse, hautes fréquences de l'erreur mal amorties à la paroi, etc.

Il est difficile de juger si ce mode de traitement des molécules à la frontière est seul à l'origine de ces problèmes, mais un mode permettant de mieux traiter les molécules à la frontière est appréciable. C'est dans ce but que le mode suivant est proposé.

### Mode 3

L'intérêt fondamental du maillage colocalif est, en localisant au même point l'ensemble des composantes de vitesse, de permettre d'utiliser les mêmes coefficients pour discrétiser toutes les équations de transport. Il n'est donc pas nécessaire d'évaluer la pression au même point que la vitesse. Pour ce mode, les composantes cartésiennes de vitesse sont localisées aux noeuds du maillage, et la pression est évaluée au centre du volume (Fig. 3). Par rapport au mode précédent, les exigences de taille mémoire et de temps de calcul sont presque identiques. Les conditions aux limites sur le champ de pression peuvent être traitées de la même façon. Il est en outre possible d'éviter d'utiliser à proximité des frontières des demi-volumes de contrôle et des dérivées décentrées du second ordre. Le seul inconvénient réside dans la nécessité d'interpoler les composantes de vitesse à la frontière pour établir le bilan local de masse.

### 3.3 Traitement du terme instationnaire dans l'équation de pression

Il est difficile de résoudre directement les équations de Navier-Stokes stationnaires à cause, d'une part de la nonlinéarité, et d'autre part de la

résolution du système linéarisé. Une approche pseudo-instationnaire est le plus souvent utilisée. Dans ce travail, le système linéarisé des équations de quantité de mouvement est résolu au moyen de l'algorithme PISO (Issa [1986]): le champ de vitesse et le champ de pression sont résolus séparément; le couplage entre eux est effectué itérativement par étapes successives de prédiction et de correction. Cet algorithme présente l'avantage d'être consistant en temps au problème instationnaire. Il apparaît à l'usage nécessaire de former une équation de pression transitoire en tenant compte du pas de temps utilisé dans l'équation de quantité de mouvement.

La méthode utilisée le plus souvent pour une méthode d'interpolation directe consiste à évaluer le flux permettant d'établir le bilan local de la masse en raccord avec (2.11), c'est-à-dire:

$$U_p^{(n+1)} = \frac{\Sigma C_{nb} U_{nb} + C_q (Re U_c^{(n)})/\tau - S_U}{1 + C_q Re/\tau} \quad (3.8)$$

$$= \frac{\hat{U} - C_u P_x + C_q Re U_c^{(n)}/\tau}{1 + C_q Re/\tau}$$

Dans l'équation de pression qui en résulte, le pas de temps  $\tau$  est retenu à la fois dans les termes source et dans les coefficients. Quand on utilise la méthode d'interpolation indirecte, le flux traversant la facette d'un volume de contrôle est interpolé à partir de cette équation. Il est nécessaire de traiter le terme instationnaire d'une façon telle que le résultat obtenu à convergence soit égal à celui obtenu à partir de l'équation stationnaire. Rappelons que ce dernier est donné par:

$$U^* = \hat{U} - \overline{C_u} P_x \quad (3.9)$$

où le signe "—" indique l'opérateur de moyenne spatiale.

Deux méthodes ont été testées: la première peut être utilisée pour résoudre un problème stationnaire, la seconde, un peu plus complexe, permet de résoudre un problème instationnaire.

La résolution d'un problème stationnaire repose sur l'utilisation de (3.10):

$$U^* = \hat{U} - \overline{C_u} P_x - \overline{C_q Re (U^{(n+1)} - U^{(n)})/\tau} \quad (3.10)$$

Le dernier terme étant nul à la convergence, le résultat est, par conséquence, indépendant du pas de temps. Dans l'équation de pression ainsi déduite, les coefficients sont indépendants du pas de temps, mais celui-ci est retenu dans les termes source. Les essais numériques effectués jusqu'à présent montrent que cette mesure permet aussi à l'algorithme PISO de résoudre le couplage vitesse-pression.

Cette méthode ne permet pas de résoudre un problème instationnaire, car le résultat transitoire est imprécis. Dans ce cas, la relation (3.10) est remplacée par (3.11):

$$(1 + \overline{C_q Re/\tau}) U^{*(n+1)} = \hat{U} - \overline{C_u} P_x + \overline{C_q Re/\tau} U^{*(n)}$$

soit:

$$U^{*(n+1)} = \frac{\hat{U} - \overline{C_u} P_x + \overline{C_q Re/\tau} U^{*(n)}}{1 + \overline{C_q Re/\tau}} \quad (3.11)$$

Pour que le résultat soit indépendant du pas de temps  $\tau$ , on doit calculer



$u^*(n)$  avec la même formule à l'itération précédente. Ce qui représente un travail supplémentaire.

#### 4. Discrétisation des Equations de Transport

Ayant choisi les variables indépendantes et le mode d'entrelacement, il reste à trouver une méthode pour discrétiser l'équation de transport. La précision, la propriété de convergence et le temps de calcul en sont les caractères les plus importants. Une formulation convective de l'équation de transport a été choisie. Elle facilite l'implantation de certaines méthodes comme la méthode "finite analytique".

Après une transformation de système de coordonnées, l'équation de transport peut se mettre sous la forme suivante dans le plan calcul:

$$\phi_{\lambda\lambda} + \phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta} = 2 A \phi_{\lambda} + 2 B \phi_{\eta} + 2 C \phi_{\zeta} + E \phi_t + S_{\phi} \quad (4.1)$$

On note la forme discrète de cette équation par:

$$\phi_p = \sum C_{nb} \phi_{nb} - C_p (E \phi_t + S_{\phi}) \quad (4.2)$$

Des schémas testés sont maintenant brièvement présentés.

##### (1) Schéma décentré (hybride)

Ce schéma nous donne une formule en 5 points (ou 7 points en 3D) avec tous les coefficients positifs. La faible précision, et surtout, la mauvaise convergence globale sont des inconvénients majeurs du schéma.

##### (2) Schéma multi-exponentiel

Pour présenter ce schéma ainsi que le schéma suivant, il est nécessaire de présenter la discrétisation exponentielle dans le cas monodimensionnel. La solution  $\phi(x)$  de l'équation différentielle (4.3)

$$\phi_{xx} = 2 A(x) \phi_x + Q(x) \quad (4.3)$$

sur l'intervalle  $[a, b]$  est approchée par la solution de l'équation (4.3)

$$\phi_{xx} = 2 a \phi_x + q \quad \text{où } a=A(0), \quad q=Q(0) \quad (4.4)$$

sur l'intervalle  $[-X_u, X_d]$  (Fig. 4). Cette solution analytique s'écrit:

$$\phi(x) = C_1 (e^{2ax} - 1) - q*x/2a + C_2 \quad (4.5)$$

Ayant déterminé les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  en utilisant les conditions aux limites

$$\phi(x) |_{x=-x_u} = \phi_u, \quad \phi(x) |_{x=x_d} = \phi_d \quad (4.6)$$

$\phi(x)$  est connue. Ceci nous permet d'exprimer  $\phi_c$  en fonction de  $\phi_u$  et  $\phi_d$ :

$$\phi_c = C_2 = C_u \phi_u + C_d \phi_d - C_q q \quad (4.7)$$

où

$$C_u = (e^{2a x_d} - 1) / (e^{2a x_d} - e^{-2a x_u})$$

$$C_d = (1 - e^{-2a x_u}) / (e^{2a x_d} - e^{-2a x_u})$$

$$C_q = \frac{x_d(e^{-2a x_u} - 1) + x_u(e^{2a x_d} - 1)}{2a (e^{2a x_d} - e^{-2a x_u})}$$

Ce schéma est précis au second ordre dans le cas unidimensionnel. L'extension de cette méthode à plusieurs dimensions d'espace s'effectue facilement. Il suffit de considérer  $(C_u \phi_u + C_d \phi_d - \phi_c) / C_q$  comme une discrétisation exponentielle du terme  $\phi_{xx} - 2a \phi_x$ . Par exemple, en 2D, la discrétisation exponentielle de l'équation

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 2A \phi_x + 2B \phi_y + q \quad (4.8)$$

s'écrit

$$(-\phi_c + C_e \phi_e + C_w \phi_w) / C_{qx} + (-\phi_c + C_n \phi_n + C_s \phi_s) / C_{qy} = q \quad (4.9)$$

Une formulation en 5 points (7 points en 3D) est obtenue où les coefficients sont tous positifs.

### (3) Schéma uni-exponentiel

Bien que la discrétisation exponentielle ait une précision en  $H^2$  en monodimension quand  $H \rightarrow 0$ , son extension multidimensionnelle ne permet pas d'atteindre une telle précision. C'est pour améliorer la précision que le schéma uni-exponentiel est proposé. On le montre en bidimensionnel.

Après une rotation de système de coordonnées, l'équation

$$\phi_{\lambda\lambda} + \phi_{\eta\eta} = 2A \phi_\lambda + 2B \phi_\eta + q \quad (4.10)$$

devient

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 2 \sqrt{(A^2 + B^2)} \phi_x + q \quad (4.11)$$

Le terme  $\phi_{xx} - 2 \sqrt{(A^2 + B^2)} \phi_x$  est exprimé par une discrétisation exponentielle (Fig. 4)

$$(-\phi_c + C_u \phi_u + C_d \phi_d) / C_q \quad (4.12)$$

Le terme  $\phi_{yy}$  est évalué par une formule centrée.

$$\phi_{yy} = (H^- \phi_p - (H^+ + H^-) \phi_c + H^+ \phi_m) / (0.5 H^+ H^- (H^+ + H^-)) \quad (4.13)$$

Comme les points U et D qui se situent dans la direction de convection sont utilisés pour la discrétisation du terme convectif, une amélioration de la précision par rapport au schéma précédent est escomptée.

Pour obtenir une formulation discrète, il faut encore exprimer  $\phi_u, \phi_d, \phi_p, \phi_m$  en fonction des inconnus  $\phi_e, \phi_w, \phi_n$  etc. Un polynôme du second d'ordre est utilisé comme fonction d'interpolation. Par exemple, à la frontière NW-W-SW, on suppose:

$$\phi(\eta) = 0.5\phi_{NW}\eta(\eta+1) - \phi_W(\eta+1)(\eta-1) + 0.5\phi_{SW}\eta(\eta-1) \quad (4.14)$$

D'où vient:

$$\phi_u = 0.5\phi_{NW}\eta_u(\eta_u+1) - \phi_W(\eta_u+1)(\eta_u-1) + 0.5\phi_{SW}\eta_u(\eta_u-1) \quad (4.15)$$

De même, on a:

$$\phi_d = 0.5\phi_{NE}\eta_d(\eta_d+1) - \phi_E(\eta_d+1)(\eta_d-1) + 0.5\phi_{SE}\eta_d(\eta_d-1) \quad (4.16)$$

$$\phi_p = 0.5\phi_{NE}\lambda_p(\lambda_p+1) - \phi_N(\lambda_p+1)(\lambda_p-1) + 0.5\phi_{NW}\lambda_p(\lambda_p-1) \quad (4.17)$$

$$\phi_m = 0.5\phi_{SE}\lambda_m(\lambda_m+1) - \phi_S(\lambda_m+1)(\lambda_m-1) + 0.5\phi_{SW}\lambda_m(\lambda_m-1) \quad (4.18)$$

On obtient ainsi une équation à 9 points dont les coefficients ne sont pas tous positifs. L'extension de cette méthode en tridimensionnel est relativement facile. Elle nécessite néanmoins une discrétisation spéciale pour les termes de diffusion pour la raison suivante. Après une rotation, l'équation

$$\phi_{\lambda\lambda} + \phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta} = 2A\phi_{\lambda} + 2B\phi_{\eta} + 2C\phi_{\zeta} + S_{\phi} \quad (4.19)$$

devient:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\phi_x + S_{\phi} \quad (2.20)$$

La direction en X est déterminée par A, B et C. Cependant, les directions en Y et en Z ne sont pas déterminées d'une façon unique. Pour éviter de les déterminer, on se propose d'évaluer la quantité

$$\phi_{yy} + \phi_{zz}$$

par

$$\phi_{\lambda\lambda} + \phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta} - \phi_{xx}$$

en tenant compte l'égalité suivante:

$$\phi_{\lambda\lambda} + \phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta} = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$$

Le terme  $\phi_{xx} - \sqrt{A^2+B^2+C^2}\phi_x$  est exprimé par une discrétisation exponentielle. Comme dans le cas bidimensionnel, il nécessite une fonction d'interpolation. La fonction suivante est choisie, principalement pour sa simplicité:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, \eta) = & \phi_1 N^+(\lambda) N^+(\eta) + \phi_2 N^+(\lambda) N^0(\eta) + \phi_3 N^+(\lambda) N^-(\eta) \\ & + \phi_4 N^0(\lambda) N^+(\eta) + \phi_5 N^0(\lambda) N^0(\eta) + \phi_6 N^0(\lambda) N^-(\eta) \\ & + \phi_7 N^-(\lambda) N^+(\eta) + \phi_8 N^-(\lambda) N^0(\eta) + \phi_9 N^-(\lambda) N^-(\eta) \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec:

$$N^+(t) = 0.5 * t (t+1)$$

$$N^0(t) = - (t+1) (t-1)$$

$$N^-(t) = 0.5 * t (t-1)$$

$$t = \lambda, \eta$$

On discrétise ainsi l'équation de transport dans une molécule à 27 points. Les coefficients obtenus ne sont pas tous positifs. Grâce à la discrétisation

exponentielle, ce schéma permet de résoudre un écoulement à grand nombre de Reynolds.

(4) Schéma "Finite Analytique" (Chen & Chen (1982))

Les coefficients sont obtenus en résolvant l'équation de transport linéarisée

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 2 A \phi_x + 2 B \phi_y + q \quad (4.22)$$

(où A, B et q sont des constantes) par la méthode de séparation des variables dans le domaine ( $-H_w \leq x \leq H_e$ ,  $-H_s \leq y \leq H_n$ ). Cette équation est bien déterminée dans ce domaine après avoir choisi une fonction d'interpolation exprimant la fonction  $\phi$  à la frontière du domaine en fonction des variables indépendantes situées à cette frontière. Une fonction linéaire-exponentielle

$$\phi(x) = C_1(e^{2ax} - 1) + C_2x + C_3 \quad (4.23)$$

est proposée par C. J. Chen. Cette fonction assure la positivité des coefficients. Une molécule à 9 points (27 points en 3D) est obtenue.

L'utilisation de cette méthode en 2D et 3D parabolisé a été couronnée de succès. Mais le problème du temps du calcul constitue un grand obstacle pour son extension en 3D. En fait, pour obtenir les coefficients, en 2D, il faut évaluer une série. Le prix du schéma est proportionnel au nombre de termes P nécessaires pour la convergence de cette série. En tridimensionnel, il y a deux séries doubles à évaluer, le prix est donc proportionnel à  $2P^2$ . Bien que P de l'ordre de dix soit suffisant pour la convergence, le temps CPU dépensé pour le calcul des coefficients "finite analytique" représente une très grande partie du temps CPU total. Ce problème est encore plus grave quand un maillage entrelacé est utilisé.

## 5. Résultats et Discussions.

Le problème de la cavité entraînée est utilisé pour tester la précision et la propriété de convergence des schémas présentés. Les résultats obtenus par U. Ghia, K. N. Ghia & C. T. Shin [1982] sont utilisés pour la comparaison. Pour la précision, la cavité bidimensionnelle avec un petit nombre de Reynolds  $Re = 100$  est utilisée. La figure 6 montre la comparaison de la précision des schémas par les résultats obtenus sur quatre maillages de dimension  $9 \times 9$ ,  $15 \times 15$ ,  $21 \times 21$  et  $27 \times 27$ . On constate que le schéma finite analytique est le plus précis. Le schéma uni-exponentiel partage avec lui une précision de l'ordre de  $H^2$  quand  $H \rightarrow 0$ . L'ordre de précision du schéma décentré ne dépasse pas H. Le schéma multi-exponentiel est plus précis que le schéma décentré, mais il n'atteint pas  $H^2$  même quand  $H \rightarrow 0$ . Enfin, tous les schémas sont de l'ordre de H quand H est relativement grand.

Les résultats montrés sur la figure 7 sont les profils de vitesse U sur la ligne centrale de la cavité. Le nombre de Reynolds correspondant est égal à 1000. Un maillage assez grossier ( $27 \times 27$ ) est utilisé pour comparer la précision de quatre schémas dans le cas du grand nombre de Reynolds. On constate que malgré sa complexité, le schéma "finite analytique" n'est pas plus précis que le schéma uni-exponentiel. La précision du schéma multi-exponentiel est peu satisfaisante par rapport à celle du schéma uni-exponentiel bien qu'il soit meilleur que le schéma décentré. La figure 8 montre la comparaison des profils de vitesse obtenus dans deux maillages différents utilisant le schéma uni-exponentiel dans le cas  $Re=1000$ .

Quant à la convergence, tous les schémas convergent bien en 2D, mais le schéma décentré et le schéma uni-exponentiel convergent très mal en 3D. Les résultats amènent à se poser la question suivante: quel est le moteur de la

convergence d'un schéma?

Bien sûr, la procédure utilisée pour résoudre les équations nonlinéaires et couplées ainsi que la qualité du maillage jouent un rôle important. Ici, la procédure PISO (Issa, Gosman, Watkins [1986]) est utilisée. Quand un algorithme et un maillage sont choisis pour différents schémas de discrétisation, c'est la propriété du schéma de discrétisation qui fait la différence.

La positivité est une propriété souhaitable mais non nécessaire pour la convergence: le schéma uni-exponentiel - qui ne possède pas cette propriété - converge bien en 2D alors que le schéma décentré - qui est positif - converge mal en 3D.

Etant donné un maillage, les coefficients  $C_{nb}$ ,  $C_q$  sont des fonctions des paramètres  $A, B$  et  $C$  dans l'équation (4.1). Ces paramètres changent pendant l'itération même sur un maillage fixé. On constate que pour le schéma multi-exponentiel qui converge bien, les coefficients  $C_{nb}$ ,  $C_q$  sont des fonctions continues de classe  $C^1$  des paramètres  $A, B, C$ . Pour le schéma décentré, certaines fonctions de coefficients comme  $C_q$  sont seulement  $C^0$ : la dérivée première de  $C_q(A, B, C)$  par rapport à  $A, B$  et  $C$  est discontinue. On en conclut que dans le cas tridimensionnel, la propriété de régularité des fonctions des coefficients joue un rôle important pour la convergence. Si l'on veut résoudre un écoulement complexe tridimensionnel en utilisant l'algorithme PISO, il apparaît nécessaire de choisir un schéma dont les fonctions des coefficients appartiennent au moins à l'espace  $C^1$ .

Le schéma multi-exponentiel est préférable du point de vue de la convergence et du prix. Sa précision n'est pas suffisante, mais on est obligé de le choisir en 3D puisqu'il est le seul schéma parmi les moins chers qui permet la convergence. Le schéma finite analytique est un second candidat possible surtout sur un maillage colocalif.

### Conclusion

La discrétisation des équations de Navier-Stokes sur un maillage structuré est étudiée. On constate que la méthode de Rhie & Chow a de nombreux avantages: elle permet d'utiliser un maillage colocalif, de simplifier les conditions aux limites, et de résoudre un écoulement instationnaire aussi bien qu'un écoulement stationnaire. Elle a été préférée dans ce travail.

La discrétisation des équations de transport s'effectue sur une forme convective dans le plan de calcul en moyen du schéma uni-exponentiel proposé. La précision de ce schéma est jugée acceptable pour les raisons suivantes:

- 1) Pour pouvoir discrétiser l'équation de transport sous une forme convective, on considère que les coefficients géométriques qui varient souvent fortement sont des constantes dans le volume de contrôle.
- 2) On utilise une formule centrée dans le plan de calcul pour évaluer des dérivées premières notamment les gradients de pression. Par conséquence, la précision d'un schéma dans un maillage à pas d'espace inégaux ne dépasse pas  $H^2$ .
- 3) Dans le cas de grand nombre de Reynolds, la précision d'un schéma de discrétisation dépend souvent de la qualité du maillage. Les zones de forte variation doivent être capturées par suffisamment de points

afin de diminuer la diffusion numérique. Il est difficile de générer un maillage qui permet d'obtenir partout une précision en second ordre même si le maillage est adapté.

Il y a deux possibilités pour améliorer la précision, soit on discrétise l'équation de transport sous une forme conservative en utilisant la méthode de volumes finis, soit on discrétise directement cette équation sous une forme convective dans le plan physique. L'utilisation d'un maillage adaptatif est surtout importante quand le nombre de Reynolds est grand.

La convergence de la résolution des équations de Navier-Stokes dépend non seulement de l'algorithme de couplage vitesse pression, et du maillage, mais aussi de la méthode de discrétisation. L'algorithme PISO est le seul algorithme de couplage vitesse pression utilisé. Dans le cas tridimensionnel, il nous contraint à utiliser des schémas de discrétisation dont les fonctions des coefficients sont continues de classe  $C^1$ . Afin d'élargir notre choix sur les schémas de discrétisation, il faut trouver un algorithme plus performant qui nécessite moins de conditions sur les fonctions de coefficients. Il est souhaitable que la positivité et la continuité des dérivés premières des fonctions de coefficients ne soit pas nécessaire. Il paraît peu probable que l'utilisation des autres algorithmes de couplage (SIMPLE, SIMPLEC, etc) soit la solution.

#### Remerciements

Je tiens à remercier profondément Monsieur le professeur J. Piquet qui a dirigé ce travail et Monsieur M. Visonneau ainsi que toutes les autres personnes du Groupe de Modélisation Numérique pour des discussions et des suggestions précieuses.

#### Références

- C.J. Chen & H.C. Chen Finite analytic method for unsteady convective transport equation. Iowa Inst. Hyd. Res. Report. N° 232-IV, 1982
- R.I. Issa Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. J. Comp. Phy. 62, P 40-65, 1985
- U. Ghia, K.N. Ghia & C.T. Shin High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. J. Comp. Phy. 48 P 387-411 1982
- K.C. Karki A calculation procedure for viscous flows at all speeds in complex geometries. Thesis, The faculty of the graduate school of the university of Minnesota. 1986
- S. Majumda, B. Schoenung, W. Rodi A finite volume method for steady two-dimensional incompressible flows using non-staggered non-orthogonal grids. Notes on Numerical Fluid Mechanics. V.20 P 191-198
- M. Peric A finite volume method for the prediction of three dimensional fluid flow in complex ducts. Thesis, University of London. 1985

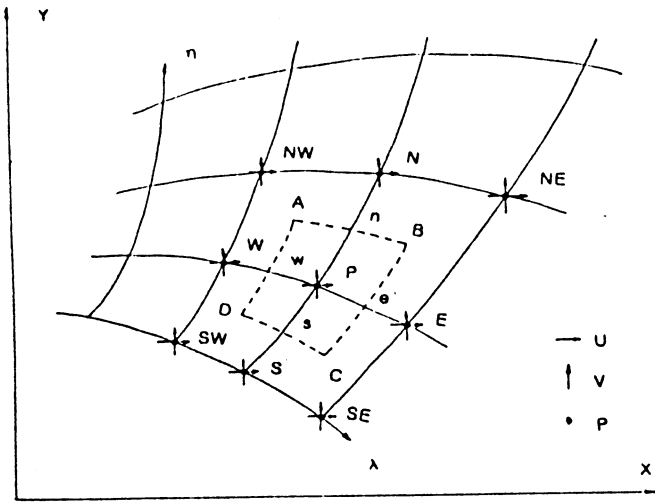


Fig. 1 Localisation des variables pour le mode 1

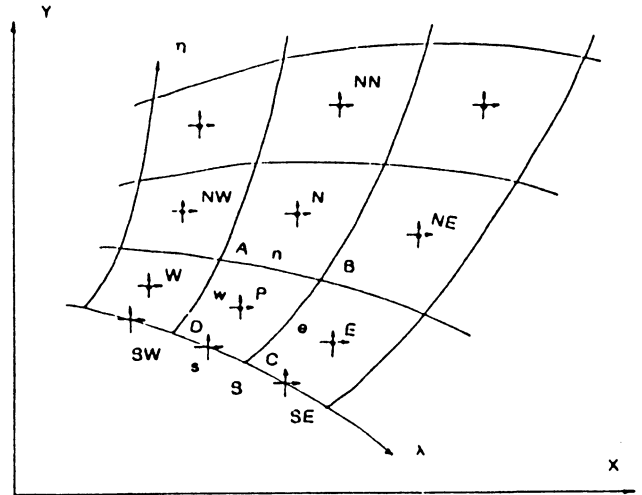


Fig. 2 Localisation des variables pour le mode 2

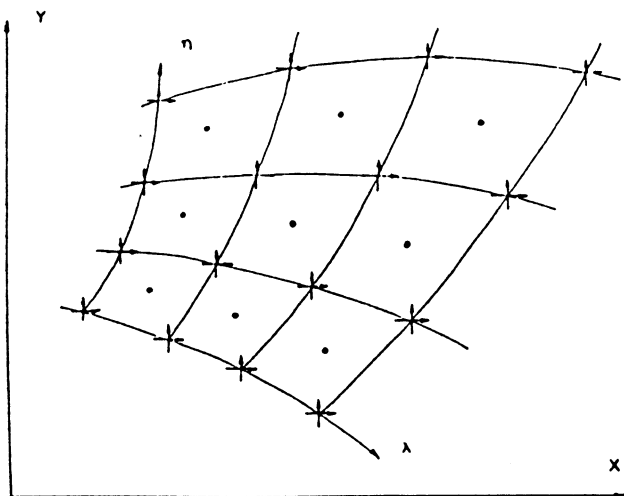


Fig. 3 Localisation des variables pour le mode 3

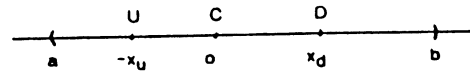


Fig. 4 Discrétisation exponentielle

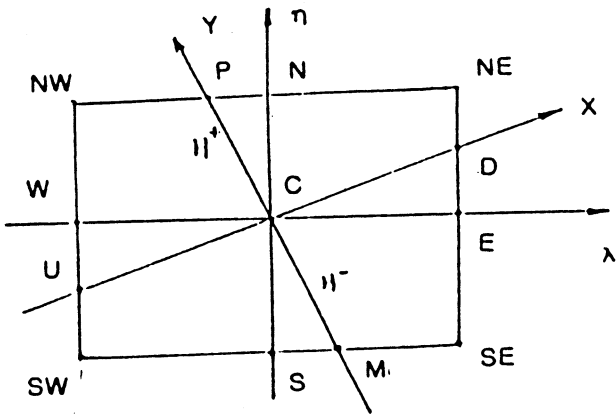


Fig. 5 Schéma uni-exponentiel

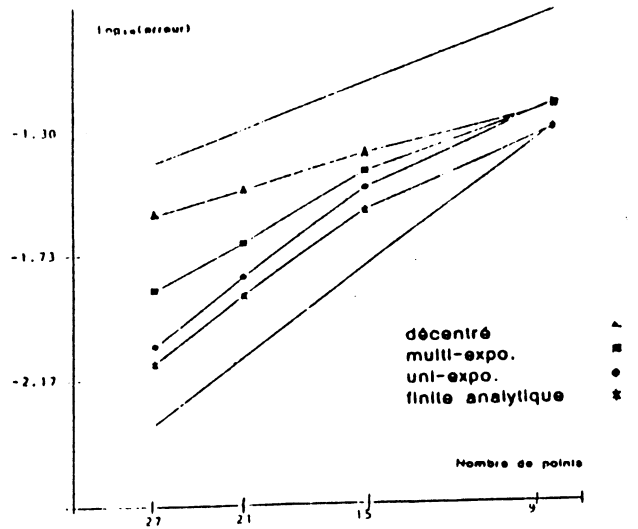


Fig. 6 Comparaison de précision des schémas

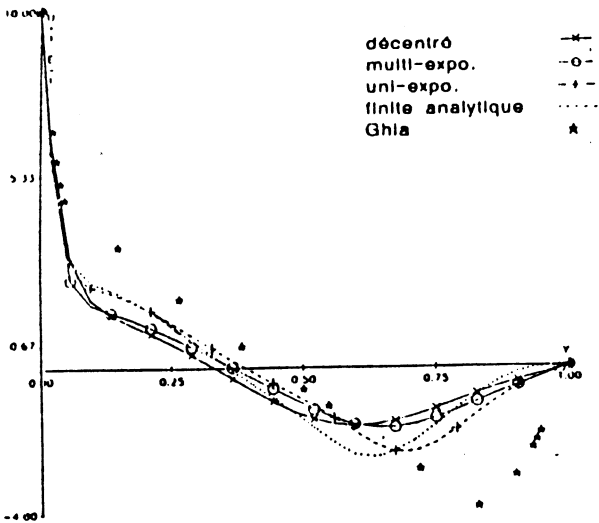


Fig. 7 Comparaison de profils de vitesse entre différents schémas.

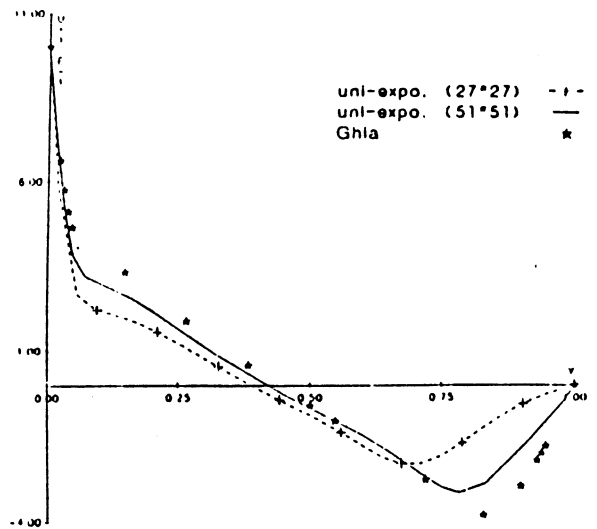


Fig. 8 Comparaison de profils de vitesse entre différents maillages