

**PEUT-ON ESPERER TENIR COMPTE DES EFFETS VISQUEUX  
QUAND ON CALCULE UN ECOULEMENT A SURFACE LIBRE  
EN PRESENCE D'UN OBSTACLE ?**

**Résolution numérique des équations de Navier-Stokes dans un plan vertical**

**par O. DAUBERT**

**LNH - EDF  
6, quai Watier - 78400 CHATOU  
Tél. 30.71.72.73**

**Résumé**

On décrit ici le code numérique NSL qui résout les équations de Navier-Stokes à surface libre dans un plan vertical. Après le rappel des équations et des conditions aux limites, on indique les grandes lignes de la méthode numérique.

Le code a été validé pour différents types d'écoulements : clapotis, houle progressive, couche limite en courant alternatif, courant permanent en régime fluvial ou torrentiel... Les derniers développements concernent la modélisation d'un obstacle perçant la surface libre.

**Summary**

Computational code NSL is described here, it solves Navier-Stokes equations with a free surface in a vertical plane. After a review of the partial differential equations and their boundary conditions, the main features of the numerical method are shown.

Validations of the code are presented for various flows : standing waves, progressive waves, boundary layer under an alternating flow, sub and super-critical steady flow... The last developments concern the modelisation of an obstacle intruding upon the free surface.

## INTRODUCTION

Lorsqu'un écoulement à surface libre est perturbé par la présence d'un obstacle, on a souvent recours à des hypothèses simplificatrices permettant une approche numérique du problème :

- soit on considère que l'écoulement est irrotationnel, ce qui permet de ramener le calcul des courants à celui d'un potentiel.
- soit on suppose que la pression est proche d'une répartition hydrostatique et on écrit les équations moyennées sur la hauteur d'eau.

Les effets de la viscosité peuvent mettre en défaut ces hypothèses, en particulier lorsqu'il y a décollement ou sillage. L'idéal est alors de revenir aux équations fondamentales de Navier-Stokes, mais on se heurte alors à trois difficultés :

- . Les calculs numériques à trois dimensions d'espace sont très coûteux.
- . La surface libre implique un problème à frontière mobile ; la position de cette frontière est une inconnue supplémentaire à calculer.
- . Les écoulements sont en général turbulents et donc les équations de Navier-Stokes ne sont valides qu'à l'intérieur des tourbillons les plus petits.

On propose donc ici l'approche suivante :

- . Les écoulements étudiés sont supposés bidimensionnels ; on calcule les champs de vitesse et de pression, ainsi que la position de la surface libre, dans un plan vertical.
- . Le domaine variable est ramené à un domaine fixe par un changement de variable verticale.
- . On résout des équations analogues à celles de Navier-Stokes, dans lesquelles les effets turbulents sont pris en compte par un modèle de "longueur de mélange".

## I. LES EQUATIONS

Dans les axes  $x, z$  ( $z$  vertical ascendant), les composantes  $u$  et  $w$  de la vitesse, la pression  $p$  et la cote de la surface libre  $\zeta$ , vérifient les équations suivantes :

Equations dynamiques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2\nu_T \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\nu_T (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})) \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\nu_T (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})) + \frac{\partial}{\partial z} (2\nu_T \frac{\partial w}{\partial z}) \quad (2)$$

$$p^* = p + \rho g z \quad (3)$$

$$\nu_T = \nu + l^2 \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Conditions de surface libre

$$p^* = \rho g \zeta \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w \quad (7)$$

$$(1 - \zeta_x^2) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2 \zeta_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (8)$$

Conditions au fond

$$u \cdot Z'_f - w = 0 \quad (9)$$

$$\alpha \left[ (1 - Z'^2_f) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2 Z'_f \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = (u + w Z'_f) \sqrt{1 + Z'^2_f} \quad (10)$$

$$\alpha = y_0 \text{Log} \frac{30 y_0}{d} \quad (11)$$

Dans l'expression de la viscosité turbulente  $\nu_T$ , apparaît la longueur de mélange  $l$ , qui sera précisée au paragraphe III.2.

Le long de la surface libre,  $z = \zeta(x,t)$ , les relations écrites correspondent aux conditions :

- pression nulle
- condition cinématique
- contrainte tangentielle nulle

Le long du fond,  $z = Z_f(x)$  :

- condition d'imperméabilité
- expression de la contrainte tangentielle avec l'hypothèse d'un profil logarithmique des vitesses.

Dans le coefficient  $\alpha$ ,  $d$  est la hauteur moyenne des aspérités et  $y_0$  la distance entre le fond réel et la limite du calcul supposée située dans la couche logarithmique du profil des vitesses.

Pour fermer le problème il reste à fixer des conditions aux limites sur les frontières latérales du domaine ; elles dépendent du problème que l'on traite. Par exemple, pour simuler un canal à houle (figure 1) :

Conditions sur les frontières latérales

$$\begin{array}{l}
 u(x_1, z, t) \text{ donné} \\
 \frac{\partial w}{\partial x} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u(x_1, z, t) \text{ donné} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}} \right\} \text{ à gauche}$$
  

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial w}{\partial x} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}} \right\} \text{ à droite}$$

Ces équations sont résolues par le programme en différences finies NSL. [1, 2, 3] .

## II. LA METHODE NUMERIQUE REPOSE SUR DEUX IDEES

### 1°. Le changement de variable verticale qui transforme le domaine variable en un domaine fixe

On adopte la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \tau = t \\
 \xi = x \\
 \eta = H (z - Z_f(x)) / (\zeta(x, t) - Z_f(x))
 \end{array} \right. \quad (12)$$

qui admet pour transformation réciproque

$$\left\{ \begin{array}{l}
 t = \tau \\
 x = \xi \\
 z = Z_f(x) + \eta (\zeta - Z_f) / H
 \end{array} \right. \quad (13)$$

H est une hauteur arbitraire qu'on se donne ; lorsque z varie entre  $Z_f$  cote du fond et  $\zeta$ , cote de la surface libre, la nouvelle variable  $\eta$  varie entre 0 et H, comme le montre la figure 2.

Si le domaine d'intégration devient plus simple et parfaitement adapté aux méthodes de différences finies, les équations, par contre, deviennent plus compliquées :

Les dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial / \partial t \\ \partial / \partial x \\ \partial / \partial z \end{array} \right. \text{ sont remplacées respectivement par } \left\{ \begin{array}{l} \partial / \partial \tau + \eta_t \quad \partial / \partial \eta \\ \partial / \partial \xi + \eta_x \quad \partial / \partial \eta \\ \eta_z \quad \partial / \partial \eta \end{array} \right.$$

Les coefficients

$$\eta_t = -\eta \zeta_t / (\zeta - Z_f) \quad (14)$$

$$\eta_x = - (H Z_f' + \eta (\zeta_x - Z_f')) / (\zeta - Z_f) \quad (15)$$

$$\eta_z = H / (\zeta - Z_f) \quad (16)$$

dépendent de l'inconnue  $\zeta$ , cote de la surface libre ; tous les termes des équations deviennent donc non-linéaires.

## 2°. La décomposition des équations en opérateurs plus simples par les pas fractionnaires

Après discrétisation en temps des équations, on introduit des champs de vitesse intermédiaires  $V_C$  et  $V_D$  de façon à décomposer le calcul d'un pas de temps en trois étapes.

$$\text{On pose } V^n = V(n \Delta t) ; V^{n+1} = V((n+1) \Delta t) ; p^{n+\frac{1}{2}} = p^* ((n+1/2) \Delta t)$$

### 1. Convection

$$\frac{V_C - V^n}{\Delta t} + V^n \otimes \text{grad } V^n = 0$$

2. Diffusion

$$\frac{V_D - V_C}{\Delta t} = \text{div} ( \nu_T - \text{grad } V_D )$$

3. Propagation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^{n+1} - V_D}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \left[ p^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \\ \text{div}^{n+1} v^{n+1} = 0 \\ \frac{\zeta^{n+3/2} - \zeta^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{u^{n+1}}{2} \left[ \frac{\partial \zeta^{n+3/2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial \xi} \right] = w^{n+1} \text{ en } \eta = H \end{array} \right.$$

L'intérêt de ce découpage est de permettre, pour résoudre chaque étape, d'utiliser la méthode la plus adaptée à l'opérateur à traiter : l'étape de convection est résolue par une méthode de caractéristiques inconditionnellement stable. L'étape de diffusion est implicite ; après discrétisation du second membre, la matrice est inversée par une méthode itérative avec sur-relaxation. Ces deux premières étapes sont résolues dans la géométrie de l'instant précédent. Dans la troisième étape par contre, il est important, comme on va le voir, de bien centrer les dérivées d'espace et de temps ; on est donc amené à calculer par itérations les inconnues  $v^{n+1}$ ,  $p^{n+1/2}$  et  $\zeta^{n+3/2}$  ; la surface libre est calculée aux mêmes instants que la pression à cause de la condition

$$p^* = \rho g \zeta$$

mais elle est calculée en avance pour permettre d'exprimer exactement l'opérateur divergence à l'instant  $(n+1) \Delta t$ .

### III. LA VALIDATION DU CODE DE CALCUL S'EST FAITE EN SEPARANT LES PROBLEMES

#### 1°. Les problèmes de surface libre peuvent être étudiés avec les équations d'Euler.

Il suffit d'éliminer l'étape 2 (diffusion) de l'algorithme décrit ci-dessus, et de ne pas prendre en compte les conditions aux limites relatives aux contraintes (8,10). C'est en essayant de reproduire différents types de houle, en profondeur moyenne ou faible qu'on s'est aperçu de l'importance d'une bonne discrétisation de l'étape 3 sur la précision du schéma numérique. Celui que nous présentons ici permet de calculer correctement une houle avec environ 25 pas de temps et d'espace par période et par longueur d'onde respectivement.

A titre d'exemple on peut voir sur les figures 3 et 4 les résultats d'un calcul de clapotis en bassin fermé pour lequel on avait 24 pas par période et autant par longueur d'onde. On a également calculé des houles progressives en imposant une loi de vitesse à une extrémité du canal et en ajustant une condition de sortie libre à l'autre extrémité (figure 5). Les comparaisons sont faites avec des résultats théoriques [4].

#### 2°. Les effets visqueux et turbulents ont été testés dans deux configurations

- . un écoulement alternatif avec plafond, sur un fond plat (figure 6).
- . un écoulement permanent au-dessus d'une tranchée (figure 7).

Dans ces deux cas les problèmes de surface libre sont volontairement éliminés et on a utilisé des résultats expérimentaux comme points de comparaison : JONSSON [5] et DELFT HYDRAULICS LABORATORY [6].

Ces essais de validation ont montré clairement que la bonne représentation des effets visqueux dépend de l'expression de la longueur de mélange et de la finesse du maillage de calcul près des parois.

Classiquement, dans les écoulements quasi-horizontaux, de hauteur  $h$ , la longueur de mélange croît linéairement entre le fond, où elle est nulle, et une hauteur égale à  $0,2 h$  ; puis elle reste constante de  $0,2 h$  à  $h$ .

Le paramètre important n'est pas le niveau  $0,2 h$  mais la pente de la partie linéaire. Cette pente est, dans le cas d'un fond plat, la constante de Karman.

$$K = 0,41$$

Dans le cas d'une variation brusque de hauteur, on s'arrange pour que la valeur de la longueur de mélange reste relativement constante dans le courant principal, ce qui change la pente de  $1$  dans la zone des courants secondaires.

C'est ainsi qu'on a pu obtenir un écoulement dont la configuration est assez proche des observations expérimentales (figure 7).

Dans le cas du courant alternatif sur fond plat, les mailles de calcul sont resserrées près du fond et on retrouve bien le phénomène de déphasage entre la couche limite et le courant principal (figure 6).

#### IV. ON ENVISAGE DES APPLICATIONS CONCERNANT DES TALUS IMMERGES OU DES OBSTACLES PERCANT LA SURFACE

L'exemple présenté sur la figure 8 est intéressant car il s'agit d'un écoulement permanent de type fluvial ( $U < \sqrt{gh}$ ) à l'amont, qui devient torrentiel sur le seuil, puis redevient fluvial.

Lorsque l'obstacle, au lieu d'être posé au fond, perce la surface libre, l'informatique du code de calcul devient plus compliquée : c'est le programme NSL. version 2. L'obstacle est limité par des bords verticaux situés à des abscisses fixes ; par contre le fond peut avoir une forme quelconque. Cette nouvelle version du programme commence à fonctionner, comme on peut le voir sur la figure 9.

La loi de longueur de mélange doit encore être ajustée pour tenir compte de la paroi supérieure que constitue le fond de l'obstacle.

On pourrait par la suite donner à cet obstacle deux degrés de liberté : translation verticale et rotation et coupler les équations du fluide et celles du solide.

L'étude d'obstacles, non plus en écoulement permanent, mais dans la houle pose encore quelques problèmes ; notamment au niveau des conditions aux limites.

### CONCLUSION

Le programme NSL traitant les équations de Navier-Stokes à surface libre, dans un plan vertical constitue un outil permettant d'approcher le problème des effets visqueux dans les écoulements autour d'obstacles. On peut envisager des études en écoulement permanent ou dans la houle.

REFERENCES

- [1] O. DAUBERT : "Calcul dans un plan vertical d'un écoulement à surface libre. Application à la houle". Rapport EDF HE041/80-18.
- [2] J. CAHOUE, O. DAUBERT : "Etude de la houle par les équations de Navier-Stokes". Rapport EDF HE 41/82-04 bis. 1981.
- [3] O. DAUBERT : "Résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Application à la houle". Rapport EDF HE 41/82-24. 1982.
- [4] G. CHABERT D'HIERES : "Calcul approché du troisième ordre d'un clapotis parfait monochromatique". Compte rendus de l'Académie des Sciences, 244, 1957, p. 2573.
- [5] I.G. JONSSON : "A New Approach to Oscillatory Rough Turbulent Boundary Layers". Series paper n° 17 (ISVA) Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering. Technical University of Denmark. DK2800 Lyngby.
- [6] DELFT HYDRAULICS LABORATORY  
Computation of siltation in dredged trenches ; semi-empirical model for the flow in dredged trenches.  
Report on investigation, R 1267 - III/M 1536, 1980.
- [7] J. CAHOUE : "Etude numérique et expérimentale du problème bidimensionnel de la résistance de vagues non-linéaire".  
Thèse présentée à l'E.N.S.T.A. le 31.1.84.

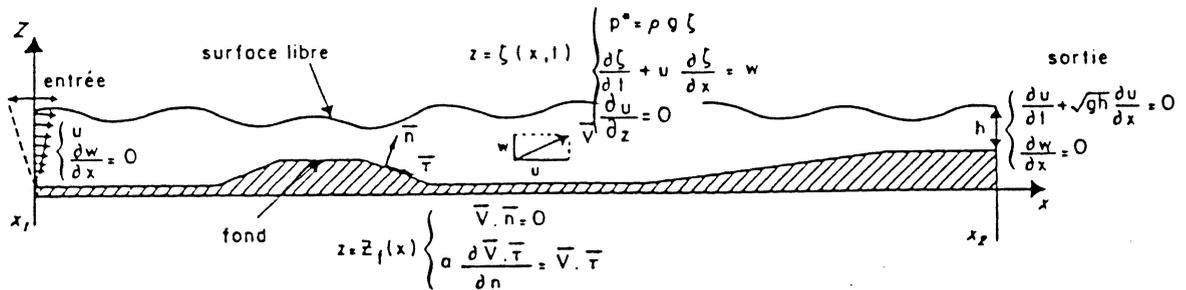
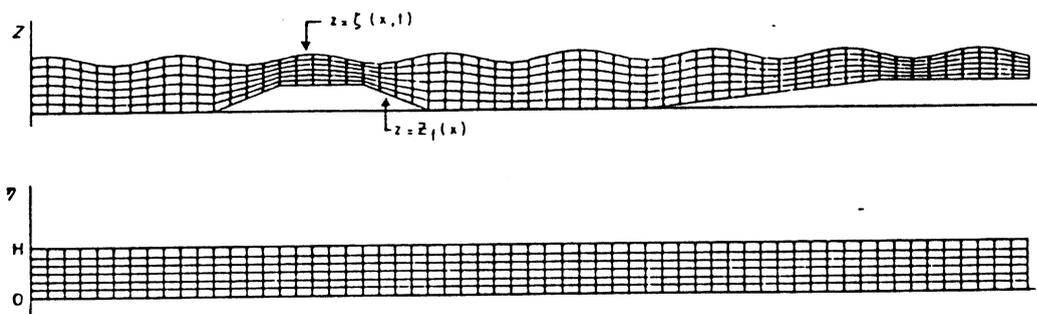


Figure 1 : Domaine de calcul et conditions aux limites simplifiées



$$\eta = H(z - Z_f) / (\zeta - Z_f)$$

Figure 2 : Exemple de transformation du maillage semi-curviligne en maillage rectiligne.

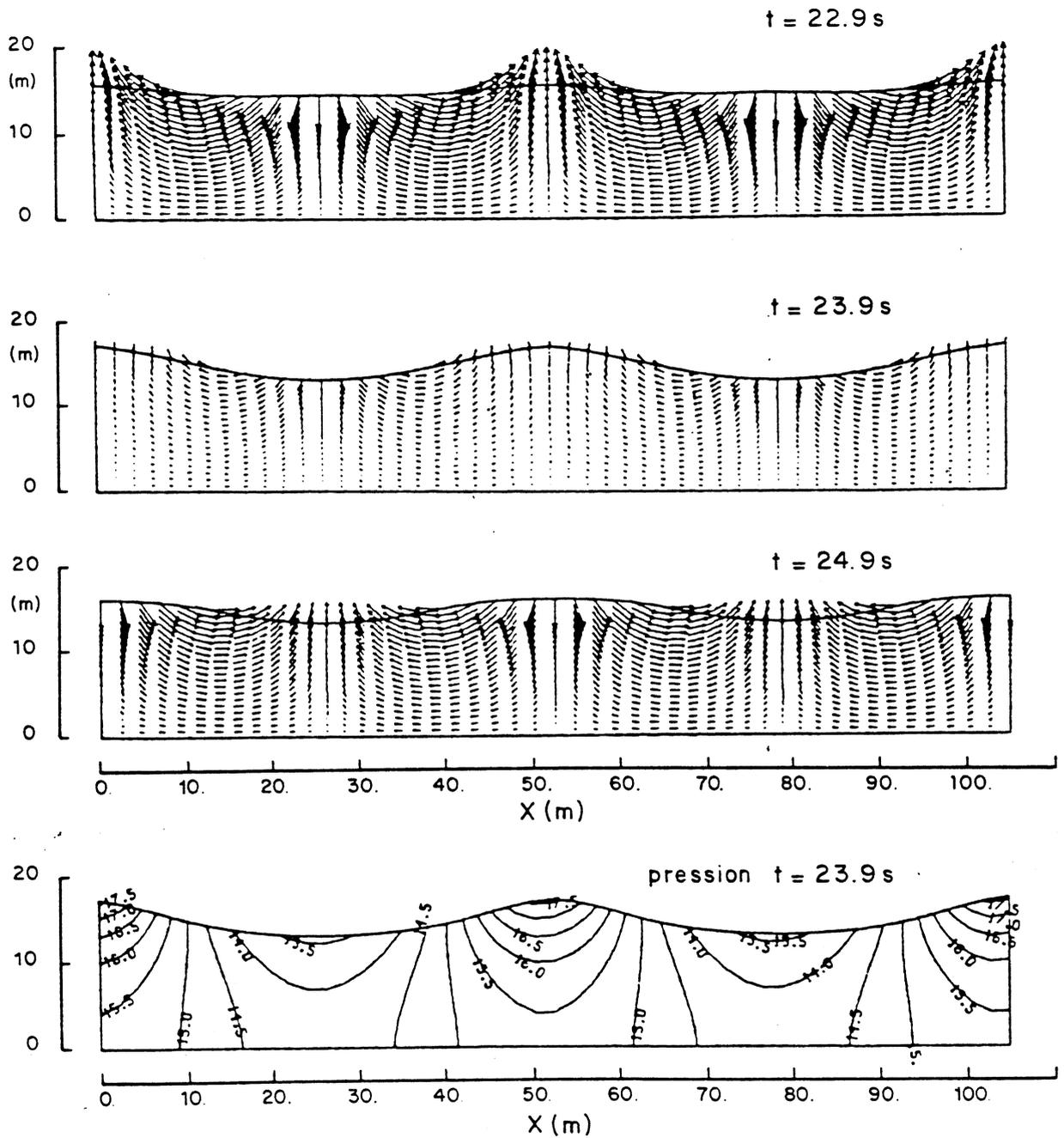


Figure 3 : Champs de vitesse et de pression calculés dans le cas d'un clapotis de période 6 s.

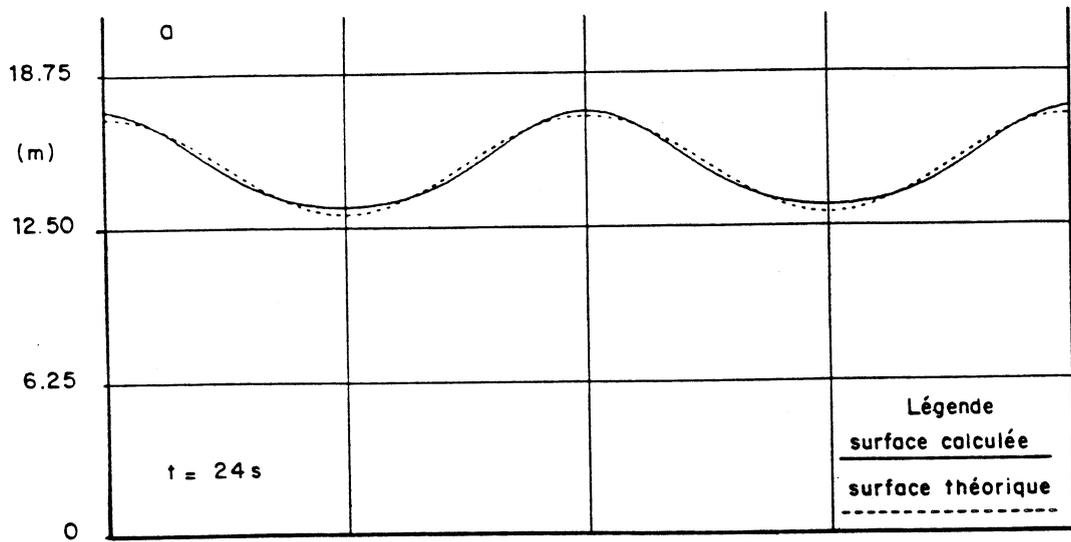


Figure 4.a

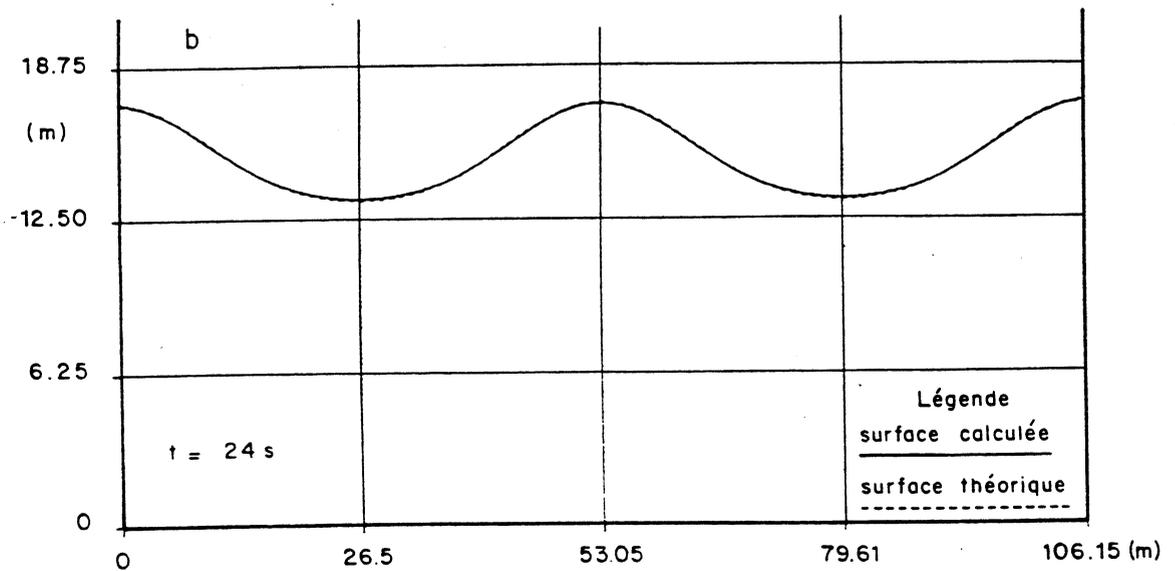
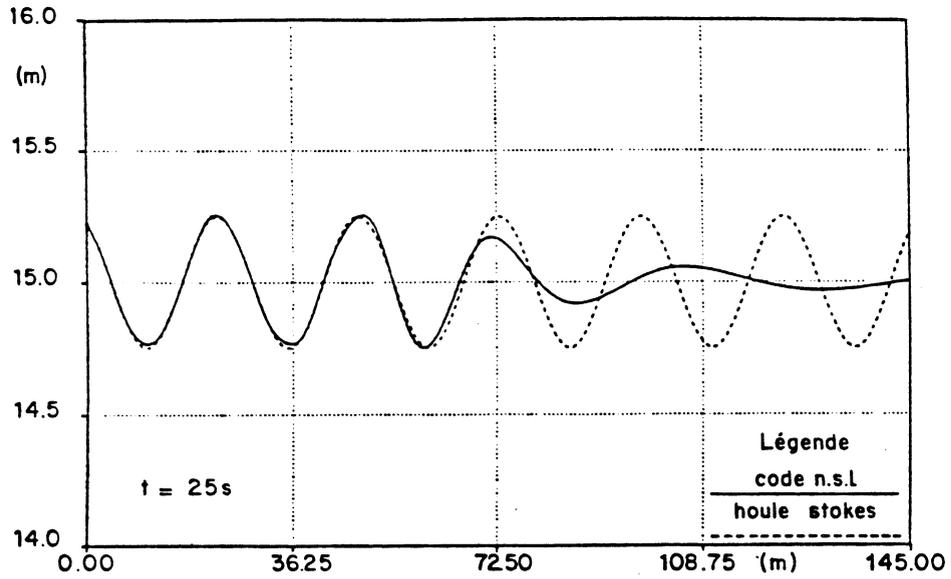


Figure 4.b

Code NSL : calcul d'un clapotis, comparaison de la solution obtenue au bout de quatre périodes, avec la solution théorique au premier ordre (figure a) et au deuxième ordre (figure b).



Test en houle de Stokes. Régime transitoire

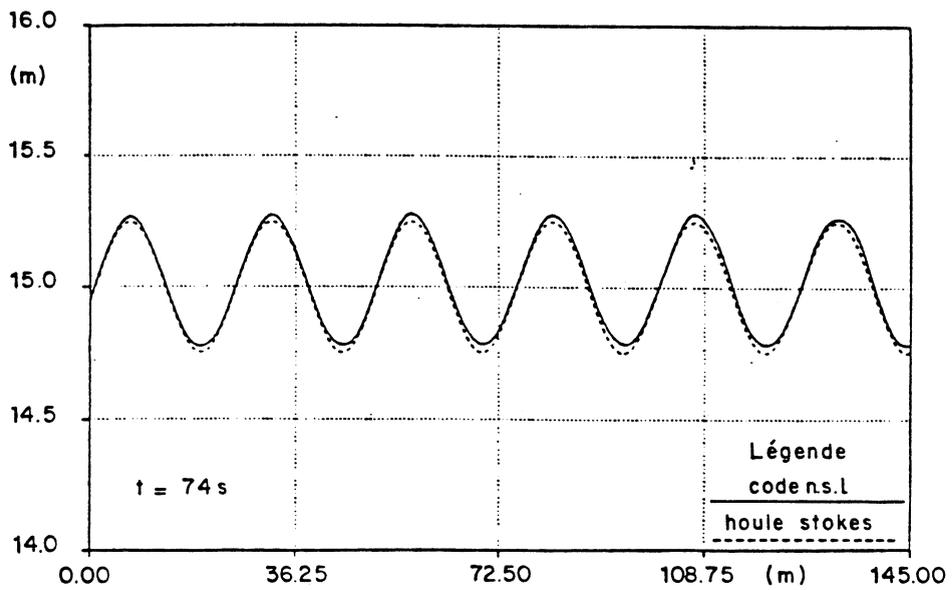


Figure 5 : Test en houle de Stokes. Régime établi après 18 périodes

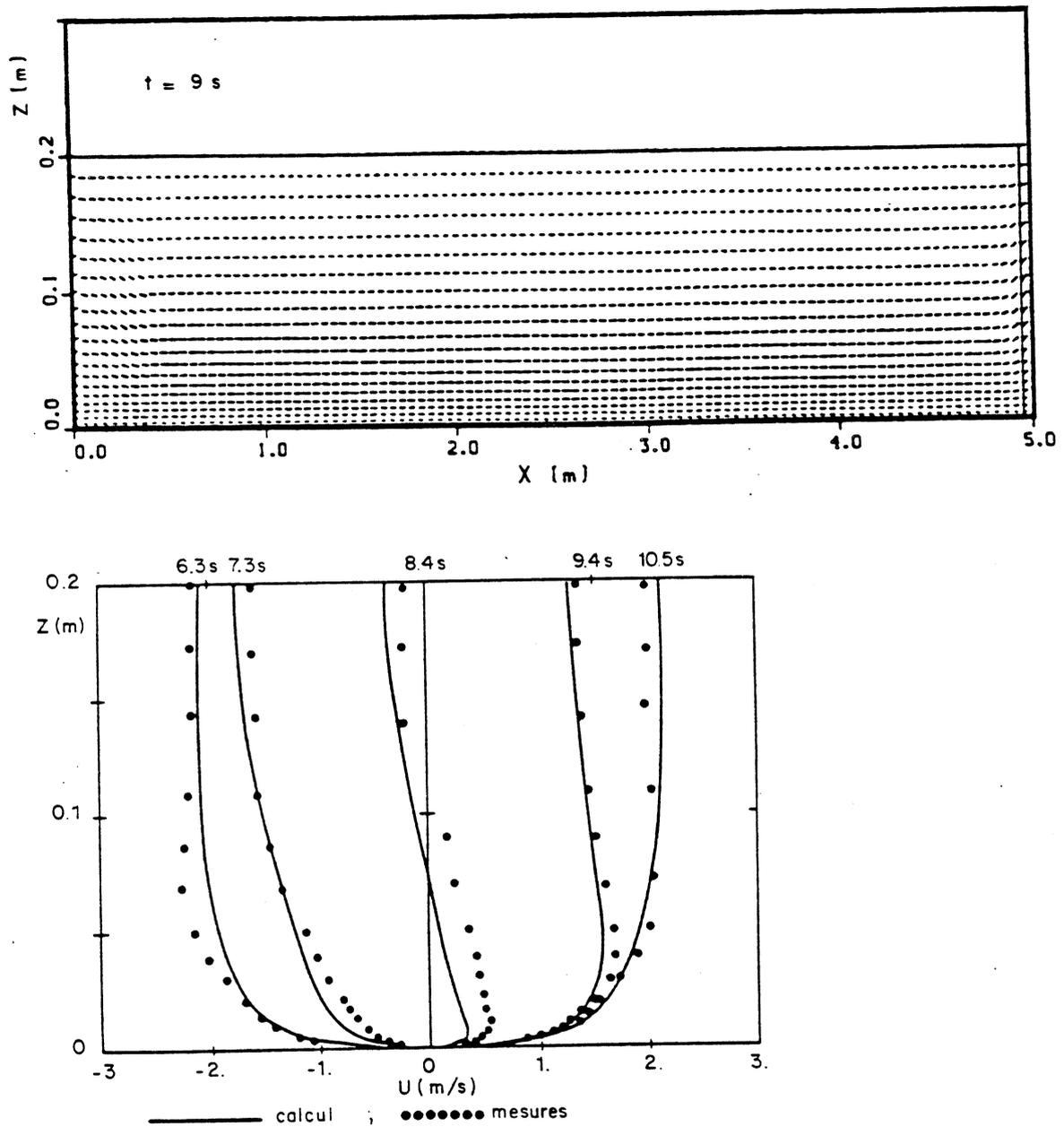


Figure 6 : Calcul d'un écoulement alternatif, avec plafond, sur un fond rugueux

- vue générale de l'écoulement, à  $t = 9$  s,
- comparaison des vitesses calculées et mesurées à différents instants, le long de la verticale médiane du canal.

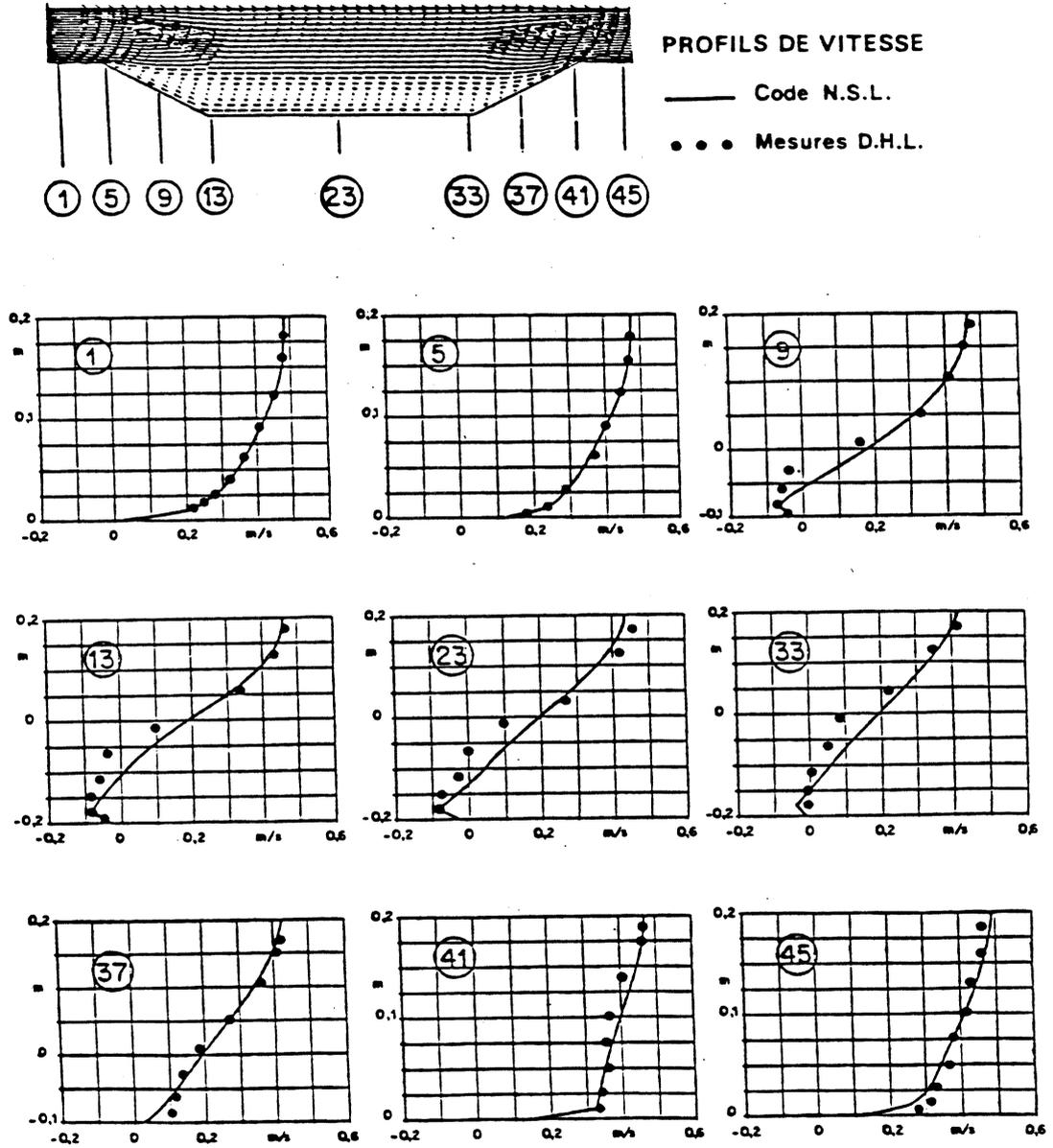
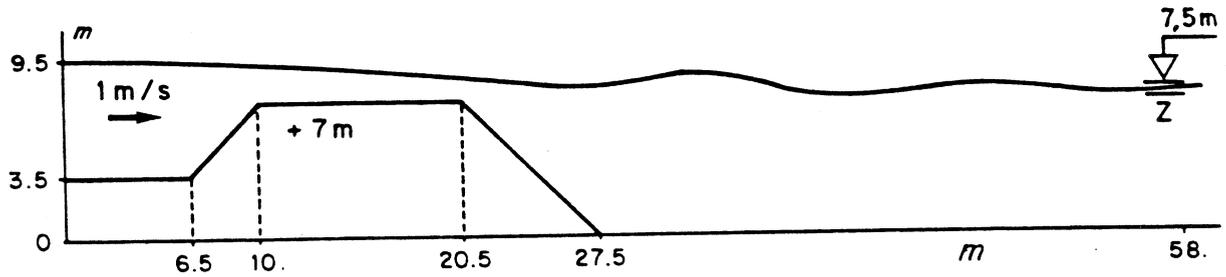
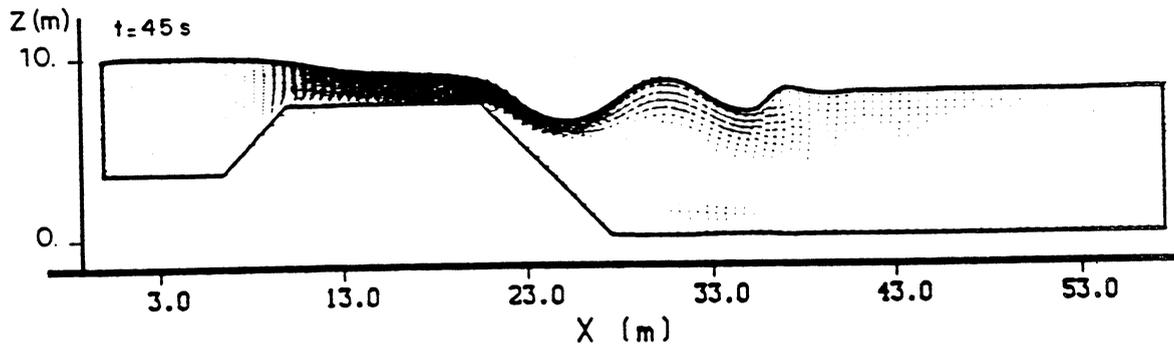


Figure 7

Comparaison des vitesses calculées et mesurées dans un élargissement



- conditions de l'écoulement

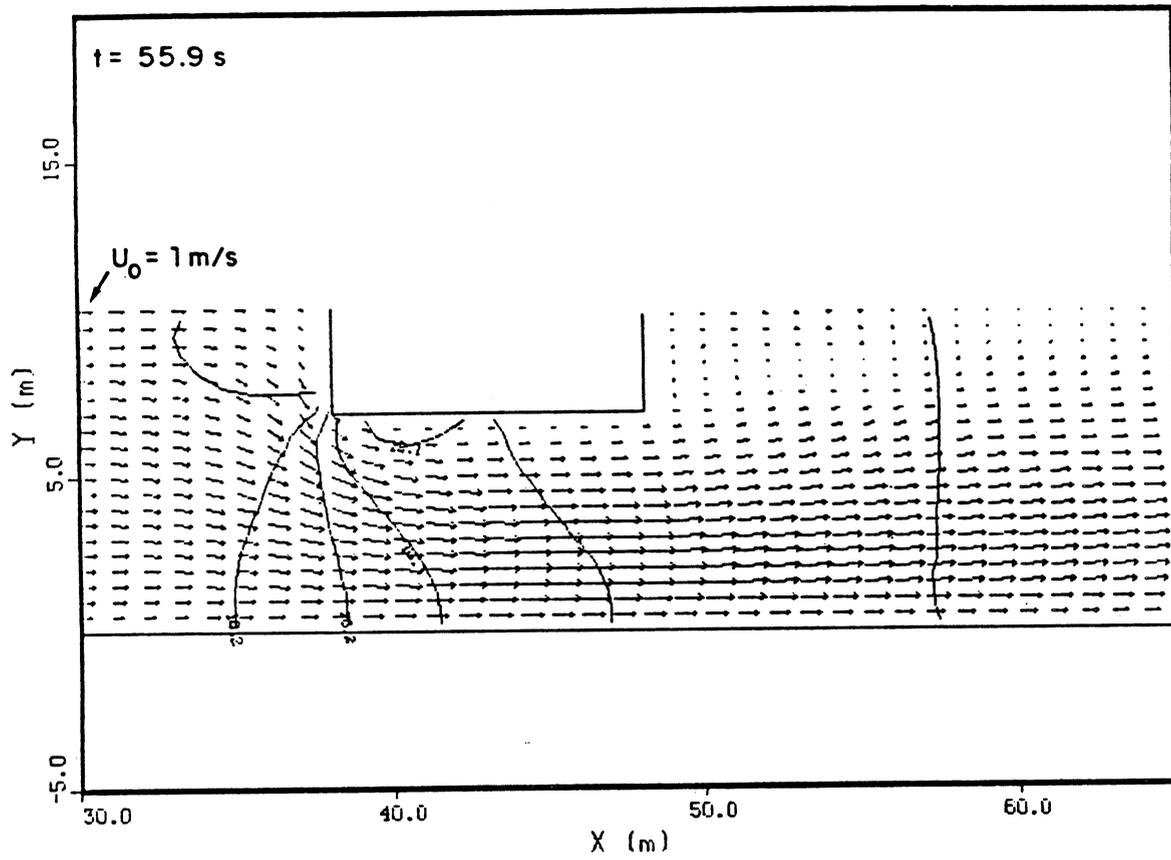


- calcul NSL



- expérience

Figure 8 : Ecoulement permanent sur un seuil

N.S.L. version 2 : bateau fixe

DER  
LNH

Figure 9 : Champ de vitesse et lignes iso-valeurs de la pression étoilée