

**ÉCOULEMENT VISQUEUX SUR UN ARRIERE CORPS AXISYMETRIQUE**

**M. Ferry, J. Piquet, P. Queutey, M. Visonneau**

**LHN, Groupe de Modélisation Numérique  
ENSM, Nantes**

**Résumé :** Le travail concerne la résolution numérique de l'écoulement autour d'un arrière corps axisymétrique au moyen des équations de Navier-Stokes dans leur formulation vitesse-pression. Certaines propriétés caractéristiques de la méthode numérique sont examinées et deux configurations axisymétriques sont présentées : sphéroïde modifié, arrière corps STCAN.

**Summary :** The work is concerned with the numerical solution of the flow past an axisymmetric body by means of Navier-Stokes equations in their velocity - pressure formulation. Some characteristic features of the numerical method are considered and two axisymmetric configurations are studied: the modified spheroid and a STCAN afterbody.

## 1 - INTRODUCTION

Pour un certain nombre de couches limites, le décollement n'est pas un prérequis pour qu'un épaissement significatif de la couche limite ait lieu. Ainsi au voisinage de la pointe arrière d'un corps de révolution, même en l'absence de décollement, la couche limite épaisse au fur et à mesure que le rayon du corps diminue et se poursuit par un sillage dont le diamètre est de l'ordre du diamètre maximum du corps.

La principale cause de cet épaissement est évidemment la convergence des lignes de courant dans des plans parallèles à la surface : l'équation de continuité exige une augmentation de la composante de vitesse normale à la surface, d'où des variations de pression statique et un épaissement. La convergence des lignes de courant se repère dans le cas axisymétrique par l'évolution du paramètre de courbure négatif  $K_{21} = dr_0/r_0 dx$  et elle implique une complexité accrue de l'écoulement dans cette zone visqueuse épaisse, complexité qui exige un traitement plus général que celui permis par l'approximation de couche limite mince.

Depuis les premières explorations de ce type d'écoulement (Patel et Al [1974] ; Patel & Lee [1977] ; Huang et Al [1979]), des procédures de calcul ont été développées, au moyen, le plus souvent, d'extensions de codes de couche limite mince puis au moyen de procédures partiellement paraboliques visant à prendre en compte l'interaction visqueuse de pression (Muraoka [1980], Hogan [1983], Chen & Patel [1984], Huang & Chang [1985]) ou au moyen des équations de Navier-Stokes complètes (Zhou [1983], Markatos [1984], Mallin et Al [1985]). Ces méthodes fournissent d'ores et déjà d'intéressantes possibilités de prédiction des caractéristiques de l'écoulement, possibilités dont une synthèse complète a été réalisée par Patel & Chen [1986] pour le problème axisymétrique. L'objet de ce travail est d'examiner en détails les points sur lesquels l'attention devrait se concentrer dorénavant, compte tenu des imperfections résiduelles des techniques développées.

Après avoir indiqué les équations à traiter (§ 2), nous présentons la méthode de Chen & Patel [1984, 1985] qui est à la base des expériences numériques réalisées (§ 3) ainsi que les aspects algorithmiques (§ 4). Les résultats obtenus sont enfin discutés au § 5.

## 2 - LES EQUATIONS A TRAITER

### 2.1 - Les coordonnées cylindriques

Les équations de Reynolds du mouvement moyen sont écrites en coordonnées cylindriques :

$$(1) \quad \begin{cases} U_x + r^{-1} (rV)_r = 0 & ; \text{ et si } \nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial r^2 + r^{-1} \partial/\partial r \\ U_t + UU_x + VU_r + (p + \overline{u^2})_x + \overline{uv}_r + \overline{uv}/r - Re^{-1} \nabla^2 U = 0 \\ V_t + UV_x + VV_r + \overline{uv}_x + (p + \overline{v^2})_r + \overline{v^2}/r - Re^{-1} (\nabla^2 V - V/r^2) \end{cases}$$

(U, V) et (u, v) désignent les composantes de la vitesse moyenne et des fluctuations dans les directions (x, r), t est le temps, p la pression et Re désigne le nombre de Reynolds :  $Re = U_0 L / \nu$  construit avec la vitesse  $U_0$  de

l'écoulement non perturbé, la longueur  $L$  du corps et la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide.

## 2.2 - Le modèle de turbulence

Une fermeture newtonienne est utilisée dans laquelle les contraintes de Reynolds sont exprimées linéairement en fonction des gradients de vitesse moyenne :

$$(2) \quad -\overline{uv} = \nu_T (U_r + V_x) \quad \overline{u^2} = 2K/3 - 2\nu_T U_x \quad \overline{v^2} = 2K/3 - 2\nu_T V_r$$

où  $K$  désigne l'énergie cinétique de la turbulence et  $\nu_T$  la viscosité turbulente qui est obtenue à partir du modèle  $K-\epsilon$  standard :

$$(3) \quad \begin{cases} \nu_T = C_\mu K^2/\epsilon & ; & R_K^{-1} = Re^{-1} + \nu_T/\sigma_K & ; & R_\epsilon^{-1} = Re^{-1} + \nu_T/\sigma_\epsilon \\ K_t + (U - \sigma_K^{-1} \nu_{Tx}) K_x + (V - \sigma_K^{-1} \nu_{Tr}) K_r - R_K^{-1} \nabla^2 K - P + \epsilon = 0 \\ \epsilon_t + (U - \sigma_\epsilon^{-1} \nu_{Tx}) \epsilon_x + (V - \sigma_\epsilon^{-1} \nu_{Tr}) \epsilon_r - R_\epsilon^{-1} \nabla^2 \epsilon - C_{\epsilon 1} P \epsilon / K + C_{\epsilon 2} \epsilon^2 / K = 0 \end{cases}$$

où le taux de production d'énergie cinétique est défini par

$$(4) \quad P = \nu_T [2U_x^2 + 2V_r^2 + 2V^2/r^2 + (V_x + U_r)^2]$$

Les constantes (standard) retenues par le modèle sont

$$C_\mu = .09 \quad ; \quad \sigma_K = 1. \quad ; \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad ; \quad C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad ; \quad C_{\epsilon 2} = 1.92$$

## 2.3 - Le système de coordonnées et la génération du maillage

Les coordonnées cylindriques  $(x, r)$  sont transformées en coordonnées  $(\lambda, \eta)$  définies par les équations de Poisson (5) où les fonctions  $f^1$  et  $f^2$  contrôlent l'espacement des lignes coordonnées  $\lambda = \text{const.}$  et  $\eta = \text{const.}$  dans le plan physique.

$$(5) \quad \nabla^2 \lambda = f^1 \quad \nabla^2 \eta = f^2$$

C'est la forme inverse de (5) qui est utilisée pour la détermination des coordonnées  $(x, r)$  d'un point de l'espace physique à partir d'un point  $(\lambda, \eta)$  de l'espace de calcul où le domaine définissant l'écoulement est un rectangle et où les pas de discrétisation vérifient  $\Delta\lambda = \Delta\eta = 1$ .

$$(6a) \quad g^{11} x_{\lambda\lambda} + f^1 x_\lambda = 0$$

$$(6b) \quad g^{11} r_{\lambda\lambda} + g^{22} r_{\eta\eta} + 2g^{12} r_{\lambda\eta} + f^1 r_\lambda + f^2 r_\eta = 1/r$$

où

$$g^{11} = r^2(x_\eta^2 + y_\eta^2)/g \quad ; \quad g^{22} = r^2(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)/g \quad ; \quad g^{12} = r^2(x_\lambda x_\eta + y_\lambda y_\eta)/g \\ g = r^2(x_\lambda y_\eta - x_\eta y_\lambda)^2$$

La répartition longitudinale des abscisses de calcul est contrôlée par (6a) qui sert à fixer  $f^1(\lambda)$  ; la répartition radiale est contrôlée par (6b) dans laquelle la fonction  $F^2 = f^2 - 1/rr_\eta$  est spécifiée a priori comme fonction de  $\eta$  et

non modifiée au cours des itérations.

Dans les coordonnées  $(\lambda, \eta)$ , l'équation de continuité prend la forme

$$(7) \quad (b_1^1 U + b_2^1 V)_\lambda + (b_1^2 U + b_2^2 V)_\eta = 0$$

où le coefficient  $b_j$  représente la  $j$ ème composante d'un vecteur colinéaire au  $i$ ème vecteur de la base contravariante  $\lambda-\eta$  dans la transformation  $(x, r) \rightarrow (\lambda, \eta)$ ; comme le maillage choisi fait coïncider les plans  $x=\text{const.}$  avec les plans  $\lambda=\text{const.}$ , le coefficient  $b_2^1$  est identiquement nul. Les équations de transport de la quantité de mouvement moyenne et des quantités turbulentes peuvent être écrites sous la forme générique

$$(8) \quad g^{11} \phi_{\lambda\lambda} + 2g^{12} \phi_{\lambda\eta} + g^{22} \phi_{\eta\eta} = 2A_\phi \phi_\lambda + 2B_\phi \phi_\eta + R_\phi \phi_t + S_\phi$$

Les coefficients géométriques  $b_j^i$ ,  $A_\phi$ ,  $B_\phi$ ,  $R_\phi$  et les termes sources (incluant  $g^{12} \phi_{\lambda\eta}$ ) sont donnés par Chen & Patel [1984].

### 3 - METHODE NUMERIQUE UTILISEE

#### 3.1 - Le Maillage

L'équation (6b) est résolue au moyen d'une discrétisation exponentielle analytique dans chaque direction basée sur l'idée suivante : soit à résoudre

$$(9) \quad \phi_{\lambda\lambda} - a \phi_\lambda = S \quad ; \quad \phi(\lambda=-1) = \phi_L \quad ; \quad \phi(\lambda=1) = \phi_R$$

Le schéma exponentiel est obtenu au moyen d'une intégration analytique de (9) en supposant  $a$  et  $S$  fixés et uniformes pour  $-1 \leq \lambda \leq 1$ . Soit  $\phi_p = \phi(\lambda=0)$

on trouve facilement :

$$(10) \quad \phi_p = 2a \left[ \coth a \cdot \phi_p - e^a \phi_L / (e^a - e^{-a}) - e^{-a} \phi_R / (e^a - e^{-a}) \right]$$

La discrétisation de (6b) en résulte de façon immédiate et la matrice des coefficients des inconnues est résolue par une méthode de double balayage.

#### 3.2 - Les Equations de transport

Un schéma "finite-analytique" complètement implicite en temps est utilisé. L'équation est linéarisée en évaluant les coefficients  $A_\phi$  et  $B_\phi$  au point P intérieur à la maille de discrétisation et à l'étape  $n-1$  immédiatement antérieure. Les équations linéarisées peuvent alors être traitées selon trois modes différents.

##### 3.2.1 - Mode partiellement parabolique (quatre points)

Dans le cas, la dérivée première en  $\lambda$  est décentrée amont  $\phi_\lambda = \phi_p - \phi_U$  si bien que le terme  $2A_\phi \phi_U$  est intégré au terme source connu, les dérivées seconde et croisée sont intégrées aussi au terme source connu en sorte que l'équation à résoudre contient comme seules inconnues  $\phi_p$  et les dérivées en  $\eta$  :  $S_\eta \equiv g^{11} \phi_{\eta\eta} - 2B_\phi \phi_\eta$  évaluées en P. Après discrétisation exponentielle déjà détaillée au §3.1, le problème de la détermination des inconnues à l'étape  $t^n$  est réduit à la résolution du système tridiagonal correspondant à

$$(11) \quad \left\{ 1 + (2A_\phi + E_\phi/\tau)_p \cdot C_p \right\} \phi_p = C_N \phi_N + C_S \phi_S - C_P g$$

avec

$$(12) \quad g = (S_\phi)_P - 2(A_\phi)_P \phi_U - (E_\phi)_P \phi_P^{n-1}/\tau - (g''\phi_{\lambda\lambda} + 2g'^2\phi_{\lambda\eta})_{U,D}$$

où les indices U et D désignent les contributions en provenance des dérivées en  $\lambda$  aux points amont et aval. (Fig. 1a)

### 3.2.2 - Mode elliptique - six points

Dans ce cas, les dérivées en  $\lambda$  :  $S_\lambda = g''\phi_{\lambda\lambda} - 2A_\phi\phi_\lambda$  sont traitées par la discrétisation exponentielle et

$$(13) \quad C_U \phi_U + C_D \phi_D - (C_D + C_U) \phi_P = (S_\lambda)_P ; C_D = \frac{A e^{-Ah}}{h \sinh Ah} ; C_U = \frac{A e^{Ah}}{h \sinh Ah}$$

L'introduction de cette décomposition génère un schéma en croix à l'étape inconnue (Fig. 1b)

$$(14) \quad [1 + C_P(C_U + C_D + E_\phi/\tau)] \phi_P = C_N \phi_N + C_S \phi_S + C_P(C_U \phi_U + C_D \phi_D + E_\phi \phi_P^{n-1}/\tau) - C_P(S_\phi)_P$$

avec  $C_N = \frac{e^{-Bk}}{2 \cosh Bk} ; C_S = \frac{e^{Bk}}{2 \cosh Bk} ; C_P = \frac{h \tanh Bk}{2B} ; A = [A_\phi/\sqrt{g''}]_P ; B = [B_\phi/\sqrt{g'^2}]_P$

La matrice en résultant est résolue itérativement par surrelaxation par lignes permettant la mise à jour des variables à  $\lambda = \text{const.}$

### 3.2.3 - Mode elliptique complet - dix points

Les équations linéarisées sont traitées par le schéma finite analytique instationnaire hybride (Fig. 1c) : Sur la maille de discrétisation rectangulaire, les équations sont intégrées analytiquement par séparation des variables. Les conditions aux limites qui sont nécessaires pour obtenir la solution analytique sont choisies comme combinaisons de fonctions linéaires et exponentielles mettant en jeu les valeurs inconnues aux points de discrétisation, le résultat est

$$(15) \quad [1 + E_\phi C_P/\tau] \phi_P = C_U \phi_U + C_D \phi_D + C_N \phi_N + C_S \phi_S + \\ + C_{NW} \phi_{NW} + C_{SW} \phi_{SW} + C_{NE} \phi_{NE} + C_{NW} \phi_{NW} - C_P g$$

où  $g$  ne contient que les termes issus de  $S_\phi$  ainsi que  $-g'^2 \phi_{\lambda\eta}$  et  $-E_\phi \phi_P^{n-1}/\tau$

Les coefficients d'influence  $C_{nb}$  sont alors donnés en fonction des nombres de Reynolds de maille  $Ah$  et  $Bk$  (voir appendice).

Dans les trois cas, la résolution des systèmes s'appuie sur une méthode de double balayage pour la détermination des inconnues simultanées  $\phi_N, \phi_P, \phi_S$ .

## 3.3 - Procédure de résolution

Celle-ci est classique dans son principe et correspond à la méthode simplier de Patankar [1976]. Nous en donnons ci-dessous une formulation matricielle laminaire permettant d'en analyser les caractéristiques.

Les méthodes de discrétisation des Equations de Navier-Stokes incompressible stationnaire ont en commun de se mettre sous la forme suivante

$$(16) \quad (D-A)V + BP = f \quad CV = g$$

V désigne le vecteur des inconnues en vitesse, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs des composantes de l'approximation aux noeuds et P le vecteur des inconnues en pression. Les conditions aux limites apparaissent dans les seconds membres f et g. La matrice C est une discrétisation de la divergence, elle est donc singulière. De même la matrice B qui est une discrétisation du gradient admettant, entre autres, le vecteur 1 dans son noyau. D est la matrice diagonale des coefficients d'influence au centre de la maille et A est une matrice à diagonales nulles provenant de la discrétisation des termes d'advection et de diffusion. La discrétisation finie analytique étant à dominance diagonale irréductible, le rayon spectral de  $D^{-1}A$  est inférieur à 1 et  $V = (D-A)^{-1} (f-BP)$ .

On peut alors éliminer V et obtenir

$$(17) \quad P = [C(D-A)^{-1} B]^+ [C(D-A)^{-1} f - g]$$

où intervient l'inverse généralisé  $[.]^+$  qui, dans le cas où l'advection est traitée explicitement, est l'inverse discret de l'opérateur laplacien.

1. La procédure simplifiée consiste à définir le champ simplement transporté à partir de l'itérée  $V^{k-1}$ .

$$(18) \quad \hat{V} = D^{-1} (A V^{k-1} + f)$$

L'équation de quantité de mouvement étant a priori satisfaite à l'itération  $k-1$  elle peut être réécrite :  $D V^{k-1} + B P^{k-1} = D \hat{V}$

2. Par suite :

$$(19) \quad P^{k-1} = [C D^{-1} B]^+ [C \hat{V} - g]$$

permet d'obtenir le champ de pression "étoilé"  $P^{k-1}$ . Une méthode SLOR permet d'effectuer ce calcul.

3. Le champ de vitesse  $V^*$  se calcule à partir de  $P^{k-1}$  par résolution de l'équation de quantité de mouvement au moyen d'une méthode SLOR

$$(20) \quad V^* = (D-A)^{-1} (f - B P^{k-1})$$

4. Ce champ de vitesse n'étant pas à divergence nulle, on en déduit une correction de pression...

$$(21) \quad P' = [C D^{-1} B]^+ [C V^* - g]$$

5. ... permettant de rendre le champ de vitesse  $V^k$  à divergence nulle.

$$(22) \quad V^k = V^* - D^{-1} B P'$$

L'avantage d'une telle procédure est qu'aucune sous-relaxation n'est en principe nécessaire. Dans le cas turbulent les équations de transport sont calculées après 5. avant de revenir à 1.

Si l'on forme l'équation pour le vecteur erreur  $e^k = V^k - V$ , on peut montrer que

$$(23) \quad \epsilon^k = T \epsilon^{k-1}$$

$$\text{avec } T = - [I - G] X G D^{-1} A \quad \text{où}$$

$X = [I - D^{-1}A]^{-1}$  et  $G = D^{-1/2} B [C D^{-1} B]^+ C D^{-1/2}$  est une matrice de projection dont les valeurs propres valent zéro ou 1. Pour démontrer la convergence de la méthode, il suffit de démontrer que le rayon spectral de  $T$  est inférieur à 1. Nous n'examinerons pas cet aspect sur un plan mathématique, nous contentant de détailler au § 3.5 les problèmes liés à l'adaptation de la méthode au cas où les coordonnées sont curvilignes ( $B \neq C^T$ ).

### 3.4 - Domaine de calcul et conditions aux limites

Les essais qui vont être présentés concernent l'écoulement axisymétrique stationnaire sur le sphéroïde modifié de Patel-Nakayama-Damian [1974] pour un nombre de Reynolds  $Re = 1.26 \cdot 10^6$  et sont comparés aux résultats expérimentaux. Le domaine de calcul est

$$x_U \leq x \leq x_D ; r_s \leq r \leq r_o$$

$x$  est mesuré à partir du point d'arrêt amont de façon que  $x = 1$  est le bord de fuite ;  $x_U$  est choisi à un endroit où la couche limite peut être encore considérée comme mince,  $x_D$  est placé dans le sillage aval lointain.

Les conditions aux limites sont les suivantes

$x = x_U$	$U, K, \epsilon$ spécifiés ; $V_x = 0$
$x = x_D$	$P_x = U_{xx} = V_{xx} = K_{xx} = \epsilon_{xx} = 0$
$r = r_s ; x \leq 1$	$U = V = 0$ (adhérence sur le corps)
$r = r_s ; x > 1$	$U_r = V = K_r = \epsilon_r = 0$ (axe du sillage)
$r = r_o$	$U = 1 ; P = K_r = \epsilon_r = 0$

Les paramètres suivants sont introduits en  $x = x_U$

$\delta_i$	: épaisseur initiale de couche limite
$U_{Ti}$	: vitesse initiale de frottement
$\Delta U_i$	: survitesse par rapport à $U = 1$ .

A moins que le contraire ne soit spécifié, les valeurs de ces paramètres sont les suivantes :

$$(26) \quad x_U = .5 ; x_D = 16.25 ; r_o = 1.108 ; (r_s)_{\max} = .08 ; \delta_i = .006 ; U_{Ti} = .042 ; \Delta U_i = .02$$

Le maillage standard retenu se compose de 69 points en  $x$ , 32 points en  $r$ . (Fig. 2)

### 3.5 - Difficultés d'implémentation

- La première difficulté concerne l'équation de continuité :

$$(27) \quad (b_1^1 U + b_2^1 V)_D - (b_1^1 U + b_2^1 V)_U + (b_1^2 U + b_2^2 V)_N - (b_1^2 U + b_2^2 V)_S = 0$$

Les flux introduits ne sont pas, à cause du caractère entrelacé du maillage (Fig. 3), tous disponibles et des extrapolations sont nécessaires :  $V_D$ ,  $V_U$ ,  $U_N$ ,  $U_S$  doivent être extrapolés car ils ne sont pas sur leurs grilles respectives.

Ces termes supplémentaires ont été inclus dans les termes sources  $\hat{B}$  et  $B^*$  des équations pour la pression et pour la correction de pression

$$(28) \quad \hat{D} = \hat{B} + D_1 ; D^* = B^* + D_1 ; D_1 = (b_1^1 V)_D - (b_2^1 V)_U + (b_1^2 U)_N - (b_1^2 U)_S$$

Il en va de même pour certaines portions des gradients de pression  $P_x$  et  $P_r$  qui deviennent respectivement

$$J^{-1}(b_1^1 P_\lambda + b_2^1 P_\eta) \text{ et } J^{-1}(b_2^1 P_\lambda + b_2^2 P_\eta).$$

Ces termes étant exprimés dans des mailles décalées d'un demi pas (respectivement en  $\lambda$  et  $\eta$ ) par rapport à la maille de continuité, les contributions  $P_\eta$  de  $P_x$  et  $P_\lambda$  de  $P_r$  doivent être interpolées. La encore, elles sont intégrées aux termes sources, la notion classique de pseudo-vitesse est ainsi modifiée et ne sont sortis des vitesses  $U$  et  $V$  que les gradients  $P_\lambda$  et  $P_\eta$ . Il en résulte que le schéma implicite de pression et de correction de pression définissant  $CD^{-1}B$  est à cinq points:

$$(29a) \quad a_P P_P^{k-1} = a_E P_E^{k-1} + a_W P_W^{k-1} + a_N P_N^{k-1} + a_S P_S^{k-1} - \hat{D}$$

$$(29b) \quad a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S - D^*$$

- La deuxième difficulté réside dans la résolution de l'équation de correction de pression. La correction de pression  $p'_W$  est injectée dans les termes sources dans la mesure où la vitesse  $U_W$  présente dans  $B^*$  a déjà été corrigée. De plus,  $p'_E = 0$  est imposé dans la mesure où rien, a priori, ne permet de fixer la correction de pression en aval (l'élimination partielle de Van Dormaal & Raithby [1984] n'a pas été testée).

- La troisième difficulté, spécifique à la méthode, réside dans l'imposition des conditions amont. Dans la mesure où, pour l'instant, le raccord en amont à un code de couche limite n'a pas été envisagé, le profil longitudinal de vitesse a été doté d'une survitesse de 2% au bord de la couche limite :

$$(30) \quad U = 1.02 (y/\delta)^{1/7} \text{ pour } y < \delta.$$

Dans la zone  $y > \delta$  le profil se raccorde linéairement à  $U = 1$  au loin. Le profil d'énergie cinétique turbulente  $K$  est fixé par  $K = \text{Sup} (10^{-8} ; U_T^2 (1-\lambda)/C_\mu^{1/2})$ . Le profil de dissipation  $\epsilon$  est relié à celui de  $K$  par  $\epsilon = \delta^2 C_\mu^{3/4} K^{3/2}/(\kappa y)$  ( $\kappa=0.42$  : constante de Prandtl). Ces formes de profil pour  $K$  et  $\epsilon$  correspondent à un comportement de zone logarithmique.

Enfin, le profil de vitesse verticale est spécifié par  $V_x=0$  (Rubin & Reddy [1984]). L'influence du choix de  $P_W$  sera examinée.



Une loi de paroi a été utilisée aux points les plus voisins de la paroi ( $\eta=2$ ) : celle utilisée est due à Patel & Chen

$$(31) \quad \frac{U}{U_T} = \frac{1}{K} \left\{ \text{Log} \frac{4 \cdot (1 + \Delta_T y^+)^{1/2} - 1}{\Delta_T (1 + \Delta_T y^+)^{1/2} + 1} \right\} + 2 \left\{ (1 + \Delta_T y^+)^{1/2} - 1 \right\} + 8 + 3.7 \Delta_P$$

elle présente l'avantage de tenir compte du gradient de pression défavorable selon des modalités précisées par Mc Donald.

Les valeurs de  $K_2$  et de  $\epsilon_2$  sont spécifiées par les comportements habituels en zone logarithmique

$$K_2 = U_T^2 / C_\mu^{1/2} \quad \epsilon_2 = U_T^3 / \kappa y_2$$

l'axe de symétrie du sillage est une singularité du domaine sur laquelle les calculs doivent être évités.  $U$ ,  $K$  et  $\epsilon$  sont par conséquent assujettis en  $\eta = 2$  à se comporter selon

$$(32) \quad U, K, \epsilon \sim \sigma_1 + \sigma_2 y^2 \quad \text{et} \quad V \sim \sigma_3 y$$

où les paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  sont éliminés en faisant subsister ces comportements en  $\eta = 3$  et  $\eta = 4$  si nécessaire. Les valeurs  $P_2$  et  $P_1$  de la pression entre la frontière intérieure et la paroi nécessaires à l'évaluation du gradient de pression longitudinal de la fonction de paroi, sont extrapolées linéairement dans le plan de calcul à partir des valeurs  $P_3$  et  $P_4$  sauf dans le sillage où est retenu  $P_1 = P_2 = P_3$ .

## 4 - RESULTATS NUMERIQUES

### 4.1 - Influence de la taille du domaine de calcul

(i) Position de la frontière extérieure  $y_0$ .

Une étude comparable à celle effectuée par Chen & Patel [1986a] sur la plaque plane a simplement abouti à la conclusion que pour les valeurs de  $y_0$  supérieures à  $.6L$ , les résultats du code ne varient pas y compris pour la pression à la paroi : les tests ont porté sur  $y_0 = 1.108 L$  (maillage  $69 \times 32$ ),  $y_0 = 1.595 L$  (maillages  $69 \times 19$  et  $60 \times 19$ ) ;  $y_0 = 0.864 L$  (maillage  $69 \times 60$ )

(ii) Position de la frontière amont  $x_U$

Disposant de données expérimentales en  $x_U = .662$ , la frontière amont a tout d'abord été localisée à cette abscisse, mais il semble que l'imposition des conditions expérimentales comme données aux limites se traduise par un piètre raccord de la pression pariétale aux conditions amont. L'origine de ce résultat réside probablement dans la sensibilité de la procédure à la définition de l'épaisseur de couche limite initiale. Cela est indiqué par les résultats des localisations  $x_U = .5 L$  ;  $x_U = .395 L$  ;  $x_U = .290 L$ . Ayant fixé les profils initiaux en accord avec les indications du § 3 avec  $\delta_i = .006 L$  et  $U_{T1} = .042$  dans les trois cas, il apparaît que la valeur  $\delta_i$  retenue est trop faible dans le cas  $x_U = .5 L$  mais meilleure dans les deux autres cas. Par contre, des variations sur  $U_{T1}$  sont sans influence. Cette influence tend à décroître vers l'aval ainsi que l'indiquent les Fig. 4.

## (III) Position de la frontière intérieure

Afin que les deux premiers points soient fixés dans la zone logarithmique, les valeurs suivantes ont été fixées  $y_2 = .012(\Delta - r_0)$ ;  $y_1 = .008(\Delta - r_0)$ ;  $\Delta = .235 L$ . Les maillages mis en oeuvre sur la base de ces données diffèrent à la fois par le nombre de points JP1 en  $\eta$  mais aussi par le nombre N de points dans la zone  $Y \leq \Delta$ . Le tableau 1 donne les diverses caractéristiques utilisées.

maillage	JP1	N	$y_0$	$x_u$	$x_D$
69x60	60	35	.864	.5	16.25
69x32	32	20	1.108	.5	16.25
69x19	19	12	1.593	.5	16.25

Compte-tenu de  $y_0 > .6$ , seuls diffèrent les nombres de points. Alors que les profils moyens ne sont pas influencés par les modifications de JP1 et de N indiquées, les grandeurs turbulentes apparaissent plus affectées, les niveaux de K et de  $\epsilon$  se détériorant lorsque le nombre de points est augmenté.

(iv) Remarque : Ni le nombre de stations de calcul en  $\lambda$ , ni l'éloignement de la frontière aval n'apparaissent influencer les résultats.

4.2 - Influence des conditions aux frontières

Les effets suivants ont été testés

## 4.2.1 - Fonctions de paroi

C'est l'un des points critiques : si l'on introduit la répartition expérimentale correcte, il apparaît qu'à l'itération suivante le profil de vitesse tangentielle est nettement amélioré tandis que la vitesse normale et les quantités turbulentes sont très peu affectées (la linéarisation des équations implique que la production d'énergie cinétique n'est pas influencée par la perturbation de vitesse sur une itération), le pic de pression tend aussi à se rapprocher des valeurs expérimentales.

Toutefois, la forte discontinuité (en amont) de la vitesse de frottement qui s'établit systématiquement à un niveau trop élevé semble devoir être reliée au problème de la consistance amont des conditions aux limites plutôt qu'à un problème de modélisation.

4.2.2 - Ces conditions amont représentent un des aspects faibles de la méthode tant leur influence est importante et leur expression incertaine.

(i) Trois paramètres essentiels règlent les conditions en vitesse longitudinale :  $\delta_i$ ,  $U_{\tau i}$ ,  $\Delta U_i$ . Si  $U_{\tau i}$  est sans influence tant la discontinuité amont de  $U_{\tau}$  est forte, les autres effets sont importants :  $\delta_i$  a un effet très marqué sur les profils de vitesse à proximité de l'entrée mais l'influence plus en aval disparaît (Fig. 5). Les quantités turbulentes convectent par contre l'influence de l'épaisseur  $\delta_i$  vers l'aval sans l'amortir. Enfin, la pression statique n'est pas influencée par ce paramètre.

Le paramètre  $\Delta_i$  de survitesse affecte la composante longitudinale de vitesse et il se propage par conservation du débit vers l'aval, mais son influence ne semble pas prépondérante.

(ii) Les conditions portant sur V et sur l'équation de pression sont aussi très influentes. Le choix de Chen & Patel :  $P_i = 0$ ,  $V_x = 0$  améliore la pression à la

paroi aux dépens des champs de vitesse tangentielle.

En réglant la pression amont par  $U_i$  et en conservant  $V_x = 0$ , le champ de vitesse longitudinale est amélioré mais le pic de pression est réhaussé et la convergence ralentie (Fig. 6a, b).

#### 4.3 - Influence des corrections au modèle de turbulence

Certaines tendances systématiques ont été mises en évidence.

Une surévaluation du niveau de viscosité et d'énergie cinétique turbulente dans la première moitié de la zone visqueuse au fur et à mesure de la progression sur l'arrière et dans le sillage.

Un manque de dissipation d'énergie cinétique turbulente à partir de l'arrière.

Une sous-évaluation de  $\overline{u\bar{u}}$ , y compris sur les premières stations

Une valeur beaucoup trop forte de  $\overline{v\bar{v}}$  à la paroi sur les quatre premières stations expérimentales se corrigeant plus en arrière et des problèmes de non réalisabilité près de la frontière amont ( $\overline{v\bar{v}} < 0$  pour  $i=2$ )

Un mauvais comportement de  $\overline{w\bar{w}}$  empirant dans le sillage

Un comportement très satisfaisant de  $\overline{u\bar{v}}$  malgré le manque de dissipation précédemment noté

##### (i) Influence de $C_\mu$

Les trois valeurs (0.07, 0.09 et 0.11) n'indiquent aucune influence visible sauf sur  $v_T$ . Ce résultat indique que l'écoulement moyen est contrôlé par la pression et que les problèmes relatifs aux quantités turbulentes doivent être traités à part.

##### (ii) Influence de la correction de courbure transversale

La modification a consisté à introduire un facteur multiplicatif pour  $C_{\epsilon 2}$  sous la forme

$$C_{\epsilon 2} \equiv [1 - C_i R_i] C_{\epsilon 20} \text{ avec } R_i = 2v_T(V/r)^2 [G - 2v_T(V/r)^2]$$

Le coefficient  $C_i$  a été testé pour 0.2, 0.5 et 0.8. Là encore on trouve une indifférence totale des profils de vitesse mais une amélioration à partir de la région de la pointe sur  $K$  et  $v_T$  (Fig. 7).

(iii) Si l'on se réfère enfin au test 4.2.1, l'amélioration des quantités turbulentes passe d'abord par une amélioration des profils de vitesse qui résultera d'abord d'une amélioration des conditions amont et pariétales.

#### 4.4 - Influence de l'algorithme vitesse-pression

##### 4.4.1 - Schéma à neuf points

Si l'on tient compte du gradient  $P_\eta$  dans l'équation de quantité de mouvement selon  $x$ , sans l'intégrer dans les pseudovitesse  $U$ , un schéma à 9 points doit être résolu pour l'équation de pression. La convergence se trouve très améliorée:  $\| \text{Div } U \| \sim 10^{-5/2}$  au lieu de  $10^{-3/2}$  (Fig. 8a).

##### 4.4.2 - Réactualisation du terme source

Le terme source  $D$  de l'équation de vitesse fait intervenir les composantes inactives de vitesse regroupées dans  $D_1$  :

$$D_1 = (b_2^1 V)_D - (b_2^1 V)_U + (b_1^2 U)_N - (b_1^2 U)_S$$

qui est exprimé par Chen & Patel à l'instant  $t^{n-1}$ . Une réactualisation de ce terme en l'évaluant à l'instant  $t^n$  montre là encore une spectaculaire amélioration de la convergence puisque  $\|Div U\| \sim 10^{-7/2}$  (Fig. 8b).

Dans les deux cas, les résultats obtenus à convergence sont identiques à ceux obtenus avant modification, mais l'effet de l'algorithme vitesse-pression sur la convergence globale est démontré.

## 5 - CONCLUSION

Une série d'expériences numériques a mis en évidence trois sources d'incertitude :

- (i) les conditions de frontière amont
- (ii) l'approche fonction de paroi
- (iii) la fermeture newtonienne (pour les contraintes du modèle de turbulence).

Le travail est donc poursuivi dans les directions suivantes :

(i) Etude du cas laminaire de façon à mieux identifier la difficulté (i) en envisageant maintenant le corps complet : la frontière amont étant en amont du corps dans une zone où l'écoulement n'est pas encore perturbé. La fig. 9 présente un résultat préliminaire sur le problème laminaire complet.

(ii) L'approche fonction de paroi cèdera dans un proche avenir la place à une modélisation à deux couches : un modèle type longueur de mélange pour  $y^+ < 80$  et un modèle  $K-\epsilon$  à contraintes algébriques à l'extérieur de cette zone, suivant en cela une démarche classique et testée de façon complète sur le cas de la plaque plane turbulente par Chen & Patel [1986]. Bien qu'une sensible dégradation de la convergence semble apparaître, les résultats préliminaires présentés sur la fig. 10 sont encourageants.

(iii) Le comportement (32) au voisinage de l'axe du sillage n'implique pas de problème apparent. Toutefois, c'est à cet endroit que les résidus de  $\|div U\|$  sont les plus importants. Ce phénomène subsiste évidemment dans le cas du problème axisymétrique complet et dans le cas tridimensionnel. De plus, il est à l'origine de la mauvaise convergence de  $\|div U\|$  sur l'axe aval du sillage dans le cas de l'arrière corps de section elliptique 3:1. Ces perspectives de développement nécessitent donc qu'une attention particulière soit prêtée à cette difficulté potentielle.

(iv) D'ores et déjà, il est possible de calculer l'écoulement sur un arrière corps profilé avec une marge d'erreur raisonnable en témoignent les résultats présentés aux fig. 11 et 12 correspondant au cas d'un arrière corps STCAN.

### Remerciements

Les calculs ont été effectués sur le NAS 9080 du Circé. Les exploitations fines ont été rendues possibles par une dotation d'heures Cray 1 attribuées par le comité scientifique du CCVR.

Les auteurs remercient également le Bassin d'Essai des Carènes qui.

par la commande 91-03-01-096 a contribué au financement de ces calculs. Enfin, le démarrage de cette étude fut grandement facilité par le Pr. Patel qui nous fournit une version préliminaire des son code de calcul partiellement parabolique.

## 6 - REFERENCES

CHEN, H.C. & PATEL, V.C. [1984] "Calculation of Stern Flows by a Time Marching Solution of the Partially Parabolic Equations." Proc. 15 Th. ONR Symp. Naval Hydrodynamics (Hamburg)

CHEN, H.C. & PATEL, V.C. [1985] "Calculation of Trailing-Edge, Stern and Wake Flows by a Time-Marching Solution of the Partially Parabolic Equations." IHR Rept N°285 (Iowa City, Ia)

CHEN, H.C. & PATEL, V.C. [1986a] "Laminar Flow at the Trailing Edge of a Flat Plate" (to appear in AIAA J.)

CHEN, H.C. & PATEL, V.C. [1986b] "Turbulent wake of a Flat Plate" (to appear)

HOGAN, T.F. [1983] "A Calculation of the Parabolized Navier-Stokes Equations for Turbulent Axisymmetric Flows Using Streamline Coordinates and the K- $\epsilon$  Model." DTNSRDC Rpt. 83/070 (Bethesda, MD)

HUANG, T.T. & CHANG, K.C. [1985] "Computation of Velocity and Pressure Variation across Thick Turbulent Stern Flows." Proc. 3rd Symp. on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows (Long Reach) pp 10:1-10:20

HUANG, T.T. ; SANTELLI, N. & BELT, G. [1979] "Stern Boundary-Layer Flow on Axisymmetric Bodies." Proc. 12 th ONR Symp. Naval Hydrodynamics (Washington D.C.) pp 127-157.

MALIN, M.R. ; ROSTEN, H.I. ; SPALDING, D.B. & TATCHELL, D.G. [1985] "Application of PHOENICS to Flow around Ship's Hulls." Paper N°11 in Proc. 2nd Int. Symp. on Ship Viscous Resistance (SSPA, Goteborg)

MARKATOS, N.C. [1984] "The Computation of Thick Axisymmetric Boundary Layers and Wakes around Bodies of Revolution." IME Proceedings (London) Vol. 198C, pp 51-62.

MURAOKA, K. [1980] "Calculation of Thick Boundary Layers and Wake of ships by a partially parabolic method." Proc. 13rd ONR Symp. on Naval Hydrodynamics (Tokyo) pp 601-616.

PATANKAR, S. [1976] "Numerical Heat Transfer and Fluid flow". Hemisphere, New York.

PATEL, V.C. & LEE, Y.T. [1978] "Calculation of thic boundary layer and near wake of bodies of resolution by a differential method." Proc. 12th ONR Symp. on Naval Hydrodynamics (Washington DC).

PATEL, V.C. & CHEN, H.C. [1986] "Flow over Tail and in the Wake of Axisymmetric Bodies : Review of the State of the Art." Journ. Ship Research, Vol. 30, N°3, pp. 201-214.

PATEL, V. C. ; NAKAYAMA, A. & DAMIAN, R. [1974] "Measurements in the thick Axisymmetric Turbulent boundary layer near the tail of a body of revolution." J. Fluid Mech. Vol. 63, pp. 345-362.

RUBIN, S. G. & REDDY, D. R. [1983] "Analysis of Global Pressure Relaxation for Flows with Strong Interaction and Separation." Comp. & Fluids, Vol. 11, No. 4, pp. 281-306.

VAN DOORMAAL, J. P. & RAITHBY, G. D. [1984] "Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows." Num. Heat Transfer, Vol. 7, pp. 147-163.

ZHOU, L. D. [1983] "A streamline iteration Method for Calculating Turbulent Flow Around the Stern of a body of Revolution and its wake." Proc 14th ONR Symp. Naval Hydrodynamics (Ann Arbor) pp. 1041-1070.

## 7 - APPENDICE

$$C_S = \left( \frac{e^{Bk}}{2 \cosh Bk} \right) P_A$$

$$C_N = e^{-2Bk} C_{SC}$$

$$C_M = \left( \frac{e^{Ah}}{2 \cosh Ah} \right) P_B$$

$$C_D = e^{-2Ah} C_{MW}$$

$$C_{SE} = \left( \frac{e^{Ah+Bk}}{4 \cosh Ah \cosh Bk} \right) (1 - P_A - P_B)$$

$$C_{SW} = e^{-2Ah} C_{SE}$$

$$C_{NW} = e^{-2Bk} C_{SW}$$

$$C_{NE} = e^{-2Ah-2Bk} C_{SW}$$

$$C_P = \frac{h \tanh Ah}{2A} (1 - P_A) = \frac{k \tanh Bk}{2B} (1 - P_B)$$

$$P_A = 4E_2 \operatorname{Ah} \cosh Ah \cosh Bk \coth Ah$$

$$P_B = 1 + \frac{Bh \coth Bk}{Ak \coth Ah} (P_A - 1)$$

$$E_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m (\lambda_m h)}{[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2]^2 \cosh \sqrt{A^2 + B^2 + \lambda_m^2} k}$$

$$\lambda_m h = \left(m - \frac{1}{2}\right) \pi$$

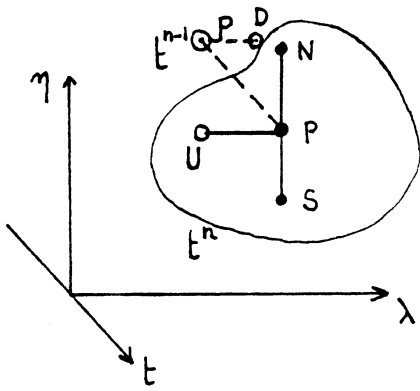


Fig. 1a

- Mode partiellement parabolique -  
quatre points

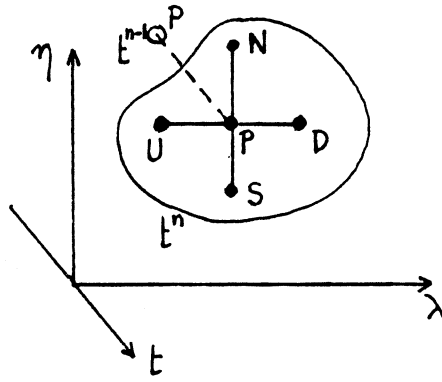


Fig. 1b

- Mode elliptique -  
six points

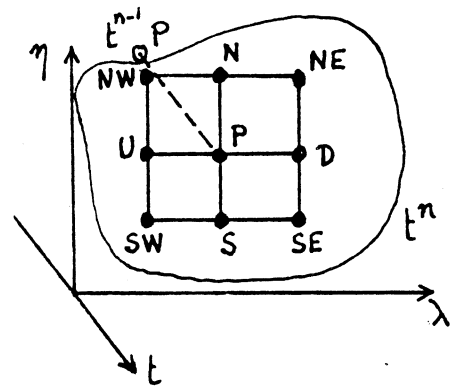


Fig. 1c

- Mode elliptique complet -  
dix points

Fig. 1 - Molécules de discrétisation

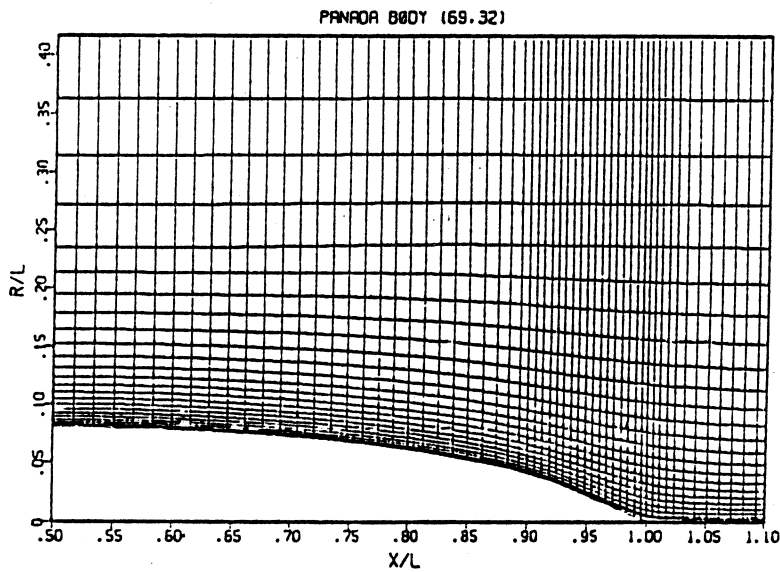
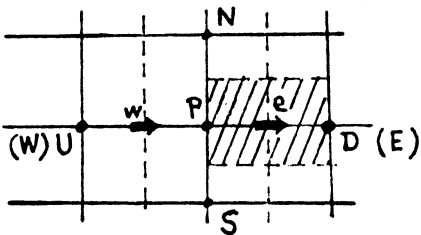
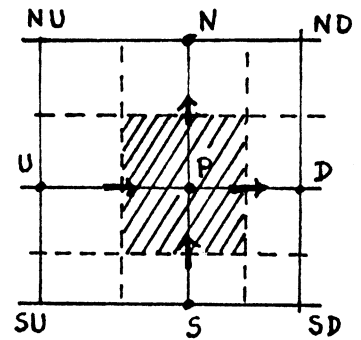
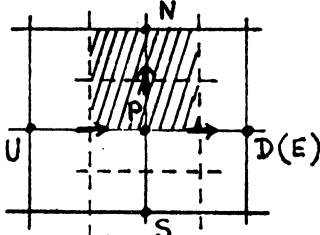


Fig. 2 - Maillage standard pour le sphéroïde modifié



(a) volumes de controle pour les équations  
de quantité de mouvement pour U(gauche)  
et V(droite)



(b) volume de controle pour  
l'équation de continuité

Fig. 3 - Maillage entrelacé

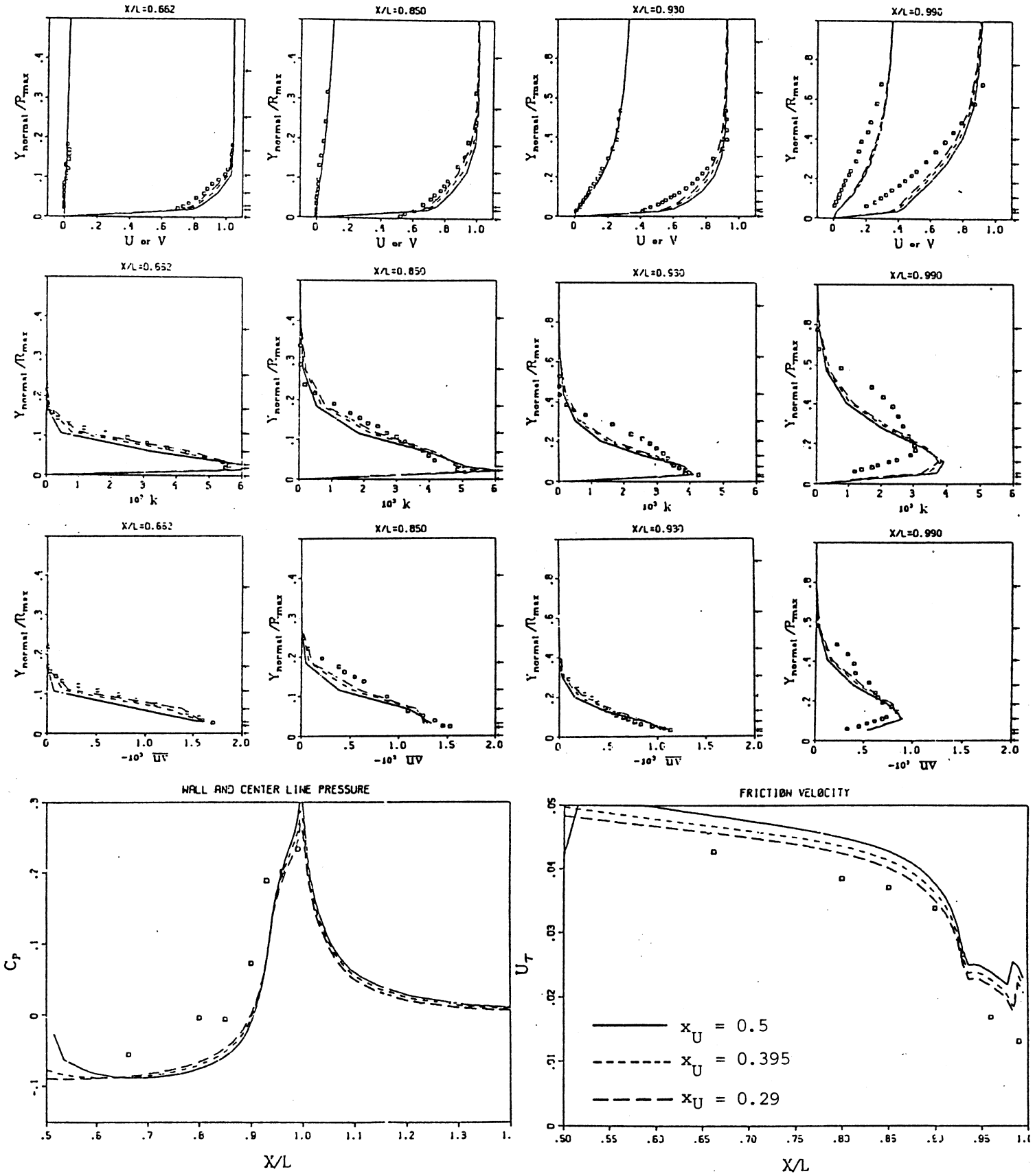


Fig. 4 - Influence de la position de la frontière amont  
 Maillage (81,19) ; sous-relaxation en K et  $\epsilon$



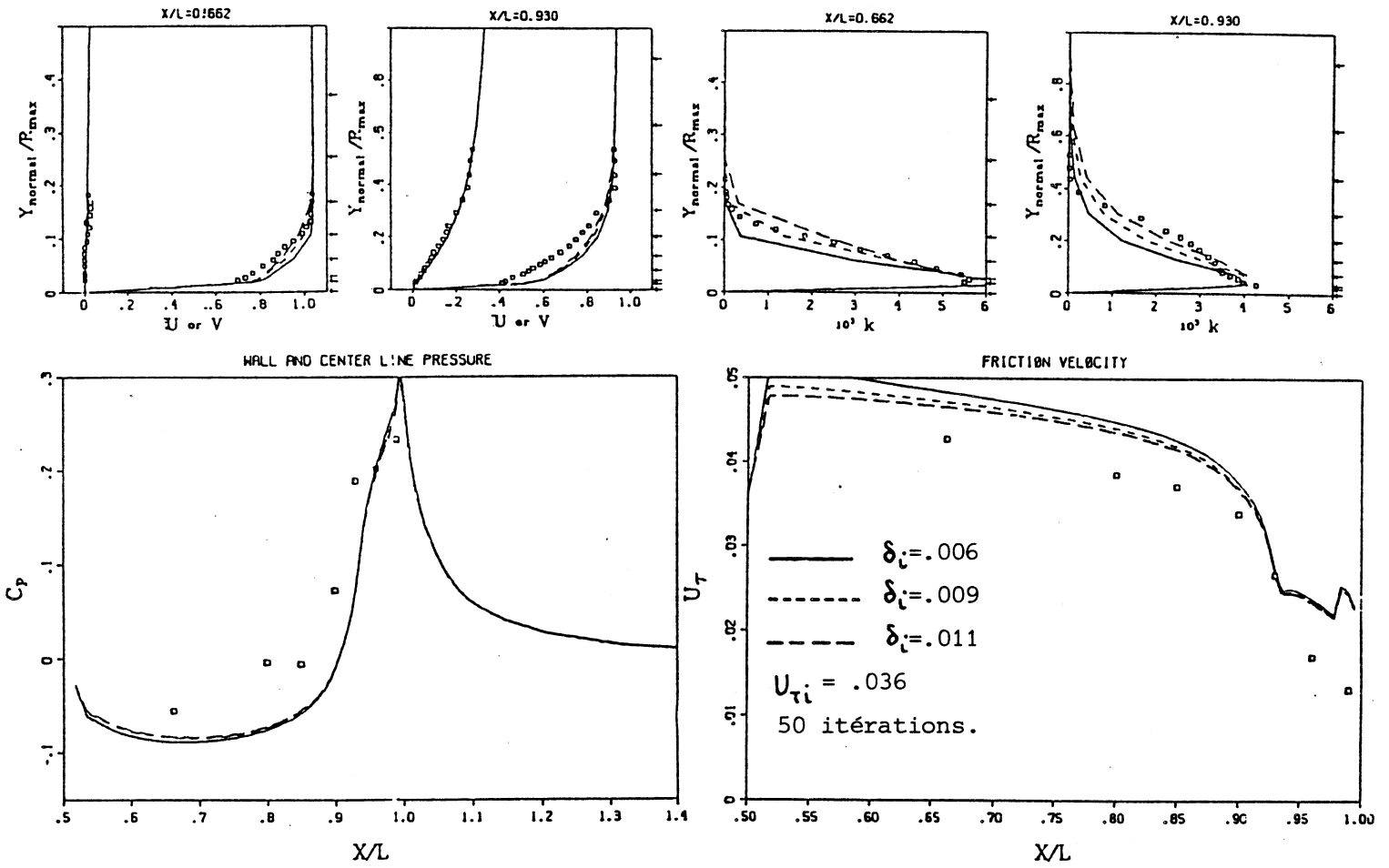


Fig. 5 - Influence de l'épaisseur visqueuse initiale

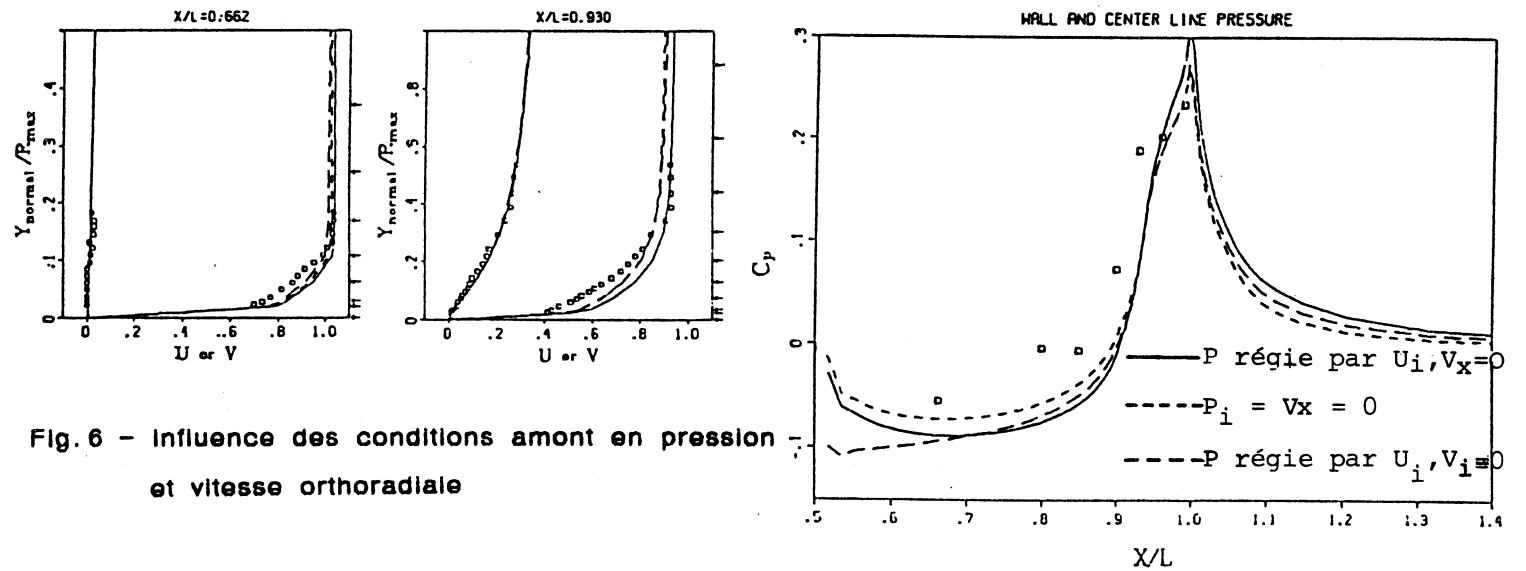


Fig. 6 - Influence des conditions amont en pression et vitesse orthoradiale

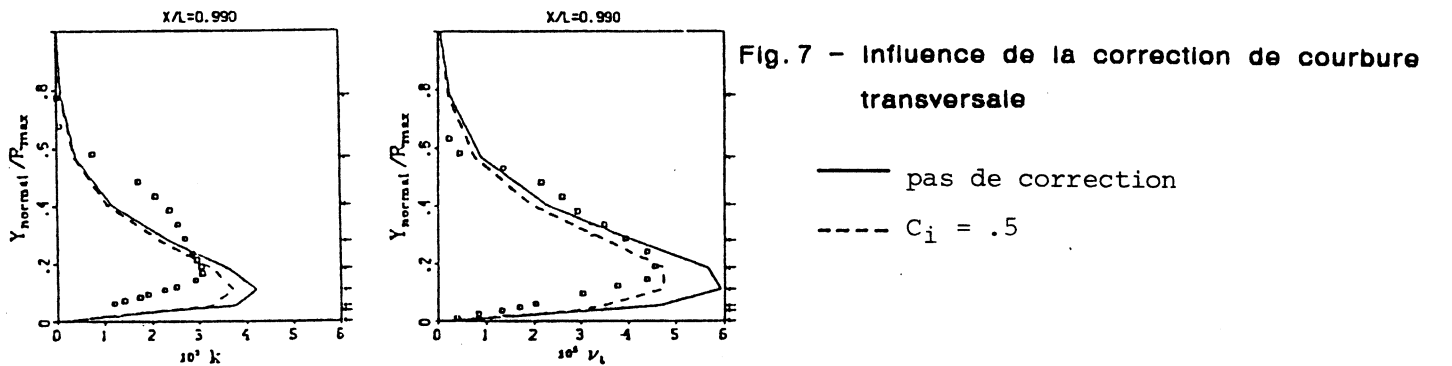
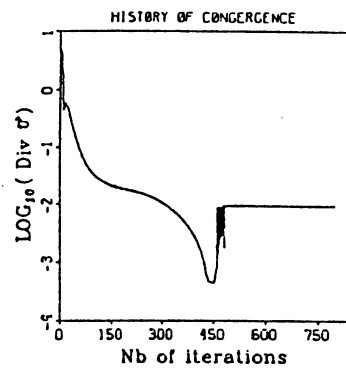
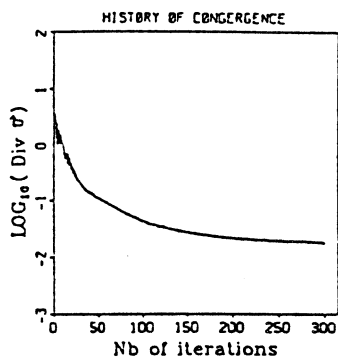
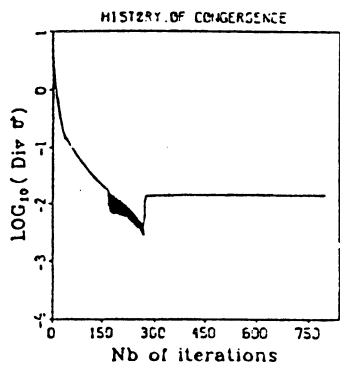


Fig. 7 - Influence de la correction de courbure transversale



(8a) Schéma neuf points

(8b) Influence de l'actualisation de  $D_1$   
 $D_1$  évalué à  $t^{n-1}$  (gauche), à  $t^n$  (droite)

Fig. 8 - Conditions de convergence

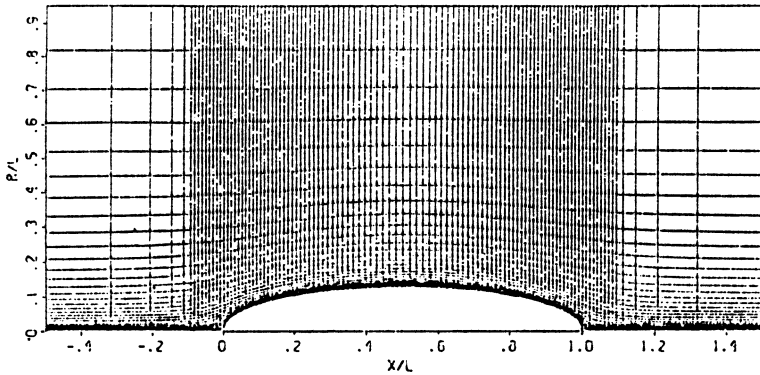


Fig. 9a. Vue partielle du domaine de calcul (116 points en x ; 30 points en r)

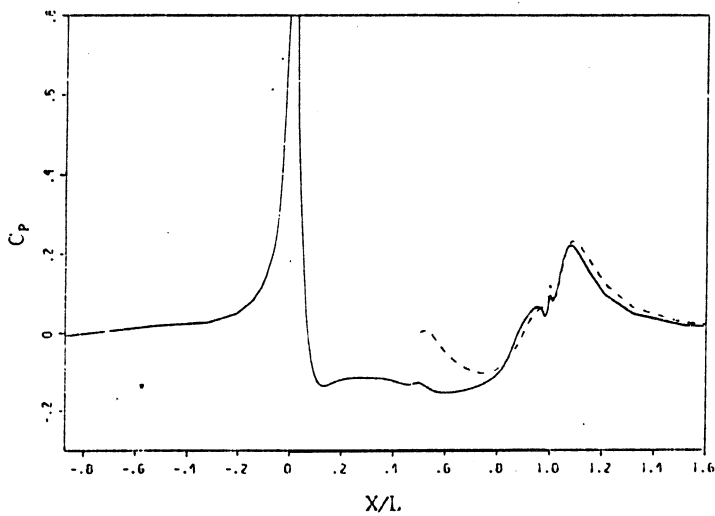


Fig. 9b. Comparaison des  $C_p$  pour la solution sur le domaine complet (traits pleins) et pour la solution sur le domaine arrière (tiretés).

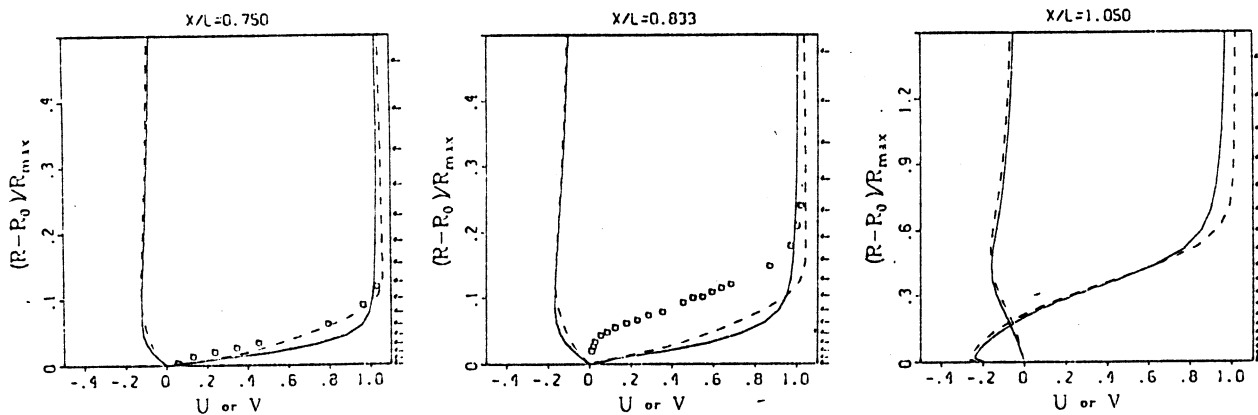


Fig. 9c. Comparaison à l'expérience des composantes de vitesse en x/L

Fig. 9 Résultats préliminaires pour le problème complet de l'écoulement autour d'un ellipsoïde de révolution 4:1 ( $0 \leq x/L \leq 1$ ). Cas  $Re=72000$ .

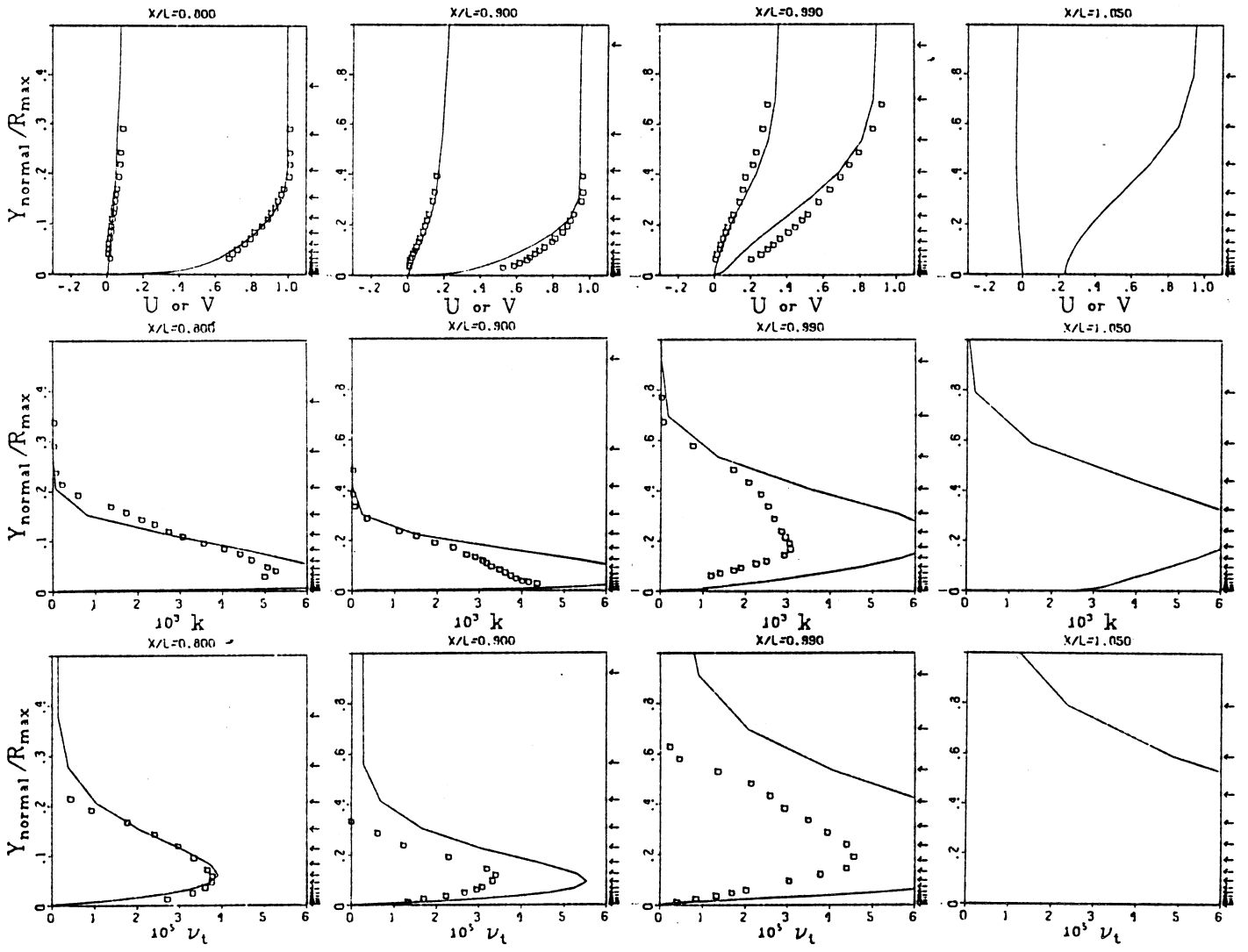


Fig. 10a Profils obtenus pour U, V, K, νₜ sans utilisation de fonction de paroi

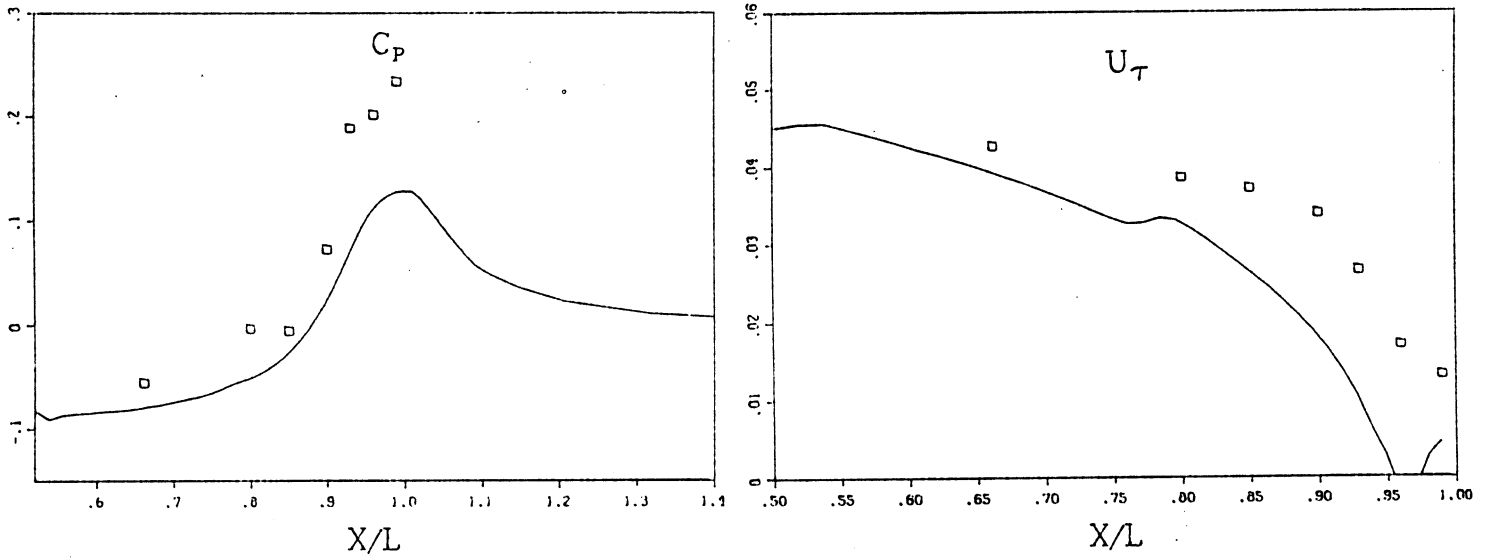


Fig. 10b  $C_p$  et  $U_T$  obtenus sans utilisation de fonction de paroi  
apparition d'un "décollement local" sur  $U_T$

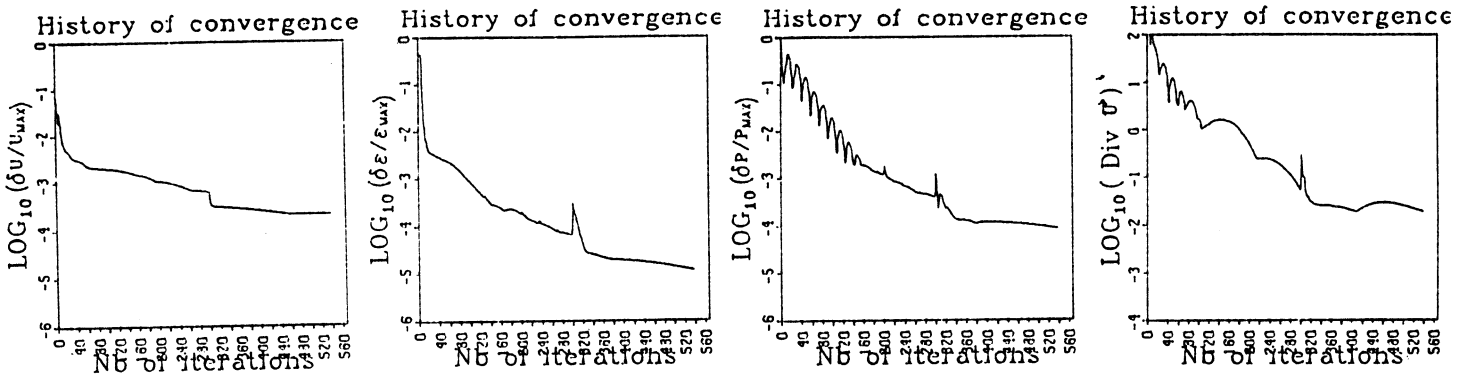


Fig. 10c Courbes de convergence caractéristiques (le ressaut à 300 itérations est dû à un changement du pas de temps).

Fig. 10 Modélisation en l'absence de fonction de paroi: modèle K- $\epsilon$  avec zonage longueur de mélange dans la région de la couche mince.

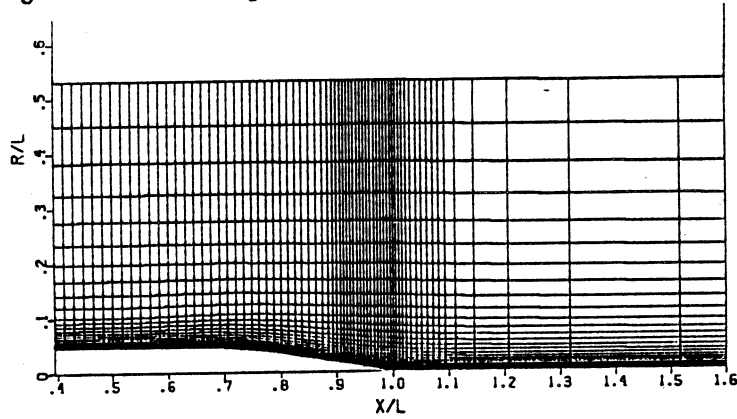


Fig. 11 - Maillage du corps STCAN

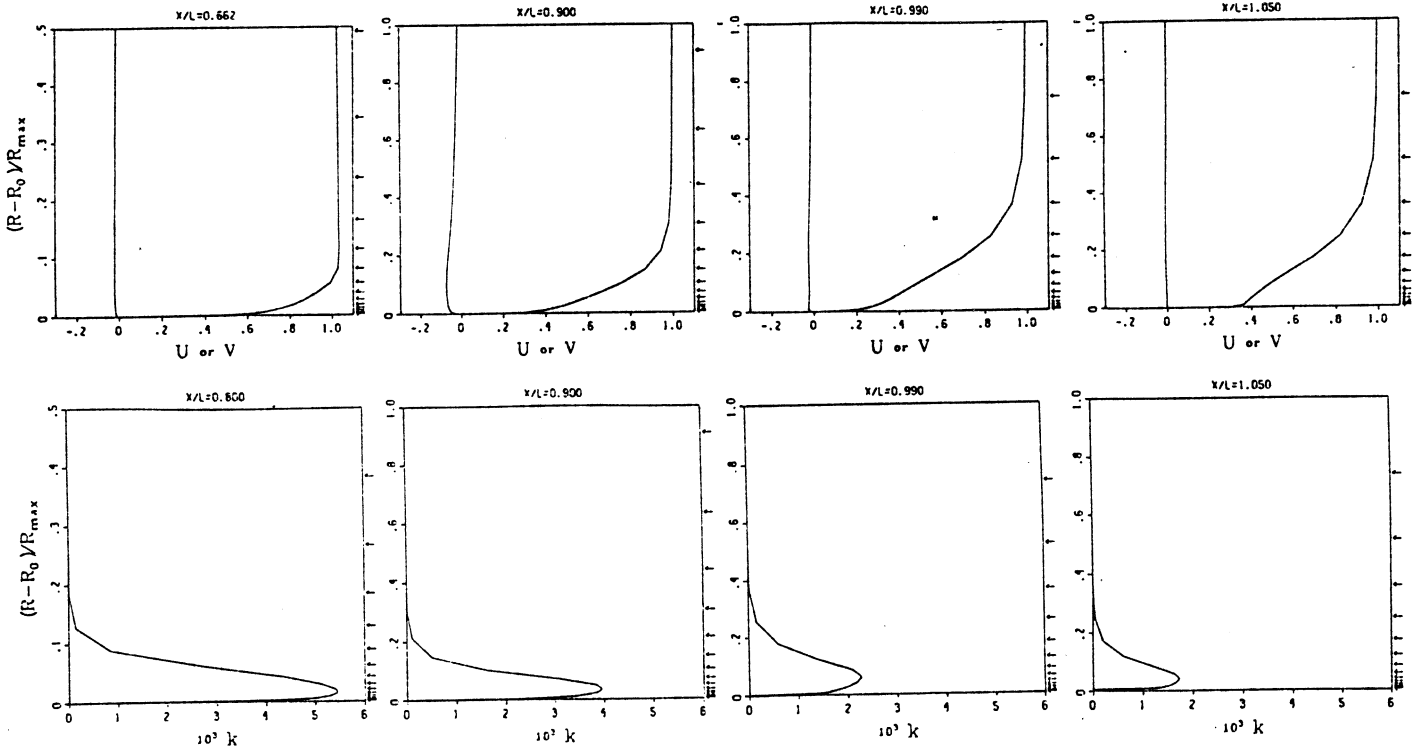


Fig. 12 - Résultats concernant l'arrière corps STCAN. Profils pour U, V et K.