

Ières JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

16 au 18 Février 1987 - Nantes

LE SILLAGE LOINTAIN D'UN NAVIRE AUX PETITS NOMBRES DE FROUDE

Francis Noblesse et Alexander Barnell

David Taylor Naval Ship Research and Development Center
Bethesda, MD 20084, USA

RESUME

Une approximation asymptotique, valable lorsque le nombre de Froude est suffisamment petit, pour la fonction amplitude des vagues lointaines d'un navire avançant à vitesse constante en mer calme est obtenue en appliquant successivement les méthodes de Laplace et de la phase stationnaire à la représentation intégrale de Neumann-Kelvin de la fonction amplitude des vagues lointaines. Cette étude asymptotique fournit une relation explicite simple entre la vitesse, la taille et la forme d'une coque, d'une part, et son champ de vagues lointain, d'autre part. L'analyse montre que le sillage de Kelvin lointain et la résistance de vagues d'un navire sont fortement affectés par la forme de la coque à la ligne d'eau, notamment l'évasement des flancs du navire et la forme de la proue et de la poupe. En particulier, on trouve que le coefficient de résistance de vagues est $O(F^2)$, où F est le nombre de Froude, pour un navire dont les flancs sont évasés sur au moins une portion de sa ligne d'eau, $O(F^4)$ pour un navire dont les flancs sont partout verticaux le long de la ligne d'eau et dont la proue ou la poupe (ou les deux) ne sont ni arrondies ni en point de rebroussement, et $O(F^6)$ pour un navire à flancs verticaux dont la proue et la poupe sont arrondies ou en point de rebroussement. L'analyse prédit aussi que, si le nombre de Froude est suffisamment petit, l'amplitude des vagues transversales ou divergentes dans le sillage de Kelvin lointain atteint un maximum isolé pointu à l'intérieur de l'angle de Kelvin de $19^\circ 1/2$ pour une coque dont les flancs sont évasés sur une petite portion de la ligne d'eau et verticaux partout ailleurs.

SUMMARY

A low-Froude-number asymptotic approximation to the far-field wave-amplitude function for a ship moving at constant speed in calm water is obtained by using the Neumann-Kelvin integral representation of this function as a starting point and successively applying the Laplace method and the method of stationary phase. This asymptotic analysis provides a simple explicit relationship between the speed, the size and the shape of a hull, on one hand, and its far-field Kelvin wake, on the other hand. The analysis shows that the far-field Kelvin wake and the wave resistance of a ship strongly depend on the shape of the ship hull at the waterline, notably the presence of flare, and the shape of the bow and the stern. In particular, it is found that the wave-resistance coefficient is $O(F^2)$, where F is the Froude number, for a ship form with a region of flare, $O(F^4)$ for a ship form that is wall sided everywhere and has either a bow or a stern (or both) that is neither cusped nor round, and $O(F^6)$ for a wall-sided ship form with both bow and stern that are either cusped or round. The analysis also predicts the occurrence of a sharp peak in the amplitude of the transverse or divergent waves in the far-field Kelvin wake, at an angle from the ship track smaller than the Kelvin cusp angle of $19^\circ 1/2$, for a hull form which has a small region of flare and is wall sided elsewhere, if the Froude number is sufficiently small.

Cette étude a été financée par les programmes Independent Research et General Hydrodynamics Research au David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center.

1. INTRODUCTION

La résistance de vagues d'un navire est directement liée à l'amplitude des vagues transversales et divergentes dans le sillage de Kelvin lointain, comme il est bien connu depuis Havelock (1934). Le champ de vagues lointain d'un navire est également important en soi même en raison de l'intérêt porté ces dernières années aux images radars de sillages de navires; voir par exemple Fu et Holt (1982), McDonough et al. (1985) et Hughes (1986).

Les études numériques du sillage de Kelvin de Scragg (1983) et Barnell et Noblesse (1986) ont mis en évidence des résultats intéressants susceptibles d'expliquer certaines observations, notamment l'existence de lignes brillantes à l'intérieur de l'angle de Kelvin de $19^{\circ}1/2$, faites pour certaines images radar de sillages de navires. Ces études numériques sont basées sur les approximations, fort simples, du navire mince de Michell et du navire élané de Noblesse (1983). De plus, des résultats numériques ont été obtenus pour une seule coque, de forme géométrique simple.

Ces études numériques préliminaires sont complétées ici par une étude analytique, pour une coque de forme quelconque, dans le cas limite où la valeur du nombre de Froude est petite, pour lequel il est possible d'obtenir une relation explicite simple entre la vitesse, la taille et la forme de la coque, d'une part, et son champ de vagues lointain, d'autre part. Cette relation analytique est obtenue à partir de la représentation intégrale de Neumann-Kelvin de la fonction amplitude des vagues lointaines et en utilisant successivement la méthode de Laplace et la méthode de la phase stationnaire.

Cette étude asymptotique indique que le sillage de Kelvin lointain, et en conséquence la résistance de vagues, d'un navire dépendent fortement de certaines caractéristiques de la forme de la coque à la ligne d'eau, notamment la présence d'évasement des flancs du navire et la forme de la ligne d'eau à la proue et à la poupe. En particulier, on trouve que le coefficient de résistance de vagues est $O(F^2)$, où F est le nombre de Froude, pour un navire dont les flancs sont évasés sur au moins une portion de sa ligne d'eau, $O(F^4)$ pour un navire dont les flancs sont verticaux partout le long de la ligne d'eau et dont la proue ou la poupe (ou les deux) ne sont ni arrondies ni en point de rebroussement, et $O(F^6)$ pour un navire à flancs verticaux dont la proue et la poupe sont arrondies ou en point de rebroussement.

L'analyse prédit aussi que, si le nombre de Froude est suffisamment petit, l'amplitude des vagues transversales ou divergentes dans le sillage de Kelvin lointain atteint un maximum isolé pointu à l'intérieur de l'angle de Kelvin de $19^{\circ}1/2$ pour une coque dont les flancs sont évasés sur une petite portion de la ligne d'eau et sont verticaux partout ailleurs. Une relation explicite très simple existe entre l'angle α , mesuré à partir de la trajectoire du navire, pour lequel on observe un maximum isolé pointu de l'amplitude des vagues dans le sillage de Kelvin lointain, d'une part, et, d'autre part, l'angle ϕ que la tangente à la ligne d'eau au point (ou dans la région) d'évasement des flancs du navire fait avec la trajectoire du navire. Cette relation analytique est donnée par l'équation (35a); les valeurs correspondantes de la longueur d'onde λ et de l'angle de propagation β des vagues dans le sillage de Kelvin sont définies par les équations (35b,c). Ces trois relations sont représentées graphiquement dans la figure 2.

2. APPROXIMATION DE KELVIN POUR LE SILLAGE LOINTAIN

Il est commode d'étudier le champ de vagues lointain en utilisant les coordonnées adimensionnelles "lointaines" $(\xi, \eta, \zeta) = (X, Y, Z)g/U^2$, où g représente l'accélération de la pesanteur, U la vitesse d'avance du navire et (X, Y, Z) les coordonnées dimensionnelles. Le plan $\zeta = 0$ coïncide avec la surface libre moyenne et l'axe des ζ est orienté vers le haut. L'axe des ξ coïncide avec la trajectoire du navire et est orienté vers la proue. L'origine du système de coordonnées est placée à l'intérieur du navire.

L'élevation ζ de la surface libre à une distance derrière le navire assez grande pour que les effets nonlinéaires soient négligeables est définie par l'intégrale

$$\pi \zeta(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (E_+ + E_-) K(t) (1+t^2)^{1/2} dt, \quad (1)$$

dans laquelle $K(t)$ est la fonction amplitude des vagues lointaines et E_{\pm} est la fonction trigonométrique

$$E_{\pm}(t; \xi, \sigma) = \exp[i\xi(1 \mp \sigma t)(1+t^2)^{1/2}]$$

avec $\sigma = \eta/(-\xi) = \tan(\alpha)$, (2)

où α est l'angle que fait la droite joignant l'origine du système de coordonnées au point d'observation (ξ, η) avec la trajectoire du navire. Le sillage est symétrique par rapport à l'axe $\eta = 0$ pour un navire symétrique tribord et babord, comme on le suppose dans cette étude, et on peut donc limiter l'étude du sillage à la région $(\eta \geq 0, \xi < 0)$; ce qui donne $\sigma \geq 0$ et $0 \leq \alpha < 90^\circ$.

Une approximation asymptotique lointaine, valable à la limite $\xi \rightarrow -\infty$, de l'intégrale (1) peut être obtenue en utilisant la méthode de la phase stationnaire, comme il est bien connu depuis Kelvin. Cette approximation lointaine est donnée par

$$(-\xi)^{1/2} \zeta(\xi, \alpha) \approx \operatorname{Re} \{ A_- K(t_-) \exp[i(\xi \theta_- - \pi/4)] + A_+ K(t_+) \exp[i(\xi \theta_+ + \pi/4)] \} \quad (3)$$

lorsque $\xi \rightarrow -\infty$ avec $0 \leq \alpha < \sin^{-1}(1/3) \approx 19^\circ 28'$,

où t_{\pm} sont les valeurs de t pour lesquelles les phases $(1 \mp \sigma t)(1+t^2)^{1/2}$ des fonctions trigonométriques E_{\pm} dans l'intégrale (1) sont stationnaires. De plus, les valeurs de phase stationnaire t_{\pm} et les fonctions amplitude A_{\pm} et phase θ_{\pm} sont définies explicitement en fonction de l'angle α ; c'est à dire que les fonctions $t_{\pm}(\alpha)$, $A_{\pm}(\alpha)$ et $\theta_{\pm}(\alpha)$ sont indépendantes de la vitesse, de la taille et de la forme du navire. En particulier, on a

$$t_{\pm}(\alpha) = [1 \pm (1 - 8\sigma^2)^{1/2}] / 4\sigma, \quad (4)$$

où $\sigma = \tan(\alpha)$ comme l'indique (2).

L'approximation de Kelvin (3) montre qu'en tout point $(\xi \ll -1, 0 \leq \alpha < 19^\circ 28')$ le champ de vagues consiste en deux vagues: une vague transversale (-) et une vague divergente (+). Les longueurs d'onde (adimensionnelles: $\lambda = \Lambda g/U^2$) λ_{\pm} et les angles de directions de propagation β_{\pm} , mesurés à partir de la trajectoire du navire, des vagues transversales et divergentes à un point (ξ, α) dans le sillage lointain ne dépendent que de l'angle α , comme il est bien connu. Plus précisément, on a

$$\lambda_{\pm}(\alpha) = 2^{1/2} 16 \pi \sigma^2 / [3 \mp (1 - 8\sigma^2)^{1/2}] [1 - 4\sigma^2 \pm (1 - 8\sigma^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\beta_{\pm}(\alpha) = \cos^{-1} \{ 2^{1/2} 2\sigma / [1 + 4\sigma^2 \pm (1 - 8\sigma^2)^{1/2}]^{1/2} \}. \quad (5b)$$

En particulier, on a

$$1 \geq \lambda_-/2\pi \geq 2/3 \geq \lambda_+/2\pi \geq 0 \text{ et}$$

$$0 \leq \beta_- \leq \sin^{-1}(1/3^{1/2}) \approx 35^\circ 16' \leq \beta_+ \leq 90^\circ.$$

L'approximation (3) indique que les phases des vagues transversales et divergentes, données par $\xi\theta_\pm(\alpha) \pm \pi/4$, sont définies explicitement en fonction de ξ et de α , tandis que les amplitudes de ces deux vagues, données par $A_\pm(\alpha) |K[t_\pm(\alpha)]| / (-\xi)^{1/2}$, dépendent de la vitesse, la taille et la forme du navire par l'intermédiaire de la fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$. Cette fonction, qui caractérise donc la signature lointaine du navire, est maintenant considérée.

3. REPRESENTATION INTEGRALE DE LA FONCTION $K(t)$

Il est commode de définir la fonction $K(t)$ en utilisant les coordonnées adimensionnelles "proches" $(x, y, z) = (X, Y, Z)/L$, où L représente la longueur du navire. Lorsque les termes nonlinéaires dans la condition à la surface libre sont négligés, la fonction $K(t)$ est définie par la somme d'une intégrale sur la coque mouillée moyenne, h , et une intégrale le long de la ligne d'eau moyenne, c .

Plus précisément, pour une coque symétrique tribord et babord, on a

$$K(t) = K_+(t) + K_-(t), \quad (6a)$$

où les fonctions $K_\pm(t)$ sont définies par la représentation intégrale

$$F^2 K_\pm(t) = \int_c E_\pm(n_x^2 + t_x \phi_t - n_x t_y \phi_d + i\nu^2 p \phi) t_y dl + \nu^2 \int_h \exp(\nu^2 p^2 z) E_\pm(n_x + \nu^2 p^2 \phi n_\pm) da; \quad (6b)$$

dans cette expression, F représente le nombre de Froude et ν son inverse:

$$F = U/(gL)^{1/2} \text{ et } \nu = 1/F, \quad (7a, b)$$

p est défini comme suit:

$$p = (1+t^2)^{1/2}, \quad (8)$$

et E_\pm est la fonction trigonométrique suivante:

$$E_\pm = \exp[-i\nu^2 p(x \pm ty)]. \quad (9)$$

De plus, $\vec{i}(t_x, t_y, 0)$ est le vecteur unitaire tangent à la ligne d'eau moyenne c et dirigé vers la proue et $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$ est le vecteur unitaire normal à la coque h et dirigé vers l'eau, comme le montre la figure 1. Le terme n_\pm est défini par la relation $n_\pm = -n_x + i(n_x \pm tn_y)/p$. Les éléments d'arc de c et d'aire de h sont représentés par dl et da . Enfin, $\phi = \phi(\vec{x})$ représente le potentiel des vitesses adimensionnel $\phi = \Phi/UL$ au point d'intégration \vec{x} de c ou de h , ϕ_t représente la dérivée de ϕ dans la direction du vecteur \vec{i} tangent à c et ϕ_d est la dérivée de ϕ dans la direction du vecteur $\vec{n} \times \vec{i}$, qui est tangent à h et dirigé vers le bas comme l'indique la figure 1.

La représentation intégrale (6a, b) ne définit pas de manière explicite la fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$ en fonction du nombre de Froude, c'est à dire de la vitesse et de la taille du navire, et de la forme de la coque. L'expression (6) ne fournit donc pas de relation physique simple entre les caractéristiques du navire (vitesse, taille et forme) et celles de son sillage lointain (c'est à dire: amplitudes des vagues transversales et divergentes lointaines). Une telle relation explicite peut cependant être obtenue dans le cas limite où la valeur du nombre de Froude est assez petite, comme nous le montrons maintenant.

4. PREMIERE ETAPE : APPLICATION DE LA METHODE DE LAPLACE

Pour de grandes valeurs de $\nu = 1/F$, ou plus généralement pour de grandes valeurs de νp , la fonction exponentielle $\exp(\nu^2 p^2 z)$ dans l'intégrale sur la surface de la coque décroît très rapidement pour des valeurs négatives de z , de telle sorte que seule la partie supérieure de la coque a une contribution appréciable à l'intégrale sur h . Plus précisément, cette intégrale de surface peut être approximée par une intégrale le long de la ligne d'eau moyenne c . De plus, cette intégrale de ligne peut être combinée avec l'intégrale de ligne d'eau déjà présente dans l'expression (6b). Cette analyse asymptotique, qui est essentiellement une application de la méthode de Laplace, est présentée en détail dans Noblesse (1986a) et est très brièvement résumée ici.

La ligne d'eau moyenne est représentée par les équations paramétriques

$$x = x_0(\lambda) \text{ et } y = y_0(\lambda), \quad (10a,b)$$

où le paramètre λ varie entre les valeurs λ_1 et λ_2 correspondant à la proue et à la poupe. Au voisinage de la ligne d'eau moyenne, la surface de la coque est approximée par les équations paramétriques

$$x = x_0(\lambda) + x_1(\lambda)z + x_2(\lambda)z^2 + \dots \text{ et } y = y_0(\lambda) + y_1(\lambda)z + y_2(\lambda)z^2 + \dots \quad (11a,b)$$

où on a $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ et $z \leq 0$.

De la même façon, le potentiel au voisinage de c peut être approximé comme suit:

$$\phi = \phi_0(\lambda) + \phi_1(\lambda)z + \phi_2(\lambda)z^2 + \dots \quad (12)$$

Après des calculs assez longs on obtient l'approximation suivante:

$$K(t) \approx \nu^2 q^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (E_0^+ a_+ + E_0^- a_-) d\lambda \text{ lorsque } F \rightarrow 0, \quad (13)$$

où q est défini par la relation

$$q = 1/p = 1/(1+t^2)^{1/2}, \quad (14)$$

E_0^\pm sont les fonctions trigonométriques données par

$$E_0^\pm = \exp[-i\nu^2 p(x_0 \pm ty_0)] \quad (15)$$

et a_\pm représentent les fonctions amplitudes

$$a_\pm = a_1^\pm + F^2 q^2 a_2^\pm + O(F^4); \quad (16)$$

les expressions pour les amplitudes du premier et second ordre a_1^\pm et a_2^\pm sont données dans Noblesse (1986a).

La représentation intégrale (6b) montre que les termes dominants, dans la limite $F \rightarrow 0$, dans les intégrales des intégrales sur la ligne d'eau c et sur la coque h sont $i\nu^2 p \phi_{t_y} E_\pm$ et $\nu^4 p^2 \phi_{n_\pm} E_\pm \exp(\nu^2 p^2 z)$. Par ailleurs, l'approximation (13) et l'expression (16) pour les fonctions amplitudes a_\pm indiquent que cette amplitude est $O(1)$ lorsque $F \rightarrow 0$. Les termes dominants dans l'intégrale sur la ligne d'eau et l'intégrale sur la coque s'annulent donc mutuellement, du moins au premier ordre. Ceci démontre bien l'importance de l'intégrale sur la ligne d'eau.

5. DEUXIEME ETAPE : APPLICATION DE LA METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE

La méthode de la phase stationnaire indique que les contributions principales à l'intégrale (13) lorsque les fonctions trigonométriques E_0^\pm oscillent très rapidement, c'est à dire dans la limite $\nu \rightarrow \infty$ ou plus généralement $\nu p \rightarrow \infty$, proviennent des points où les phases de ces fonctions trigonométriques sont stationnaires, c'est à dire des points où on a $x'_0 \pm ty'_0 = 0$, ainsi que des points limites λ_1 et λ_2 de l'intervalle d'intégration, c'est à dire de la proue et de la poupe. Cette analyse asymptotique est présentée en détail dans Noblesse (1986b) et seulement les résultats en sont donnés ici. On a l'approximation suivante:

$$K(t) \approx i\nu q^3 [\sum K_\pm + F(K_1 - K_2)] \text{ lorsque } F \rightarrow 0, \quad (17)$$

où K_1 et K_2 correspondent aux contributions de la proue et de la poupe et K_\pm correspond à la contribution du point où la phase de la fonction trigonométrique E_0^\pm est stationnaire, c'est à dire le point pour lequel on a $y'_0/x'_0 = \mp 1/t$ ou $dy_0/dx_0 = \mp 1/t$. La sommation dans l'approximation asymptotique (17) est étendue à tous ces points de phase stationnaire sur la ligne d'eau moyenne c .

Les contributions de la proue et de la poupe peuvent être exprimées sous la forme

$$K_i = a_i \exp(-i\nu^2 p x_i), \quad (18)$$

où $i=1$ ou 2 , x_i est l'abscisse de la proue ($i=1$) ou de la poupe ($i=2$) et a_i est la fonction amplitude donnée par

$$a_i = 2n_x A_1 + iF^2 q (A_2^+ + A_2^-) + O(F^4). \quad (19)$$

La fonction amplitude du premier ordre A_1 est définie par la relation

$$A_1 = n_x (n_y - \psi_t + ipn_y \psi_d) / (n_x + iqn_x) + ipn_x n_y (n_x \psi_d - q^2 n_x) / [q^2(1 - n_x^2) - n_x^2] \quad (20)$$

$$\text{avec } (\psi_t, \psi_d) = (\phi_t, \phi_d) / (1 - n_x^2)^{1/2}. \quad (20a, b)$$

Les fonctions amplitude du second ordre A_2^\pm sont données par une expression assez compliquée, qui peut être trouvée dans Noblesse (1986b).

L'équation (20) définit la fonction amplitude du premier ordre A_1 explicitement en fonction des valeurs de t , $p = (1+t^2)^{1/2}$ et $q = 1/p$, des caractéristiques géométriques de la coque à la proue et à la poupe, plus précisément du vecteur unitaire $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$ normal à la coque, et des composantes ϕ_t et ϕ_d du vecteur vitesse dans les directions des vecteurs unitaires \vec{t} et $\vec{n} \times \vec{t}$ tangents à la coque. L'équation (19) montre que la première approximation de la fonction amplitude a_i , donnée par $2n_x A_1$, est nulle si $n_x = 0$, c'est à dire si la ligne d'eau moyenne c a un point de rebroussement à la proue ou à la poupe. L'équation (20) montre que la première approximation de la fonction amplitude a_i est aussi nulle si la proue ou la poupe est arrondie, puisque on a alors $n_y = 0$ et $\phi_t = -\phi_d = 0$ par raison de symétrie. La contribution de la proue ou de la poupe à la fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$ est donc $O(F^2)$ si $n_x = 0$ ou $n_y = 0$ à la proue ou à la poupe, c'est à dire que nous avons

$$K_i = O(F^2) \text{ si } n_x^2 = 0 \text{ ou } n_y^2 = 0. \quad (21)$$

La contribution K_\pm d'un point de la ligne d'eau moyenne c où la phase de la fonction trigonométrique E_0^\pm est stationnaire, c'est à dire où on a

$$dy_0/dx_0 = \mp 1/t, \quad (22)$$

peut être exprimée sous la forme

$$K_{\pm} = \pm (2\pi r)^{1/2} a_{\pm} \exp[\mp i \{ \nu^2 (y_0 t_x - x_0 t_y) / t_y^2 - \epsilon \pi / 4 \}], \quad (23)$$

où r représente le rayon de courbure de c au point de phase stationnaire, ϵ prend la valeur $+1$ ou -1 si la ligne d'eau moyenne c est convexe ou concave au point (x_0, y_0) , respectivement, et la fonction amplitude a_{\pm} est donnée par

$$a_{\pm} = A_1 - F^2 q A_2^{\pm} + O(F^4). \quad (24)$$

La fonction amplitude du premier ordre A_1 est définie par la relation

$$A_1 = -n_x n_z + (1 - n_z^2)^{1/2} \phi_d. \quad (25)$$

Les fonctions amplitude du second ordre A_2^{\pm} sont définies par une expression assez compliquée, que l'on peut trouver dans Noblesse (1986b).

Cependant, l'équation (25) définit la première approximation de la contribution d'un point de phase stationnaire de manière explicite simple en fonction des caractéristiques géométriques de la coque et de la valeur de la composante ϕ_d du vecteur vitesse tangentielle à h orientée vers le bas au point de phase stationnaire. Dans le cas particulier où la coque est verticale au point de phase stationnaire, on a $n_x = 0$ et l'équation (25) devient

$$a_{\pm} = -\phi_z + O(F^2) \text{ si } n_x = 0; \quad (26)$$

La condition à la surface libre $\phi_z = -F^2 \phi_{zz} = O(F^2)$ donne alors

$$a_{\pm} = O(F^2) \text{ si } n_x = 0. \quad (27)$$

L'équation (23) montre alors que la contribution d'un point de phase stationnaire (x_0, y_0) de la ligne d'eau moyenne c où la coque est verticale est $O(F^2)$, c'est à dire que nous avons

$$K_{\pm} = O(F^2) \text{ si } n_x = 0. \quad (28)$$

Par ailleurs, les équations (23) et (25) donnent

$$K_{\pm} = O(1) \text{ si } n_x \neq 0. \quad (29)$$

La sommation dans l'équation (17) s'étend à tous les points de la ligne d'eau moyenne c pour lesquels la phase de la fonction trigonométrique E_0^+ ou de la fonction E_0^- est stationnaire, c'est à dire les points où la pente de c est égale à $-1/t$ ou $+1/t$, respectivement. Le nombre de points de phase stationnaire, et leur position le long de la ligne d'eau, dépendent de la valeur de t et de la forme de c . Par exemple, dans le cas simple d'une coque avec une ligne d'eau constituée par un avant parabolique pointu $1/4 \leq x \leq 1/2$ défini par l'équation $y = 4bx(1-2x)$, où b est le rapport largeur/longueur du navire, une section centrale rectiligne $-1/4 \leq x \leq 1/4$, et un arrière arrondi elliptique $-1/2 \leq x \leq -1/4$ défini par l'équation $y = b[-2x(1+2x)]^{1/2}$, il y a un point de phase stationnaire dans la région arrière donné par $x = -[1 + 1/(1+4b^2t^2)]^{1/2}/4$, si bien que l'on a $-1/2 \leq x \leq -1/4$ pour $0 \leq t \leq \infty$ avec $x \rightarrow -1/2$ lorsque $t \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -1/4$ lorsque $t \rightarrow \infty$, et un point de phase stationnaire dans la région avant donné par $x = (1+1/4bt)/4$ pour $1/4b \leq t \leq \infty$ avec $x \rightarrow 1/2$ lorsque $t \rightarrow 1/4b$ et $x \rightarrow 1/4$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Nous avons ainsi un point de phase stationnaire dans la région arrière lorsque $0 \leq t \leq 1/4b$ et deux points de phase stationnaire, un dans la région arrière et un dans la région avant, lorsque $1/4b \leq t \leq \infty$. Les deux points de phase stationnaire tendent vers $x = \pm 1/4$, où $dy/dx = 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$.

L'approximation asymptotique (17) et les equations (18)-(21) et (22)-(29) qui déterminent les contributions de la proue et de la poupe, et du (ou des) point(s) de phase stationnaire sur la ligne d'eau, respectivement, montrent que le comportement au bas nombre de Froude de la fonction amplitude des vagues lointaines est fortement affecté par la forme de la coque au voisinage de la ligne d'eau. Plus précisément, pour une valeur de t à laquelle correspond(ent) un (ou plusieurs) point(s) de phase stationnaire sur la ligne d'eau à un endroit où il y a évasement des flancs, la contribution de ces points de phase stationnaire domine la contribution de la proue et de la poupe et est d'ordre $1/F$, c'est à dire que $K(t) = O(1/F)$. D'autre part, pour une valeur de t à laquelle ne correspond aucun point de phase stationnaire, ou à laquelle correspondent des points de phase stationnaire situés dans des régions où les flancs ne sont pas évasés, la contribution principale provient de la proue et de la poupe, et est d'ordre 1, c'est à dire que $K(t) = O(1)$. Cependant, si $n_x = 0$ ou si $n_y = 0$ à la fois à la proue et à la poupe, en d'autres termes si la proue et la poupe sont arrondies ou en point de rebroussement, leur contribution est $O(F^2)$ et la contribution du (des) point(s) de phase stationnaire, qui est $O(F)$ s'il n'y a pas d'évasement des flancs (le cas considéré ici), domine; si bien que l'on a alors $K(t) = O(F)$.

Dans le cas d'une coque à flancs partout verticaux, la contribution de la proue et de la poupe domine pour toutes les valeurs de t , et on a $K(t) = O(1)$ pour $0 \leq t \leq \infty$. D'autre part, dans le cas d'une coque qui présente un évasement des flancs le long d'une région de la ligne d'eau et dont les flancs sont verticaux partout ailleurs, la contribution de la proue et de la poupe domine et est $O(1)$ seulement pour les valeurs de t auxquelles correspondent des points de phase stationnaire situés en dehors de la région d'évasement des flancs; pour les valeurs de t auxquelles correspondent des points de phase stationnaire situés dans la région d'évasement des flancs, la contribution de ces points de phase stationnaire domine, et est d'ordre $1/F$. Dans ce cas, la fonction $K(t)$ est $O(1/F)$ pour une plage de valeurs de t (correspondant à la région d'évasement des flancs) et $O(1)$ pour les autres valeurs de t . Si la région d'évasement est peu étendue, et si la pente dy_0/dx_0 de la ligne d'eau varie assez peu dans cette région, la plage des valeurs de t pour lesquelles $K(t) = O(1/F)$ est également peu étendue. La fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$ peut alors présenter un maximum prononcé pour une certaine valeur de t à la limite du bas nombre de Froude. Plusieurs maxima isolés de la fonction $K(t)$ peuvent même exister si la coque a plusieurs régions distinctes d'évasement des flancs à l'intérieur desquelles la pente de la ligne d'eau varie graduellement.

Il convient de remarquer que le résultat $K(t) = O(1/F)$ pour des valeurs de t auxquelles correspondent des points de phase stationnaire situés dans une région d'évasement des flancs n'implique nullement que l'élévation correspondante de la surface libre devienne infinie lorsque $F \rightarrow 0$. En effet, l'approximation asymptotique (3), pour laquelle on a $(\xi, \zeta) = (X, Z)g/U^2$, donne alors $Zg/U^2 = O[1/F(-\xi)^{1/2}] = O[1/(-X/L)^{1/2}]$ lorsque $F \rightarrow 0$ et $-X/L \rightarrow \infty$. L'élévation de la surface libre Z est ainsi d'ordre $(U^2/g)/(-X/L)^{1/2}$ lorsque $F \rightarrow 0$ et $-X/L \rightarrow \infty$. Pour les valeurs de t pour lesquelles $K(t) = O(1)$, il apparaît que $Z = O[(U^2/g)F/(-X/L)^{1/2}]$ lorsque $F \rightarrow 0$ et $-X/L \rightarrow \infty$.

Il convient également de remarquer que l'approximation asymptotique (18)-(20) pour la contribution de la proue et de la poupe n'est pas valable au voisinage des valeurs de t pour lesquelles la proue ou la poupe est un point de phase stationnaire, c'est à dire lorsque la pente de la ligne d'eau dy_0/dx_0 à la proue ou à la poupe est égale à $-1/t$ ou $1/t$, respectivement. De même l'approximation

asymptotique (23)-(25) pour la contribution d'un point de phase stationnaire n'est pas valable si ce point de phase stationnaire est situé à un point d'inflexion de la ligne d'eau. En effet, le rayon de courbure r à un tel point d'inflexion est infini et l'équation (23) prédit une contribution K_{\pm} infinie. Des approximations asymptotiques valables dans ces cas particuliers peuvent être facilement obtenues et sont données dans Noblesse (1986b). On remarquera simplement ici que la fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$ dans le cas d'une coque ayant un évasement des flancs à un point d'inflexion de la ligne d'eau peut présenter un maximum particulièrement prononcé pour la valeur de t correspondant au point d'inflexion puisque l'on a $K(t) = O(1/F^{4/3})$ lorsque $F \rightarrow 0$ pour cette valeur de t .

6. CONCLUSION : FORME DE LA COQUE ET CARACTERISTIQUES DU SILLAGE DE KELVIN

L'approximation asymptotique lointaine classique du sillage de Kelvin, obtenue dans la section 2 en appliquant la méthode de la phase stationnaire, et l'approximation asymptotique au bas nombre de Froude de la fonction amplitude des vagues lointaines, obtenue dans les sections 4 et 5 en utilisant successivement la méthode de Laplace et la méthode de la phase stationnaire, fournissent une relation analytique simple entre la vitesse, la taille et la forme de la coque, d'une part, et les vagues lointaines du navire, d'autre part. Cette relation explicite entre le générateur de vagues et ses vagues est résumée ci-dessous.

L'approximation asymptotique du sillage de Kelvin lointain (3) montre qu'à tout point (ξ, α) , avec $\xi = Xg/U^2 \ll -1$ et $0 \leq \alpha < \sin^{-1}(1/3) \approx 19^{\circ}28'$, le champ de vagues consiste en deux vagues planes progressives — une vague transversale et une vague divergente — de longueurs d'onde λ_- et λ_+ se propageant à des angles β_- et β_+ par rapport à la trajectoire du navire, respectivement. Les longueurs d'onde λ_{\pm} et les angles de propagation β_{\pm} dépendent seulement de l'angle α d'observation du sillage de Kelvin; c'est à dire que λ_{\pm} et β_{\pm} sont indépendants de la taille et de la forme du navire, ce qui est bien connu. En particulier, les fonctions $\lambda_{\pm}(\alpha)$ et $\beta_{\pm}(\alpha)$ sont définies par les équations (5a,b). D'autre part, à une certaine distance ξ derrière le navire, les amplitudes de ces vagues sont données par le produit des fonctions $A_{\pm}(\alpha)$ et de la fonction amplitude des vagues lointaines $K(t)$, évaluée aux points de phase stationnaire $t_{\pm}(\alpha)$ définis par l'équation (4). La fonction $K(t)$ dépend de la forme de la coque et du nombre de Froude de manière compliquée, par l'intermédiaire d'une intégrale de surface sur la coque mouillée moyenne et d'une intégrale sur la ligne d'eau moyenne, comme l'indique l'équation (6b). L'approximation au bas nombre de Froude de ces intégrales est donnée par (17).

L'approximation analytique (17) montre que pour une valeur donnée de t , correspondant à une certaine valeur de α comme l'indique l'équation (4), les contributions principales à la fonction $K(t)$ proviennent de plusieurs points particuliers de la ligne d'eau moyenne. Ces points sont d'une part la proue et la poupe, et (en général) un (ou plusieurs) point(s) de phase stationnaire, d'autre part. En effet, le nombre de ces points de phase stationnaire, et leur position sur la ligne d'eau, définie par la condition

$$|dy_0/dx_0| = 1/t, \quad (30)$$

dépendent de la forme de la ligne d'eau et de la valeur de t .

Soit ϕ l'angle que fait la tangente à la ligne d'eau moyenne avec la trajectoire du navire, c'est à dire que

$$\tan(\phi) = |dy_0/dx_0| \text{ et } 0 \leq \phi \leq \pi/2. \quad (31)$$

Les équations (30), (31), (4) et (2) montrent alors que les points de phase stationnaire $t_+(\alpha)$ et $t_-(\alpha)$ associés à une valeur donnée de α sont définis par l'équation

$$\phi_{\pm}(\alpha) = \tan^{-1}\{4\sigma/[1 \pm (1-8\sigma^2)^{1/2}]\}, \quad (32)$$

où $\sigma = \tan(\alpha)$. Pour une forme de ligne d'eau donnée, l'équation (32) prédit le nombre de points de phase stationnaire et indique leur position sur la ligne d'eau correspondant à un angle α à l'intérieur de l'angle de Kelvin. Plus précisément, l'équation (32) donne

$$0 \leq \phi_+ \leq \tan^{-1}(2^{1/2}) \approx 54^\circ 44' \leq \phi_- \leq 90^\circ \quad (33)$$

$$\text{et } \phi_+ \approx 2\alpha, \phi_- \approx \pi/2 - \alpha \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (34a,b)$$

Ainsi, les points de la ligne d'eau où la pente est entre 0 et $54^\circ 44'$ contribuent principalement au système de vagues divergentes alors que les points de la ligne d'eau où la pente est entre $54^\circ 44'$ et 90° contribuent principalement au système de vagues transversales.

Les équations (2), (5a,b) et (32) définissent les longueurs d'onde λ_{\pm} , les angles de propagation β_{\pm} et les angles des tangentes à la ligne d'eau ϕ_{\pm} correspondant à un angle donné α dans le sillage de Kelvin. Les fonctions $\lambda_{\pm}(\alpha)$, $\beta_{\pm}(\alpha)$ et $\phi_{\pm}(\alpha)$ sont représentées dans le quart supérieur gauche de la figure 2, dans laquelle les indices T et D sont utilisés au lieu de $-$ et $+$ pour faire référence aux vagues transversales et divergentes, respectivement. Les relations établies plus haut entre α et λ , β , ϕ peuvent être utilisées pour déterminer l'angle d'observation du sillage de Kelvin α , la longueur d'onde λ et l'angle de propagation β correspondant à un angle donné de la tangente à la ligne d'eau ϕ . Plus précisément, on peut obtenir les relations remarquablement simples qui suivent:

$$\alpha = \tan^{-1}[\tan\phi/(2+\tan^2\phi)], \quad \lambda/2\pi = \sin^2(\phi) \text{ et } \beta = \pi/2 - \phi. \quad (35a,b,c)$$

Les fonctions $\alpha(\phi)$, $\lambda(\phi)$ et $\beta(\phi)$ sont représentées dans le quart supérieur droit de la figure 2. Alternativement, les relations précédentes reliant ϕ , α , λ et β peuvent être représentées sous la forme des fonctions $\phi(\beta)$, $\alpha(\beta)$, $\lambda(\beta)$ et $\phi(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ représentées dans les quarts inférieurs droit et gauche de la figure 2, respectivement. Ces représentations graphiques équivalentes montrent que:

$$0 \leq \phi_D \leq \tan^{-1}(2^{1/2}) \approx 54^\circ 44' \leq \phi_T \leq 90^\circ, \quad (36a)$$

$$0 \leq \lambda_D/2\pi \leq 2/3 \leq \lambda_T/2\pi \leq 1, \quad (36b)$$

$$90^\circ \geq \beta_D \geq \tan^{-1}(2^{-1/2}) \approx 35^\circ 16' \geq \beta_T \geq 0, \quad (36c)$$

où les indices D et T se rapportent aux vagues divergentes et transversales, respectivement.

Les premiers termes du développement asymptotique au bas nombre de Froude des contributions $K_{1,2}$ de la proue et de la poupe et des contributions K_{\pm} des points de phase stationnaire dans l'approximation (17) sont donnés par les équations (18)-(20) et (23)-(25), respectivement. Les termes du second ordre dans ces développements asymptotiques sont définis par des expressions compliquées. Toutefois, les termes du premier ordre fournissent des approximations explicites simples en fonction des caractéristiques géométriques de la coque et des composantes de la vitesse dans les directions tangentes à la coque \vec{i} et $\vec{\pi} \times \vec{i}$. En particulier, les développements asymptotiques au bas nombre de Froude donnés

dans la section 5 montrent que les contributions K_1 et K_2 de la proue et de la poupe sont $O(1)$ sauf si la proue ou la poupe sont arrondie(s) ou en point de rebroussement, auquel cas $K_{1,2} = O(F^2)$. La contribution d'un point de phase stationnaire donné est $O(1/F)$, et par conséquent domine les contributions de la proue et de la poupe s'il y a évasement des flancs à ce point; sinon, c'est à dire si la coque est verticale au point de phase stationnaire, sa contribution est $O(F)$.

Ainsi, pour une coque partout verticale le long de la ligne d'eau, les contributions de la proue et de la poupe dominant (à condition qu'elles ne soient pas toutes deux arrondies ou en point de rebroussement) pour toutes les valeurs de l'angle α , c'est à dire partout dans le sillage lointain de Kelvin. Cependant, dans le cas d'une coque dont les flancs sont évasés le long d'une partie de la ligne d'eau et qui est verticale partout ailleurs, les contributions de la proue et de la poupe dominant et sont $O(1)$ seulement pour les angles α du sillage de Kelvin dont les points de phase stationnaire sur la ligne d'eau correspondants sont situés en dehors de la région d'évasement des flancs; pour la plage de valeurs de α pour lesquelles les points de phase stationnaire correspondants sont situés dans la région d'évasement des flancs, la contribution de ces points de phase stationnaire domine, et est d'ordre $1/F$. Dans ce cas, l'amplitude des vagues dans le sillage de Kelvin lointain est d'ordre $(U^2/g)/(-X/L)^{1/2}$, lorsque $F \rightarrow 0$ et $X/L \rightarrow -\infty$, pour la plage de valeurs de α correspondant à la région d'évasement des flancs, et d'ordre $(U^2/g)F/(-X/L)^{1/2}$ pour les valeurs de α hors de cette plage. Si la région d'évasement est de faible étendue, et si l'angle de la tangente à la ligne d'eau ϕ varie peu dans cette région, la plage correspondante de valeurs de α pour lesquelles l'amplitude des vagues est un ordre de grandeur plus grand que partout ailleurs est également réduite, et de ce fait apparait sous la forme d'un maximum isolé pour des valeurs du nombre de Froude suffisamment petites. Ce maximum est particulièrement prononcé pour une coque avec une petite région d'évasement au voisinage d'un point d'inflexion de la ligne d'eau.

L'analyse asymptotique au bas nombre de Froude résumée ici montre donc que les caractéristiques du sillage lointain de Kelvin dépendent fortement de la forme de la coque, en particulier de la présence d'évasement des flancs et de la forme de la ligne d'eau à la proue et à la poupe. Cette analyse prédit également que le coefficient adimensionnel de résistance de vagues $R/\rho U^2 L^2$, (U et L étant la vitesse et la longueur du navire, et ρ la densité de l'eau) donné par l'intégrale de Havelock

$$\pi R/\rho U^2 L^2 = F^4 \int_0^{\infty} |K(t)|^2 (1+t^2)^{-1/2} dt, \quad (37)$$

est $O(F^2)$ pour une coque ayant une région d'évasement, $O(F^4)$ pour une coque partout verticale et dont soit la proue, soit la poupe (ou les deux) n'est ni arrondie, ni en point de rebroussement, et $O(F^6)$ pour une coque partout verticale dont à la fois la proue et la poupe sont soit arrondies soit en point de rebroussement.

L'approximation asymptotique au bas nombre de Froude (17) donne

$$K(t) = O(1/t^3) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Ce résultat est en fait valable pour n'importe quel nombre de Froude; en effet, l'approximation asymptotique (17) est valable non seulement à la limite du bas nombre de Froude $F \rightarrow 0$ mais plus généralement à la limite $\nu p = (1+t^2)^{1/2}/F \rightarrow \infty$, c'est à dire lorsque $F \rightarrow 0$ ou lorsque $t \rightarrow \infty$, comme l'indiquent les fonctions $\exp(\nu^2 p^2 z)$ et $E_{\pm} = \exp[-i\nu^2 p(x \pm ty)]$ dans (6b).

REFERENCES

Barnell, A. et F. Noblesse (1986) "Far-Field Features of the Kelvin Wake", 16th Symposium on Naval Hydrodynamics, Université de Californie, Berkeley.

Fu, Lee-Lueng et Benjamin Holt (1982) "Seasat Views Oceans and Sea Ice with Synthetic Aperture Radar", JPL Publication 81-120.

Havelock, T.H. (1934) "Wave Patterns and Wave Resistance", Trans. Institution of Naval Architects, Vol. 76, pp. 430-442.

Hughes, B.A. (1986) "Surface Wave Wakes and Internal Wave Wakes Produced by Surface Ships", 16th Symposium on Naval Hydrodynamics, Université de Californie, Berkeley.

McDonough, Robert N., Barry E. Raff et Joyce L. Kerr (1985), "Image Formation from Spaceborne Synthetic Aperture Radar Signals", Johns Hopkins APL Technical Digest, Vol. 6, No. 4, pp. 300-312.

Noblesse, F. (1983) "A Slender-Ship Theory of Wave Resistance", Journal of Ship Research, Vol. 27, No. 1, pp. 13-33.

Noblesse, F. (1986a) "Steady Ship Waves at Low Froude Numbers (Part One)", David Taylor Naval Ship R&D Center Report No. DTNSRDC-86/024, 22 pp.

Noblesse, F. (1986b) "Steady Ship Waves at Low Froude Numbers (Part Two)", David Taylor Naval Ship R&D Center Report, sous presse.

Scragg, Carl A. (1983) "A Numerical Investigation of the Kelvin Wake Generated by a Destroyer Hull Form", Science Applications Report No. SAI-83/1216, 46 pp.

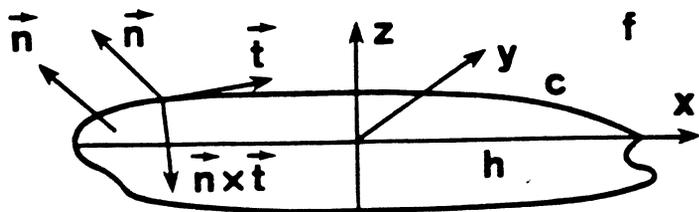


Fig.1- Schéma de définition pour un monocoque symétrique tribord et babor.

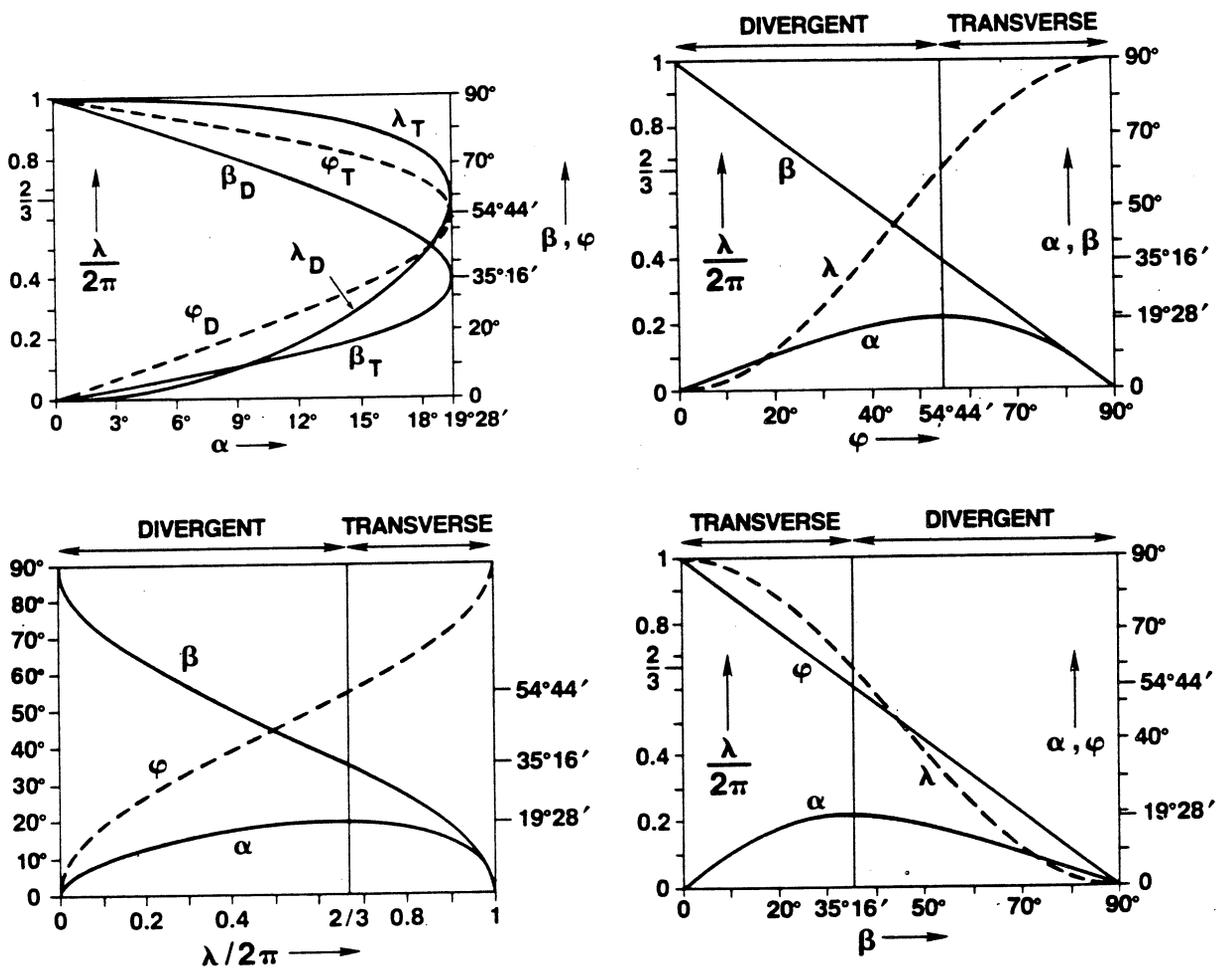


Fig.2- L'angle de la tangente à la ligne d'eau ϕ , l'angle d'observation du sillage de Kelvin α , l'angle de direction de propagation des vagues β et la longueur d'onde λ en fonction de α (en haut à gauche), ϕ (en haut à droite), β (en bas à droite) et λ (en bas à gauche).

