

1ères JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

16 au 18 Février 1987 - Nantes

UNE APPROCHE TRANSITOIRE DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION DE CORPS IMMERGES (°)

A. JAMI

L. GELEBART

ENSTA-CNRS/LME-GHN (")
Chemin de la Hunière
91120 PALAISEAU

Résumé

On considère un corps immergé de forme quelconque mis à l'instant initial, en mouvement de translation de vitesse uniforme parallèle à la surface libre. Après une période transitoire, la solution potentielle devient stationnaire; la résistance de vague, calculée par intégration des pressions est alors comparée au résultat stationnaire obtenu par résolution du problème de Neumann-Kelvin. La méthode numérique développée au GHN, utilise une méthode d'éléments finis associée à une représentation intégrale de Green.

Summary

We consider a submerged body of arbitrary shape starting from rest, a forced motion of uniform velocity parallel to the free surface. After the transient stage, the potential solution becomes steady; the wave drag, evaluated by integrating the pressure is compared to the steady result given by the solution of the Neumann-Kelvin problem. The numerical method developed at the GHN uses a finite element method associated to an integral representation formula.

(°) Ce travail a été réalisé en exécution du contrat DRET/ENSTA n°84/1061.

(") Equipe associée à l'Université Pierre et Marie Curie;

INTRODUCTION

On se propose de résoudre par une approche instationnaire le problème du corps immergé animé d'un mouvement de translation uniforme parallèle à la surface libre. On espère ainsi, la période transitoire passée, obtenir un calcul des efforts comparable à celui obtenu par la résolution du problème stationnaire équivalent appelé problème de Neumann-Kelvin.

L'approche instationnaire n'a évidemment aucun intérêt en elle même, puisqu'elle nécessite un important temps de calcul avant d'obtenir des résultats stationnaires. Sa comparaison avec l'approche par Neumann-Kelvin nous permettrait cependant, d'une part de valider le code de calcul instationnaire, d'autre part d'aborder le problème du corps flottant avec vitesse d'avance par pas de temps.

Pour résoudre le problème instationnaire, on impose au corps une vitesse constante pour les temps positifs, le fluide étant initialement au repos. On résoud alors le système en potentiel total exprimé en fonction des variables d'espace liées au repère mobile se déplaçant avec le corps.

La résolution des deux problèmes s'effectuant à l'aide d'une méthode de couplage éléments finis-représentation intégrale il est intéressant dans un premier temps, de comparer analytiquement et numériquement la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin et la limite en temps de la fonction de Green instationnaire.

Enfin, une comparaison des résultats de résistance de vague obtenus par la résolution du problème de Neumann-Kelvin et du problème instationnaire avec vitesse d'avance nous permettra de vérifier la concordance de ces deux résultats.

Par ailleurs on notera que cette approche instationnaire permet de traiter le problème de radiation en repère mobile dans lequel le corps est soumis à des oscillations forcées; une exploitation du code CHIEF3D pour ce problème complétera notre étude.

I. PRESENTATION

I.1 Problème physique

On considère un corps animé d'une vitesse constante V , totalement immergé dans un fluide parfait, incompressible en écoulement irrotationnel.

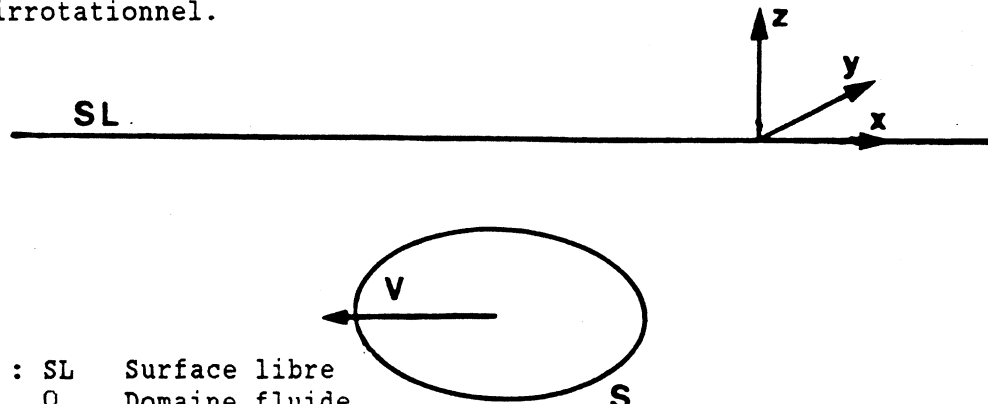


Fig. 1 : SL Surface libre
 Ω Domaine fluide
 S Carène du corps
 V Vitesse du corps orientée suivant Ox

. Le fluide étant incompressible, l'écoulement irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses harmonique noté $\Phi(x,y,z,t)$ qui vérifie:

$$(I.1) \quad \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

. L'équation de Bernoulli nous donne:

$$(I.2) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{\nabla}\Phi\|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cste dans tout le domaine fluide}$$

où p est la pression, ρ la masse volumique, g l'accélération de la pesanteur.

. La surface libre d'équation $z-\eta(x,y;t)=0$ étant matérielle:

$$(I.3) \quad -\frac{\partial\eta}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}(z-\eta) = 0 \quad \text{sur SL, } \eta(x,y,t) \text{ étant}$$

l'élévation de la surface libre

. Sur la carène S , on a la condition de glissement:

$$(I.4) \quad \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{n})$$

où \vec{n} est une normale à la carène S .

I.2 Problème de Neumann-Kelvin

I.2.1 Mise en équation

Le problème est posé dans le repère lié au corps. On suppose le régime établi (régime stationnaire), toutes les variables sont donc indépendantes du temps; il en est de même du domaine fluide Ω .

Les équations du problème sont alors les suivantes:

$$(S_1) \quad \begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } S \\ \frac{1}{2} \|\vec{\nabla}\varphi\|^2 + g\eta = \frac{1}{2}v^2 & \text{sur SL} \\ \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}(z-\eta) = 0 & \text{sur SL} \end{cases}$$

On peut alors écrire un système équivalent en Φ , potentiel de perturbation défini par: $\varphi = -Vx + \Phi$. Des considérations physiques simples [5] permettent alors de choisir pour Φ des conditions de décroissance à l'infini correspondant à un état de repos à l'amont et à une onde plane progressive à l'aval.

Après adimensionnalisation de ces équations en fonction de l'accélération de la pesanteur g et d'une longueur caractéristique L la linéarisation de (S_1) nous donne le système (S_2) :

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -F(\vec{n} \cdot \vec{x}) & \text{sur } S \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{F^2} \eta = 0 & \text{sur } SL_0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } SL_0 \end{array} \right.$$

où SL_0 est la surface libre linéarisée en $\{z=0\}$ et Ω_0 le domaine fluide correspondant. Le nombre de Froude F étant défini par

$$F = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

En éliminant η , élévation de surface libre, on obtient le problème (P_{nk}) suivant:

$$(P_{nk}) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -F(\vec{n} \cdot \vec{x}) & \text{sur } S \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } SL_0 \\ \text{avec } k_0 = \frac{1}{F^2} = \frac{gL}{v^2} \end{array} \right.$$

I.2.2 Calcul des efforts

L'équation de Bernoulli adimensionnalisée nous donne l'expression de la pression sous la forme:

$$(I.5) \quad p = p_0 + \frac{1}{2} F^2 - \frac{1}{2} \|\vec{\nabla}\Phi\|^2 - z$$

On étudie plus particulièrement la composante de la résultante des forces de pression suivant l'axe Ox (non compris les efforts hydrostatiques) communément appelée Résistance de Vague:

$$(I.6) \quad RW = \int_{S_0} p \cdot n_x ds = - \int_{S_0} \frac{1}{2} \|\vec{\nabla}\Phi\|^2 n_x ds = - \frac{1}{2} \int_{S_0} \|\vec{\nabla}(\Phi - Vx)\|^2 n_x ds$$

I.3 Problème Instationnaire

I.3.1 Mise en équation

Le potentiel et l'élevation de surface libre sont dépendants du temps.

Le système linéarisé et adimensionnalisé de même que précédemment en fonction de la pesanteur g et d'une longueur caractéristique L est alors:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -F \cdot n_x \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \eta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } S \text{ ; } n_x = \vec{n} \cdot \vec{x} \\ \text{sur } SL_0 \\ \text{sur } SL_0 \end{array}$$

Après élimination de η , on obtient les équations en $\Phi(x,y,z,t)$ du problème instationnaire (P_1):

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -F \cdot n_x \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } S \\ \text{sur } SL_0 \end{array}$$

I.3.2 Calcul des efforts

L'équation de Bernoulli adimensionnalisée nous donne l'expression de la pression:

$$(I.7) \quad p = p_0 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \|\nabla\Phi\|^2 - z$$

Ce qui nous donne la résistance de vague:

$$(I.8) \quad RW = - \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial t} n_x ds - \int_S \frac{1}{2} \|\nabla\Phi\|^2 n_x ds$$

II. FONCTIONS DE GREEN

II.1 Fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin

II.1.1 Définition

On appelle fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin la fonction $H_M(P)$ solution du système:

$$(S_{nk}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta H_M(P) = 0 \\ \frac{\partial H_M(P)}{\partial n} = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \Omega_0 \quad M \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \text{ et } P \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \zeta \\ \eta \end{array} \right. \in \mathbb{R}^3 \text{ en tridimensionnel}$$

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \text{ et } P \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ en bidimensionnel}$$

$$\frac{\partial^2 H_M}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } SL_0 \quad \text{avec } k_0 = \frac{1}{Fr^2}$$

avec les conditions à l'infini (cf [5] § 1.3) qui nous donnent l'unicité de la solution de (S_{nk}) .

$\delta_M(P)$ est la masse de Dirac placée au point M.

La fonction $H_M(P)$ étant invariante par toute translation horizontale simultanée des points P et M, on fixera désormais M au point $M_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$.

II.1.2 Transformée de Fourier

On définit la transformée de Fourier d'une fonction de \mathbb{R}^n ($n=2,3$) par rapport aux variables "horizontales" (x_1 et x_2 pour $n=3$, x_1 pour $n=2$) de la manière suivante:

$$(II.1) \quad \hat{f}(\hat{X}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2i\pi \tilde{X} \cdot S} f(X) d\tilde{X}; \quad X = (\tilde{X}, x_n), \quad \hat{X} = (S, x_n)$$

avec $S = (s_1, s_2)$ pour $n=3$; $S = (s_1)$ pour $n=2$

La fonction de Green de Neumann-Kelvin sera déterminée à partir de la transformée de Fourier ainsi définie de sa trace à la surface libre; son expression est alors analytiquement connue.

La détermination de ces fonctions, dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel est détaillée dans [4] et [5] respectivement. Elles sont données ici en annexe 1.

II.2 Fonction de Green instationnaire

II.2.1 Définition

On appelle fonction de Green instationnaire, notée $H_{M(\tau)}(P; t, \tau)$ la solution du problème suivant:

$$(S_{I1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta H_M(P; t) = \delta_M(P) \delta(t-\tau); \quad P \begin{vmatrix} \xi \\ \zeta \\ \eta \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ pour } n=3 \\ \\ P \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ pour } n=2 \\ \\ \frac{\partial^2 H_M}{\partial t^2} + \frac{\partial H_M}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } SL_0 (\eta=0) \end{array} \right.$$

où δ_M et δ sont respectivement la distribution de Dirac en espace au point $M(\tau)$ et la distribution de Dirac en temps à l'origine.

La distribution solution de (S_{11}) correspond à une source instationnaire centrée en M qui apparaît à l'instant $t=\tau$. La position du point M associé à τ est notée $M(\tau)$. L'ensemble des positions qu'occupe le point M lorsque τ varie décrit la trajectoire de la source au cours du temps.

On choisit alors de décomposer $H_{M(\tau)}$, de la manière suivante:

$$H_M(P;t;\tau) = \delta(t-\tau) G_M(P) + Y(t-\tau) F_M(P;t-\tau)$$

où :

. $Y(t)$ est l'échelon de Heavyside

$$. G_M(P) = E_M(P) - E_{M'}(P)$$

avec $E_M(P) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|MP|}$ (solution élémentaire du Laplacien) et M' symétrique de M par rapport à la surface libre SL_0 .

Le problème pour $F_M(P;t)$ est alors:

$$(S_{12}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta F_M = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_M}{\partial t^2} + \frac{\partial F_M}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} = 0 \\ F_M \Big|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial F_M}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \frac{\partial E_{M'}}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad \text{sur } (\eta=0)$$

II.1.2 Passage au plan fourier

Dans le plan Fourier, $\hat{F}_M(\hat{P})$ (avec $\hat{P} = (S, \eta)$) vérifie le système d'équations:

$$(II.3) \quad \frac{\partial^2 \hat{F}_M}{\partial \eta^2} - 4\pi^2 |S|^2 \hat{F}_M = 0 \quad \text{avec } |S|^2 = s_1^2 + s_2^2 \quad \text{pour } n=3$$

$$\text{et } |S|^2 = s_1^2 \quad \text{pour } n=2$$

$$(II.4) \quad \left(\frac{\partial^2 \hat{F}_M}{\partial t^2} + \frac{\partial \hat{F}_M}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} = 0$$

$$(II.5) \quad \hat{F}_M \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{sur } (\eta=0)$$

$$(II.6) \quad \frac{\partial \hat{F}_M}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \frac{\partial \hat{E}_{M'}}{\partial \eta}$$

Soit $\hat{\Phi}_M$ la trace de \hat{F}_M sur la surface libre $\eta = 0$; D'après (II.3) on a:

$$(II.7) \quad \hat{F}_M = e^{2\pi\eta|s|} \hat{\Phi}_M \quad \text{soit: } (II.8) \quad \left. \frac{\partial \hat{F}_M}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 2\pi|s| \hat{\Phi}_M$$

On peut alors définir l'opérateur de multiplication \hat{K} de la manière suivante:

$$(II.9) \quad \hat{K}: \hat{\Phi}_M \rightarrow 2\pi|s| \hat{\Phi}_M$$

L'équation (II.4) devient donc:

$$(II.10) \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_M}{\partial t^2} + \hat{K} \hat{\Phi}_M = 0,$$

dont la solution vérifiant (II.5) et (II.6) s'écrit:

$$(II.11) \quad \hat{\Phi}_M = 2 \hat{K}^{-\frac{1}{2}} \sin(t\hat{K}^{\frac{1}{2}}) \left. \frac{\partial \hat{E}_M}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

II.3 Source instationnaire avec vitesse d'avance

II.3.1 Changement de repère

La source (i.e la fonction $H_{M(\tau)}(P,t;\tau)$) que nous venons de définir au sens des distributions n'a pas de signification physique. Par contre, sa primitive prise par rapport à la variable τ est une fonction du temps qui représente une source apparaissant à $t=0$, se déplaçant sur la trajectoire $M(\tau)$ et de débit constant égal à 1.

Son expression est la suivante:

$$(II.12) \quad K(P;t) = Y(t) \left[E_{M(t)}(P) - E_{M'(t)}(P) + \int_0^t F_{M(\tau)}(P;t-\tau) d\tau \right]$$

Le mouvement du point source M étant une translation horizontale uniforme on peut poser:

$$x = x_0 - F\tau$$

où x_0 représente l'abscisse du point M à $t=0$.

On choisit alors d'exprimer le potentiel en fonction des variables d'espace du repère mobile (ξ_0, ζ_0, η_0) définies par :

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \xi_0 - F\tau \\ \zeta = \zeta_0 \\ \eta = \eta_0 \end{array} \right.$$

en suivant la source dans son mouvement.

Sachant que:

$$E_{x_0 - Ft, y_0, z_0}(\xi_0 - Ft, \zeta_0, \eta_0) = E_{x_0, y_0, z_0}(\xi_0, \zeta_0, \eta_0)$$

$$F_{x_0 - Ft, y_0, z_0}(\xi_0 - Ft, \zeta_0, \eta_0; t) = F_{x_0 + F(t-\tau), y_0, z_0}(\xi_0, \zeta_0, \eta_0; t)$$

On obtient, pour $t > 0$, en posant $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$$K_{M_0}(P_0; t) = E_{M_0}(P_0) - E_{M_0'}(P_0) + \int_0^t F_{x_0 + F(t-\tau), y_0, z_0}(P_0; t-\tau) d\tau$$

soit

$$K_{M_0}(P_0; t) = E_{M_0}(P_0) - E_{M_0'}(P_0) + \int_0^t F_{x_0 + F\tau, y_0, z_0}(P_0; \tau) d\tau$$

II.3.2 Limite en temps

Le changement de variable utilisé pour la source instationnaire (§ II.3.1) permet d'obtenir à chaque instant le potentiel total (i.e le potentiel dont le gradient donne le champ des vitesses absolues) dans le repère lié à la source.

De même, le potentiel créé par une source de Neumann-Kelvin est exprimé dans le repère lié à la source et son gradient décrit lui aussi le champ des vitesses absolues (la condition de Neumann du problème (P_{nk}) est non homogène: $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = F$)

Ces deux sources définissent donc le même potentiel, l'une dans un schéma transitoire, l'autre dans un schéma stationnaire (régime établi). Il s'agit alors de montrer que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K_{M_0}(P; t) = H_{M_0}(P) \quad \text{où } M_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Pour effectuer le passage à la limite en temps, on choisit de passer dans le plan Fourier par rapport aux variables horizontales. On doit donc calculer, en posant $\hat{P} = (s_1, s_2, \eta)$:

$$\hat{K}_{M_0}(\hat{P}; t) = \hat{E}_{M_0}(\hat{P}) - \hat{E}_{M_0'}(\hat{P}) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \hat{F}_{x_0 + F\tau, y_0, z_0}(\hat{P}; \tau) d\tau$$

A la surface libre ($\eta=0$), on a:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{M_0}(\hat{P}_0; t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \hat{F}_{x_0 + F\tau, y_0, z_0}(\hat{P}_0; \tau) d\tau \quad ; \quad \hat{P}_0 = (s_1, s_2, 0) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t 2 \hat{K}^{-\frac{1}{2}} \sin(\tau K^{\frac{1}{2}}) \frac{\widehat{\partial E}_{M_0}(\hat{P}_0)}{\partial \eta_0} d\tau \quad \text{d'après (II.11)} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\widehat{\partial E}_{x_0 + F\tau, y_0, z_0}(\widehat{P}_0)}{\partial \eta_0} = e^{-2i\pi s_1 F \tau} \frac{\widehat{\partial E}_{M_0}(\widehat{P}_0)}{\partial \eta_0}$$

$$\frac{\widehat{\partial E}_{M_0}(\widehat{P}_0)}{\partial \eta_0} = \frac{1}{2} e^{2\pi |s| z_0} \quad (\text{annexe 2})$$

et d'après la définition de l'opérateur \widehat{K} donnée en (II.9), on a:

$$\widehat{K}_{M_0}(\widehat{P}_0; t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-2i\pi s_1 F \tau} \frac{e^{2\pi |s| z_0} \sin(\sqrt{2\pi |S|} \tau)}{\sqrt{2\pi |S|}} d\tau$$

En effectuant le changement de variable $\tau' = \frac{\sqrt{|S|}}{\sqrt{2\pi}} \tau$, on

obtient:

$$\widehat{K}_{M_0}(s_1, s_2, 0; t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\sqrt{|S|}}{\sqrt{2\pi}} t} e^{-2i\pi \frac{\sqrt{2\pi} s_1 F \tau'}{\sqrt{|S|}}} \frac{e^{2\pi |s| z_0} \sin(2\pi \tau')}{|S|} d\tau'$$

A l'aide de la transformée de Fourier des distributions notée \mathcal{F}_τ , cette expression peut s'écrire:

$$\widehat{K}_{M_0}(s_1, s_2, 0; \infty) = \text{Pf} \left(\frac{e^{2\pi z_0 |s|}}{|S|} \right) \mathcal{F}_\tau \{ Y(\tau) \sin(2\pi \tau) \} \left(\sqrt{2\pi} F \frac{s_1}{\sqrt{|S|}} \right)$$

ce qui nous donne (annexe 3):

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{M_0}(s_1, s_2, 0; \infty) = \text{Pf} \left(\frac{e^{2\pi z_0 |s|}}{|S|} \right) & \left\{ -\frac{1}{2\pi} \text{Pf} \left[\frac{1}{2\pi F^2 \frac{s_1^2}{|S|} - 1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{i}{4} \left[\delta \left(\sqrt{2\pi F} \frac{s_1}{\sqrt{|S|}} + 1 \right) - \delta \left(\sqrt{2\pi F} \frac{s_1}{\sqrt{|S|}} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{En posant: } k_0 = \frac{1}{F^2}$$

$$\rho = |S| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

On obtient:

$$\widehat{K}_{M_0}(s_1, s_2, 0; \infty) = \frac{k_0}{2\pi} e^{2\pi \rho z_0} \text{Pf} \left(\frac{1}{2\pi s_1^2 - k_0 \rho} \right)$$

$$+ \frac{i}{4} \text{Pf} \left(\frac{e^{2\pi\rho z_0}}{\rho} \right) \left[\delta \left(\frac{\sqrt{2\pi} s_1}{\sqrt{k_0} \sqrt{\rho}} + 1 \right) - \delta \left(\frac{\sqrt{2\pi} s_1}{\sqrt{k_0} \sqrt{\rho}} - 1 \right) \right]$$

Soit (annexe 4):

$$\hat{K}_{M_0}(s_1, s_2, 0; \infty) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{2\pi\rho z_0}}{\rho} \left\{ f(s_1, s_2) \text{Pf} \left(\frac{Y(t)}{s_1 - F(s_2)} \right) + g(s_1, s_2) \text{Pf} \left(\frac{Y(-t)}{s_1 + F(s_2)} \right) \right\}$$

+ distribution concentrée en $s_1 = F(s_2)$
+ distribution concentrée en $s_1 = -F(s_2)$
+ distribution concentrée en $(0, 0)$

où l'on a posé:

$$f(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 \rho}{4\pi^2 (s_1^2 - \frac{k_0^2}{4\pi} + F(s_2)^2) (s_1 + F(s_2))}$$

$$g(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 \rho}{4\pi^2 (s_1^2 - \frac{k_0^2}{4\pi} + F(s_2)^2) (s_1 - F(s_2))}$$

$$F(s) = \frac{k_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16 \pi^2 s^2}{k_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

II.4 Résultats numériques

La convergence de la fonction de green instationnaire avec vitesse d'avance vers la fonction de Green de Neumann-Kelvin a pu être vérifiée numériquement en comparant les valeurs numériques de ces deux fonctions en un certain nombre de points suffisamment significatifs répartis sur un segment parallèle à l'axe Ox et proche de la surface libre (fig. 4). Une étude numérique similaire a été menée dans [10].

II. PROBLEME INSTATIONNAIRE AVEC VITESSE D'AVANCE

II.1 Représentation intégrale

On considère le problème P_1 (§ I.3.1) dans le cas où S est animé d'une vitesse constante suivant l'axe Ox. On montre que l'on peut exprimer le potentiel $\Phi(x, y, z; t)$ en tout point du domaine fluide à l'aide de la fonction de Green du problème instationnaire (§ II.2) par la représentation intégrale suivante ([3] annexe VI.2):

$$(II.1) \quad \Phi(M; t) = \int_{S(t)} [\Phi(P; t) \frac{\partial G_M(P; t)}{\partial n} - \frac{\partial \Phi(P; t)}{\partial n} G_M(P)] ds$$

$$+ \int_0^t \int_{S(\tau)} \left[\Phi(P; \tau) \frac{\partial F_{M(\tau)}(P; t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(P; \tau) F_{M(\tau)}(P; t-\tau) \right] ds d\tau$$

S'agissant d'étudier le potentiel $\Phi(M; t)$ autour d'un corps immergé se déplaçant suivant l'axe Ox à vitesse constante, on choisit d'exprimer le potentiel des vitesses absolues dans un repère lié au corps. On effectue donc les changements de variable

$$\begin{aligned} x &= x_0 - Ft \quad (\text{changement de repère}) \\ \xi &= \xi_0 - F\tau \quad (\text{changement de variable dans l'intégrale sur } S(\tau)) \end{aligned}$$

ainsi que le changement de fonction inconnue

$$\Phi_0(x_0, y, z; t) = \Phi(x_0 - F\tau, y, z; t)$$

Sachant que $E_{x_0 - Ft, y, z}(\xi_0 - Ft, \zeta, \eta) = E_{x_0, y, z}(\xi_0, \zeta, \eta)$
 et $F_{x_0 - Ft, y, z}(\xi_0 - Ft, \zeta, \eta; t) = F_{x_0 + F(t-\tau), y, z}(\xi_0, \zeta, \eta; t),$

puis en posant $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et $M(\tau) \begin{vmatrix} x_0 - F\tau \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix},$

on obtient la représentation intégrale du potentiel en un point M_0 se déplaçant avec le corps, exprimée dans le repère mobile:

$$\begin{aligned} \text{(III.2)} \quad \Phi_0(M_0; t) &= \int_{S_0} \left[\Phi_0(P_0; t) \frac{\partial G_{M_0}}{\partial n}(P_0) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(P_0; t) G_{M_0}(P_0) \right] ds_0 \\ &+ \int_0^t \int_{S_0} \left[\Phi_0(P_0; \tau) \frac{\partial F_{M(t-\tau)}(P_0; t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(P_0; \tau) F_{M(t-\tau)}(P_0; t-\tau) \right] ds_0 d\tau \end{aligned}$$

III.2 Formulation en domaine borné

Soit Σ_0 une frontière arbitraire entourant S_0
 Ω_0 le domaine fluide compris entre S_0 et Σ_0

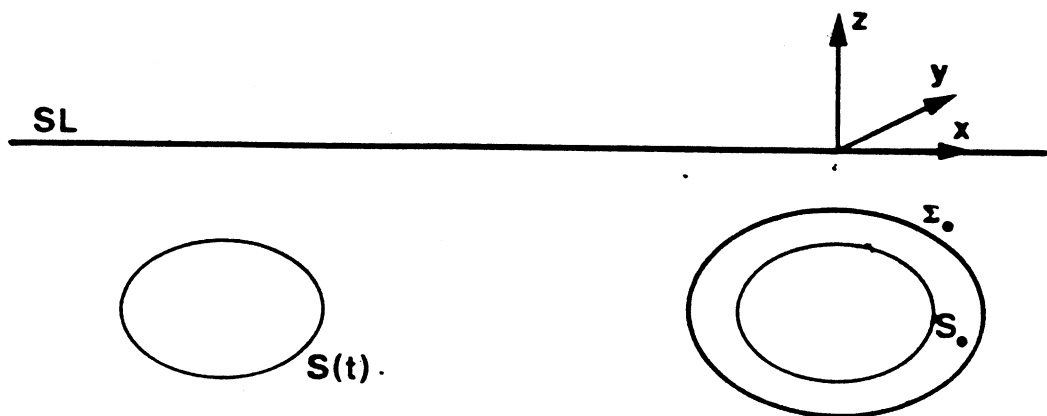


Fig. 2 : Représentation du domaine de calcul

On se ramène à l'étude d'un problème en domaine borné et fixe ($P_{\text{iborné}}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{S(t)} = -F(\vec{n}|\vec{x}) \quad \text{sur } S_0 \\ \Phi_0(M_0; t) = \int_{S_0} [\Phi_0(P_0; t) \frac{\partial G_{M_0}(P_0)}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_0(P_0; t)}{\partial n} G_{M_0}(P_0)] ds_0 \\ + \int_0^t \int_{S_0} [\Phi_0(P_0; \tau) \frac{\partial F_{M(t-\tau)}(P_0; t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_0(P_0; \tau)}{\partial n} F_{M(t-\tau)}(P_0; t-\tau)] ds_0 d\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Sigma_0$$

La formulation variationnelle du problème ($P_{\text{iborné}}$), sa discrétisation et sa résolution par la méthode des éléments finis sont développés dans [2] et [3] Chap. VI.

III.3 Calcul de la résistance de vague

D'après le paragraphe I.3.2 l'expression de la résistance de vague est

$$Rw = - \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial t} n_x ds - \int_S \|\vec{\nabla}\Phi\|^2 n_x ds$$

où Φ est le potentiel total exprimé dans le repère fixe. Sachant que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + F \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \quad \text{et} \end{aligned}$$

après avoir effectué le changement de variable $x=x_0-Ft$ dans l'intégrale, on obtient l'expression de Rw en fonction de Φ_0 :

$$(III.3) \quad Rw = - \int_{S_0} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} n_x ds_0 - \int_{S_0} \|\vec{\nabla}(\Phi_0 + Fx)\|^2 n_x ds_0$$

III.4 Resultats numériques

III.4.1 Introduction

Les résultats numériques portent principalement sur les calculs de la résistance de vague en instationnaire et la comparaison de ceux-ci avec les résultats obtenus par la résolution du problème de Neumann-Kelvin. La géométrie du problème traité correspond à un des cas étudié par Farell [6] (fig. 4). On dispose ainsi d'un élément de comparaison supplémentaire. La méthode utilisée par Farell est une approche analytique du problème de Neumann-Kelvin par développement en série du potentiel exprimé comme une distribution de sources sur la surface S du corps.

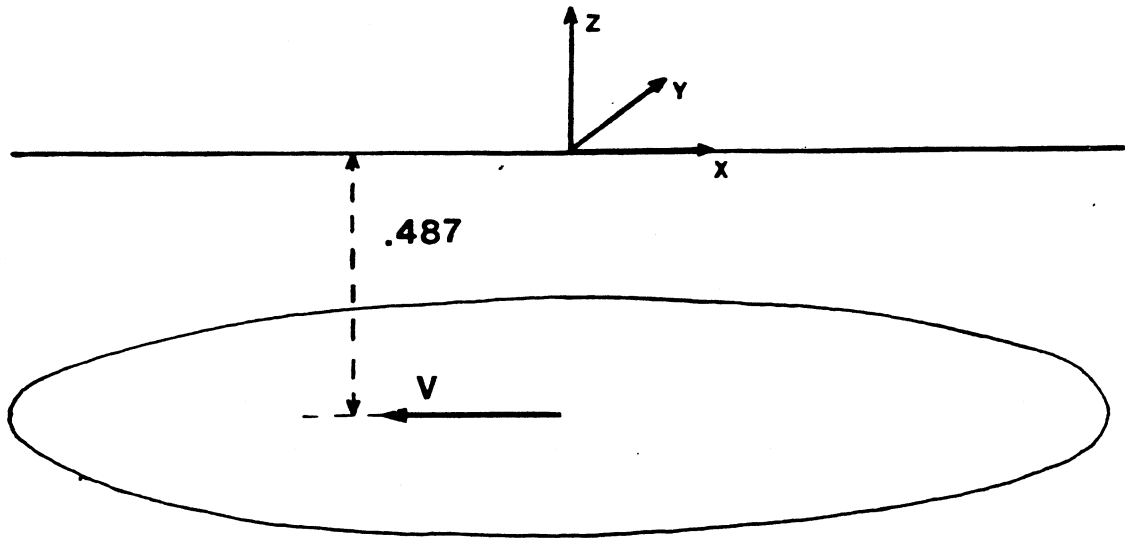


Fig. 3: Ellipsoïde immergé de Farell

III.4.2 Résultats en temps

La figure 5 représente l'évolution en temps des termes transitoires (en $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$) et non-linéaire (en $\|\vec{\nabla} \Phi\|^2$) de la résistance de vague au cours du temps (cf (III.3)). Il est ainsi possible de vérifier que le terme hydrodynamique tend bien vers zéro (il sera nul lorsque l'état stationnaire sera atteint).

Les figures 6 à 10 représentent l'évolution en temps du terme non-linéaire de la résistance de vague pour différentes valeurs du nombre de Froude. On constate ainsi, après le démarrage brutal, des oscillations amorties autour d'une position moyenne correspondant à la valeur limite de ce terme pour un temps infini. La période de ces oscillations est liée au nombre de Froude. Maruo [7] a obtenu, en bidimensionnel et pour un cylindre immergé avançant à vitesse constante et démarrant brutalement à l'instant initial, l'expression analytique de la résistance de vague fonction du temps. Cette expression nous permet d'obtenir la période de ces oscillations en fonction du nombre de Froude, soit:

$$T_{\text{Maruo}} = 8\pi F \text{ (après adimensionnalisation)}$$

La figure 11 représente cette période calculée à partir des résultats numériques en fonction du nombre de Froude ainsi que la droite théorique de Maruo.

En réalité cette expression peut se mettre sous la forme dimensionnée:

$$\frac{\omega \cdot V}{g} = \frac{1}{4} \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

on sait alors (cf [9]) que le paramètre $\frac{\omega \cdot F}{g}$ prend la valeur critique 1/4 dans les problèmes d'oscillations (de fréquence ω) en repère mobile (en translation de vitesse V); cette valeur n'étant liée qu'à la seule condition de surface libre (en profondeur infinie). Il n'est

donc pas étonnant de constater que notre résultat $T(F)$ suive (en tridimensionnel pour un ellipsoïde immergé) celle de Maruo (obtenue en bidimensionnel pour un cylindre). D'autres applications numériques ont été réalisées dans le cas où une oscillation du corps est surimposée à sa mise en vitesse.

III.4.3 Limite en temps

La figure 12 représente les courbes d'évolution de la résistance de vague $RW=f(\text{Froude})$ obtenues pour chaque type de calcul (instationnaire code CHIEF3D, Neumann-Kelvin code CHIEF3D, Neumann-Kelvin méthode Farell).

La résistance de vague instationnaire est la limite en temps du résultat dépendant du temps. On constate que, pratiquement, cette limite est la valeur moyenne sur les premières périodes de la résistance de vague amortie (voir § précédent).

On observe que l'amplitude relative des oscillations amorties est d'autant plus grande que le nombre de froude est faible; L'état stationnaire est donc plus difficilement atteint pour des corps avançant lentement.

Le choix du pas de discrétisation en temps a une influence importante sur la précision de la résistance de vague instationnaire obtenue. Un pas trop important ne nous permet pas d'obtenir une bonne convergence du résultat instationnaire vers le résultat stationnaire. Ici (fig. 5 à 12) le pas de temps est pris égal à 1.

La discrétisation en espace du domaine (dont l'enveloppe est ellipsoïdale) est faite à l'aide de prisme (cf [2]). L'influence de cette discrétisation sur la précision du résultats s'avère moins importante que celle de la discrétisation en temps.

III.4.4 Elévations de surface libre

Enfin, le code CHIEF3D nous permettant de calculer les élévations de surface libre (annexe 5), il était intéressant d'observer l'évolution en temps de la déformée de surface libre pour un calcul instationnaire et de comparer l'état quasi stationnaire obtenu au bout d'un certain temps avec la déformée de surface libre obtenue par le calcul stationnaire (fig. 13).

IV. CONCLUSION

Cette étude du problème de la résistance à l'avancement en instationnaire pour un corps immergé a permis d'approcher avec une bonne précision les résultats de résistance de vagues obtenus par un calcul stationnaire. Cette bonne précision permet d'envisager l'étude du problème équivalent dans le cas d'un corps flottant et de diverses extensions et applications qui seront discutées.

Elle a aussi permis de mettre en évidence une période caractéristique des oscillations amorties de la résistance de vague donnée au cours du temps par le calcul transitoire. Cette période correspondant à la période critique ($\omega F = 1/4$) du mouvement sur houle avec vitesse d'avance, il serait intéressant d'utiliser l'approche transitoire pour l'étude de ce dernier problème (en particulier l'existence ou non d'un phénomène particulier pour $\tau = \omega F = 1/4$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.V. WEHAUSEN, E.V. LAITONE : *"Surface waves"*,
Handbuch der Physik, Vol 9, Springer Verlag (1960)
- [2] A. JAMI : *"Etude théorique et numérique de phénomènes transitoires en hydrodynamique navale"*,
ENSTA - Rapport 154 (1982)
- [3] G. POT : *"Etude théorique et numérique des mouvements libres de corps flottants et immergés. Extension au cas des grands mouvements de corps immergés."*
Thèse de Docteur Ingénieur, E.N.S.T.A., (1986)
- [4] M. LENOIR : *"Méthodes de couplage en Hydrodynamique navale et application à la résistance de vagues bidimensionnelle"*,
Rapport de recherche ENSTA N° 164 (1982)
- [5] C. GUTTMANN : *"Etude théorique et numérique du problème de Neumann-Kelvin tridimensionnel pour un corps totalement immergé"*,
Rapport de recherche ENSTA N° 177 (1983)
- [6] C. FARELL : *"On the Wave Resistance of a Submerged Body"*,
Journal of Ship Research, (March 1973).
- [7] H. MARUO : *"Modern Developments of the Theory of Wave-Making Resistance in the Non-Uniform Motion"*,
The society of Naval Architects of Japan , 60th anniversary series, Vol. 2, pp. 1-82. Tokyo, (1957).
- [8] L. GELEBART, A. JAMI : *"Une approche transitoire pour la résolution numérique du problème de Neumann-Kelvin"*,
Comm. à paraître aux Premières journées de l'Hydrodynamique, Nantes, (1987).
- [9] A. JAMI, J-L. ROBIN : *"Un résultat d'unicité pour la solution élémentaire du problème de tenue à la mer avec vitesse d'avance"*,
C.R.A.S. Paris, t. 300, série II, N°14, (1985).
- [10] J. N. NEWMAN : *"The evaluation of free-surface Green functions"*
Numerical Ship Hydrodynamics conference, Washington, (1985)

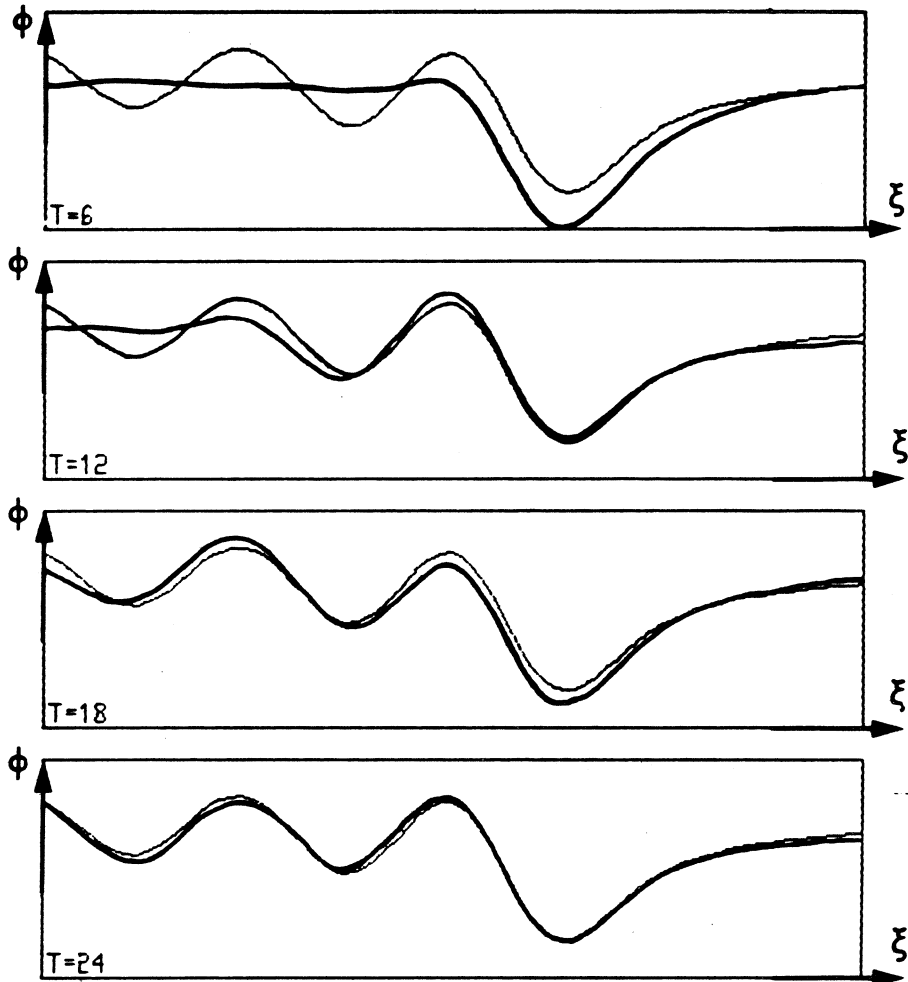


Fig. 4 : comparaison source instationnaire-source de Neumann-Kelvin au cours du temps sur le segment $\xi \in [-16,8]$, $\eta = -.1$, $\zeta = 0$. pour $M = (0,0,-2.)$

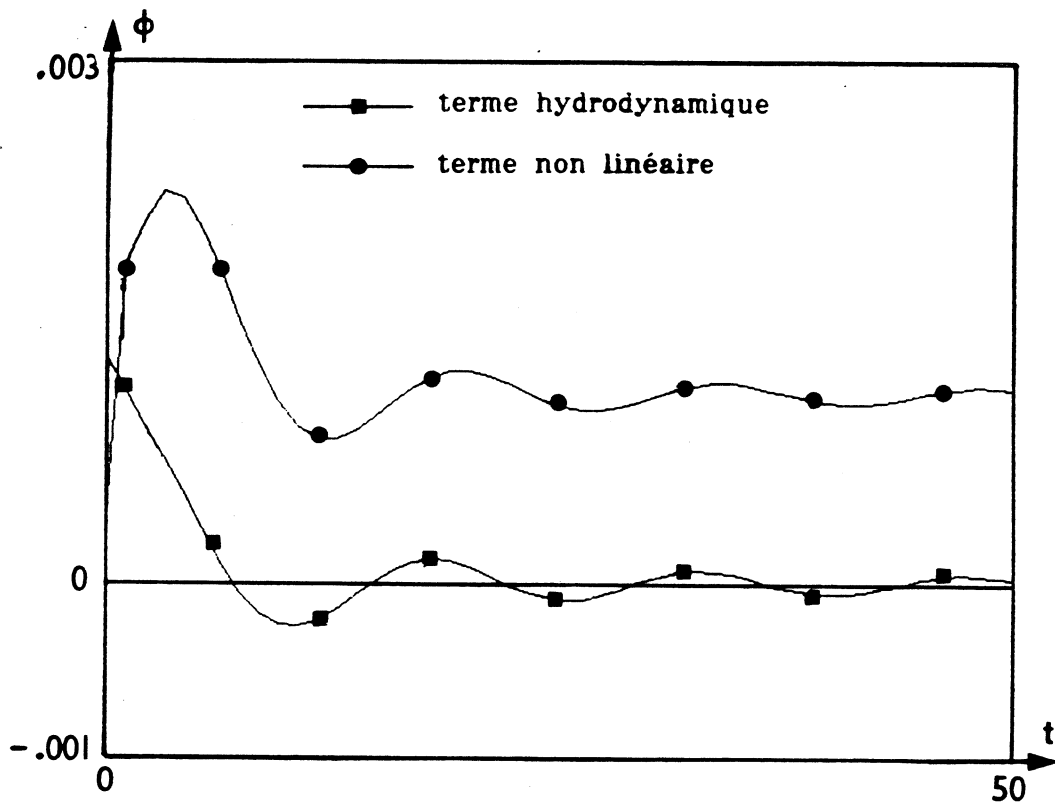


Fig. 5 : évolution en temps des termes transitoires et non linéaires de la résistance de vagues

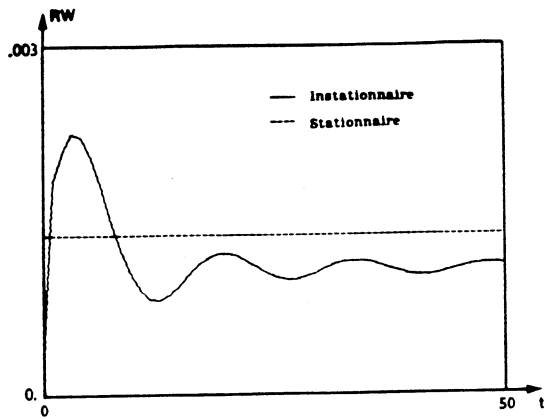


Fig. 6: Résistance de vague fonction du temps pour Froude = .559

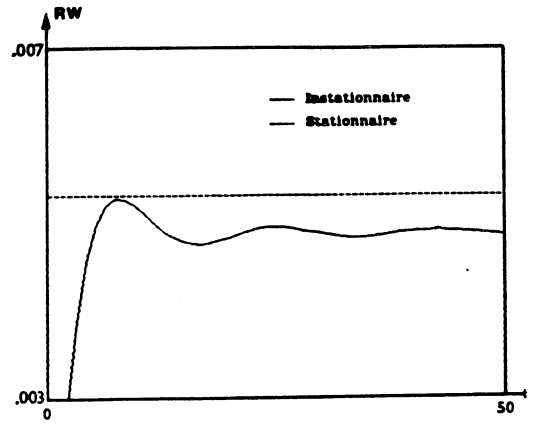


Fig. 7: Résistance de vague fonction du temps pour Froude = .657

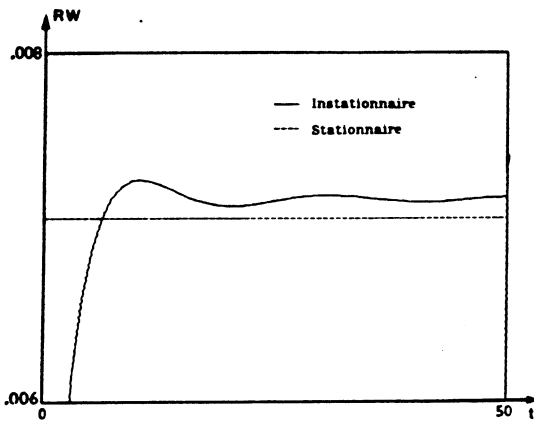


Fig. 8: Résistance de vague fonction du temps pour Froude = .838

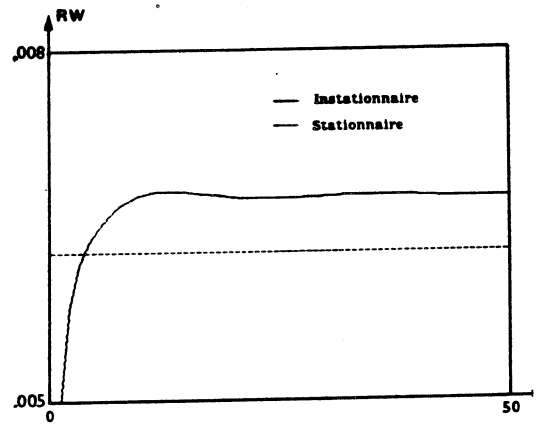


Fig. 9: Résistance de vague fonction du temps pour Froude = .977

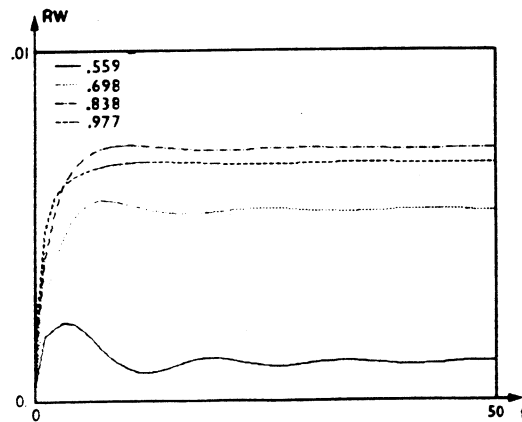


Fig. 10: Courbes $RW=f(t)$ pour Froude = .559, .698, .838, .977

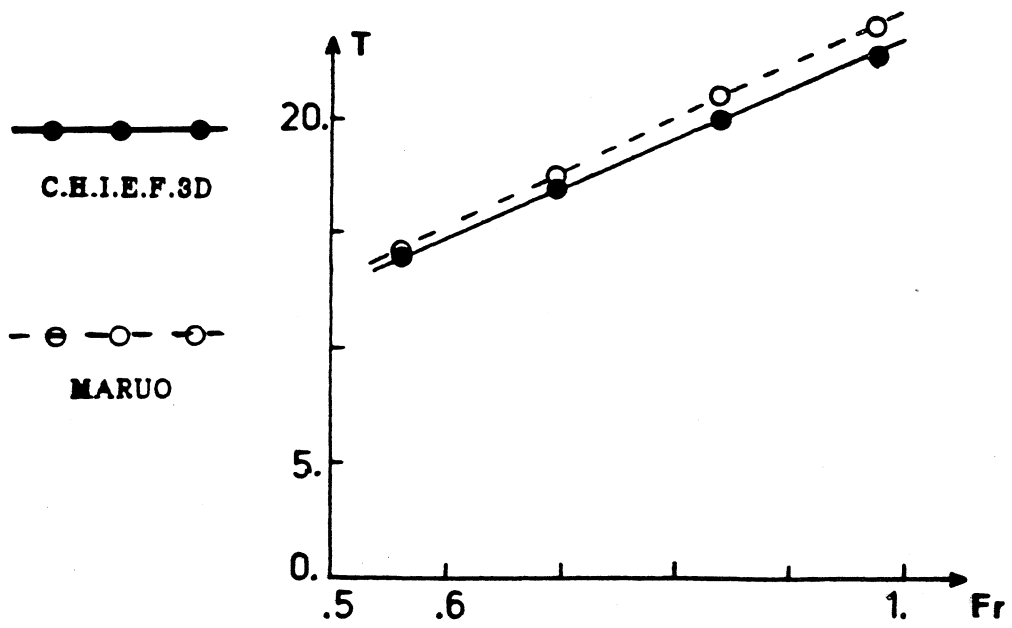


Fig. 11: Période des oscillations en temps fonction du nombre de Froude

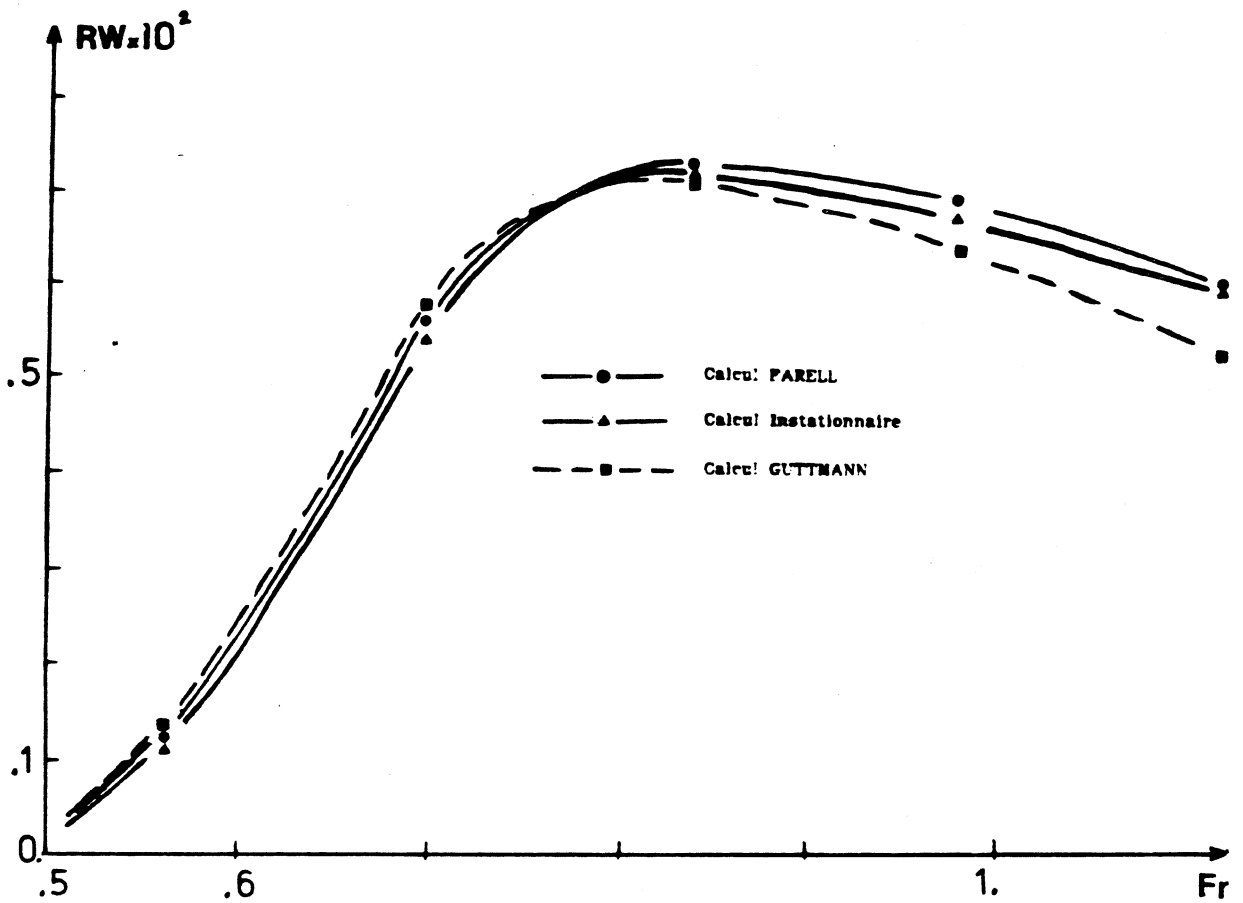
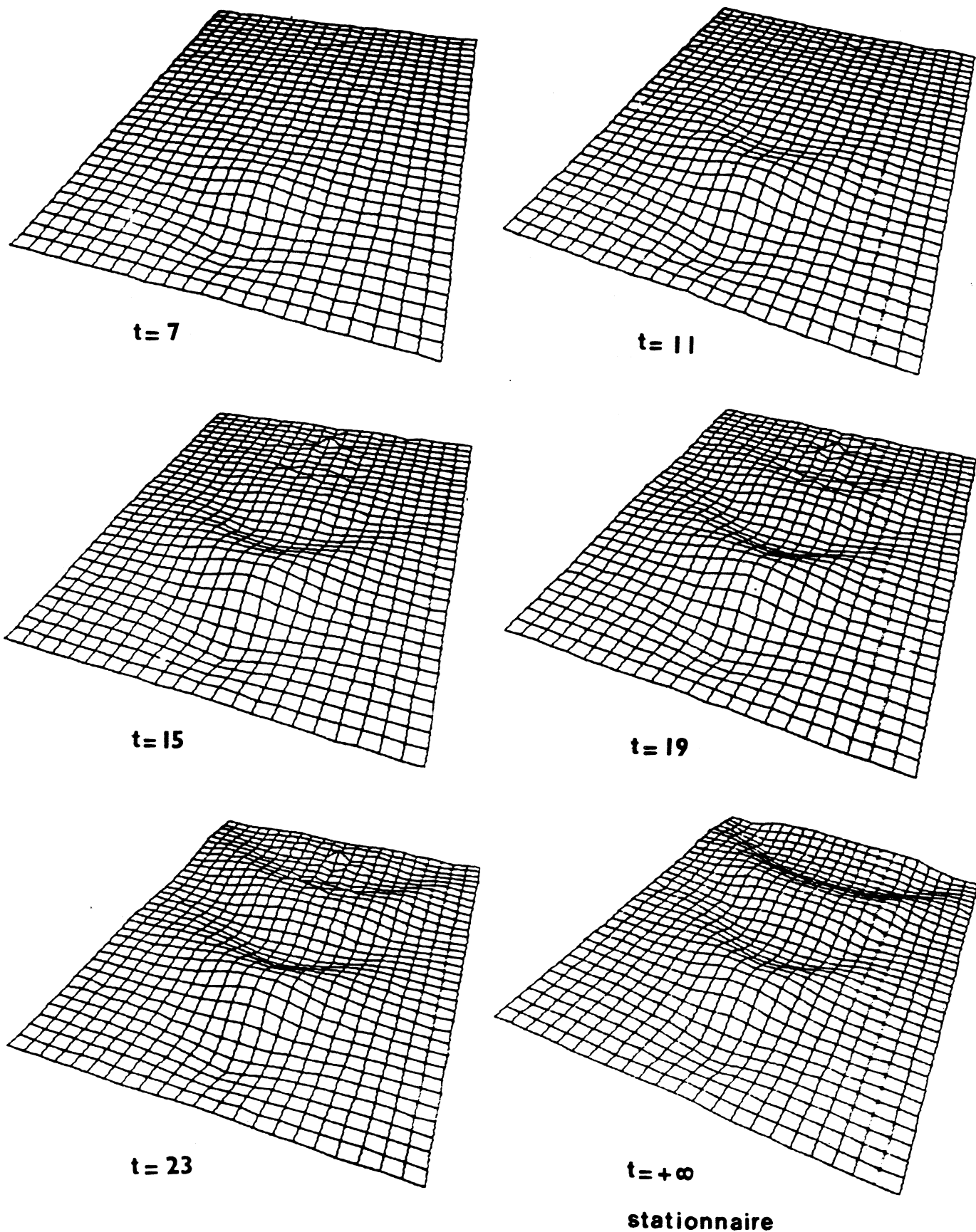


Fig. 12: Courbe de résistance de vagues - $RW = f(\text{Froude})$



Figures 13 : évolution de la surface libre en fonction du temps lors de l'avance à vitesse constante d'un ellipsoïde immergé

A N N E X E 1EXPRESSIONS DES SOLUTIONS ELEMENTAIRES STATIONNAIRES EN 2-D ET 3-D1. Cas Bidimensionnel

Soit $H_M(P)$, la solution du système (S_{nk}); pour se ramener à des fonctions régulières, on définit la fonction $G_M(P)$ par :

$$(1) \quad G_M(P) = H_M(P) - (E_M(P) + E_{M'}(P))$$

où, nous avons noté :

$$(2) \quad E_M(P) = \frac{1}{4\pi} \text{Log}[(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2]$$

et, M' est le symétrique de M par rapport à la surface libre.

La fonction $G_M(P)$ vérifie alors :

$$\Delta_P G_M(P) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0$$

(P_1)

$$\frac{\partial^2 G_M}{\partial x_P^2} + k_0 \frac{\partial G_M}{\partial x_P} = -2 \frac{\partial^2 E_M}{\partial x_P^2} \quad \text{sur} \quad SL_0$$

Le domaine et les équations étant invariants par translation horizontale, on admet que :

$$G_M(x_P, y_P) = G_{0, y_M}(x_P - x_M, y_P)$$

ce qui nous permet de restreindre l'étude à celle de $G_{0, y_M}(x_P, y_P)$.

Considérant la transformée de Fourier définie en (II.1) de $G_{0, y_M}(x_P, 0)$ notée $T_{y_M}(s)$, on obtient l'expression ([4] § II.1.4) :

$$T_{y_M}(s) = -\text{Pf} \left[\frac{Y(s) e^{2\pi y_M s}}{k - 2\pi s} \right] - \text{Pf} \left[\frac{Y(-s) e^{-2\pi y_M s}}{k + 2\pi s} \right] + \frac{1}{2i} e^{ky_M} \left\{ \delta \left(s + \frac{k}{2\pi} \right) - \delta \left(s - \frac{k}{2\pi} \right) \right\} + C\gamma(s)$$

2. Cas Tridimensionnel

La fonction régulière $G_M(P)$ introduite est définie par :

$$G_M(P) = H_M(P) - (E_M(P) - E_{M'}(P))$$

$H_M(P)$ vérifiant le système (S_{nk}) avec $M(x_M, y_M, z_M)$ et $P(x_P, y_P, z_P)$.

Pour les mêmes raisons d'invariance du domaine et des équations par translation horizontale, on se limite à l'étude de

$$G_{0,0,z_M}(x_P, y_P, z_P)$$

De même, sachant exprimer $G_{0,0,z_M}(x_P, y_P, z_P)$ en fonction de sa trace à la surface libre $G_{0,0,z_M}(x_P, y_P, 0)$ ([5] § II.2), on cherche l'expression de la transformée de Fourier de cette trace, que l'on note $T_{z_M}(s_1, s_2)$; où $s=(s_1, s_2)$ est l'affixe du point courant dans le plan de Fourier. On obtient :

$$T_{z_M}(s_1, s_2) = \frac{k_0}{2\pi} e^{2\pi|s|z_M} \left\{ f(s_1, s_2) \text{Pf} \left[\frac{Y(s_1)}{s_1 - F(s_2)} \right] - g(s_1, s_2) \text{Pf} \left[\frac{Y(-s_1)}{s_1 + F(s_2)} \right] \right\}$$

+ distributions concentrées sur les courbes $s_1 = \pm F(s_2)$ et à l'origine,

avec

$$f(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 |s|}{4\pi^2 (s_1^2 - \frac{k_0^2}{4\pi} + F(s_2)^2) (s_1 + F(s_2))}$$

$$g(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 |s|}{4\pi^2 (s_1^2 - \frac{k_0^2}{4\pi} + F(s_2)^2) (s_1 - F(s_2))}$$

$$F(s) = \frac{k_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16 \pi^2 s^2}{k_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ANNEXE 2

On montre que $\widehat{\frac{\partial E_M}{\partial \eta}}(s, 0) = \frac{1}{2} e^{2\pi|s|z}$

On sait que, pour $M = (0,0,z)$, $E_M(P)$ est une solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ de l'équation de Poisson :

$$\Delta E_M(P) = \delta_M(P)$$

soit, par transformation de Fourier par rapport aux variables horizontales $P(\xi, \zeta, \eta) \rightarrow (s_1, s_2, \eta) :$

$$(1) \quad -4\pi^2 |s|^2 \widehat{E}_M(s, \eta) + \frac{\partial^2 \widehat{E}_M(s, \eta)}{\partial \eta^2} = \delta(z-\eta) \otimes 1(s)$$

dont la solution s'écrit :

$$\widehat{E}_M(s, \eta) = A e^{2\pi |s| |z-\eta|} + B e^{-2\pi |s| |z-\eta|}$$

En éliminant les solutions exponentiellement croissantes ($A=0$) et par identification avec (1), on a :

$$B = \frac{1}{4\pi |s|}$$

soit le résultat :

$$\frac{\partial \widehat{E}_M}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{2} e^{2\pi |s| z}$$

A N N E X E 3

D'après Lavoine :

$$\mathcal{F}_\tau[\sin 2\pi\tau](s) = \frac{i}{2} [\delta(s+1) + \delta(s-1)]$$

$$\mathcal{F}_\tau[\text{Sgn}(\tau) \sin 2\pi\tau](s) = -\frac{1}{\pi} \text{Pf} \left[\frac{1}{s^2-1} \right]$$

d'où :

$$\mathcal{F}_\tau[Y(\tau) \sin 2\pi\tau](s) = -\frac{1}{2\pi} \text{Pf} \left[\frac{1}{s^2-1} \right] + \frac{i}{4} [\delta(s+1) + \delta(s-1)]$$

ici :

$$s = \sqrt{2\pi} F \frac{s_1}{\sqrt{|s|}}$$

ANNEXE 4

"On cherche les racines de $2\pi s_1^2 - k_0 |s| = 0$ "

On a :

$$\begin{aligned} 2\pi s_1^2 - k_0 |s| &= 2\pi s_1^2 - k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \\ &= \frac{4\pi^2 s_1^4 - k_0^2 (s_1^2 + s_2^2)}{2\pi s_1^2 + k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \end{aligned}$$

Cherchons les zéros en s_1 du numérateur ; ils s'écrivent :

$$(1) \quad s_1 = \pm F(s_2) = \pm \frac{k_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 - \sqrt{\frac{1+16\pi^2 s_2^2}{k_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 4\pi^2 s_1^4 - k_0^2 (s_1^2 + s_2^2) &= 4\pi^2 (s_1^2 - F(s_2)^2) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right] \\ &= 4\pi^2 (s_1 - F(s_2)) (s_1 + F(s_2)) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$2\pi s_1^2 - k_0 |s| = \frac{4\pi^2 (s_1 - F(s_2)) (s_1 + F(s_2)) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right]}{2\pi s_1^2 + k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

soit :

$$\frac{1}{2\pi s_1^2 - k_0 |s|} = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{4\pi^2 (s_1 - F(s_2)) (s_1 + F(s_2)) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right]}$$

En posant :

$$(3) \quad f(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{4\pi^2 (s_1 + F(s_2)) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right]}$$

$$(4) \quad g(s_1, s_2) = \frac{2\pi s_1^2 + k_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{4\pi^2 (s_1 - F(s_2)) \left[s_1^2 + F(s_2)^2 - \frac{k_0^2}{4\pi^2} \right]}$$

On obtient :

$$(5) \quad \text{Pf} \left(\frac{1}{2\pi s_1^2 + k_0 |s|} \right) = f(s_1, s_2) \frac{Y(s_1)}{s_1 - F(s_2)} + g(s_1, s_2) \frac{Y(-s_1)}{s_1 + F(s_2)}$$