

**PROBLEMES POSES PAR LE MAILLAGE  
D'UNE GEOMETRIE COMPLEXE TRIDIMENSIONNELLE**

**Y. Lecointe, Y. Marx, J. Piquet & M. Visonneau**

**LHN, Groupe de Modélisation Numérique  
ENSM, Nantes**

**Résumé :** Le travail concerne les problèmes de mise en oeuvre d'un maillage automatique tridimensionnel permettant de générer un système de coordonnées curvilignes lié à une géométrie de complexité modérée (arrières de bateau). Les aspects discutés concernent, d'une part, le choix des fonctions de contrôle permettant la concentration des points de maillage dans les zones visqueuses, d'autre part la formulation d'une technique de ressorts assez générale permettant de réaliser l'adaptativité du maillage en fonction de la solution physique.

**Summary :** The work is concerned with implementation problems of a three dimensional body-fitted coordinate system for moderately complex geometries (ship stern regions). Relevant aspects include the choice of control functions which allow mesh clustering in viscous regions together with a quite general formulation of an adaptive mesh strategy resting on the tension and torsion string analogy.

## 1 - INTRODUCTION

L'une des caractéristiques les plus souhaitables d'une méthode de génération automatique de maillage est la capacité de traitement de formes arbitraires. Il est donc souhaitable d'introduire des transformations de coordonnées permettant la simplification du domaine de calcul dans l'espace transformé en sorte que la surface du corps à traiter soit une frontière et que la méthode de génération automatique de maillage permette d'offrir une complète liberté de choix dans la forme à traiter. Une autre qualité de la méthode est la capacité de sélectionner les distributions de points au voisinage de la surface du maillage afin que, là où les variations d'écoulements sont les plus fortes, les espacements des noeuds du maillage soient les plus petits. Que ces qualités "a priori" de toute méthode soient nécessaires, a été largement reconnu et pris en compte au moins pour des problèmes bidimensionnels (voir par exemple [1], [2]). Dans le cas de problèmes tridimensionnels, le même type d'arguments est valable et les techniques à développer sont analogues quoique plus lourdes. Le but du travail est d'examiner quelques aspects des difficultés rencontrées dans le cas tridimensionnel.

Une synthèse détaillée des techniques numériques de génération de maillages accordés est présentée par Thompson dans [3], [4]. Divers aspects plus spécifiques ont été considérés dans plusieurs ouvrages ou éditions de présentations de congrès ou d'ateliers spécialisés [5], [6], [7], [8], [9].

## 2 - SYSTEME DE COORDONNEES POUR ARRIERE CORPS

Le domaine physique  $\Delta$  de frontière  $\partial\Delta$ , où l'écoulement est étudié, est borné par la surface B de la géométrie autour de laquelle le fluide s'écoule, par un plan de symétrie vertical, par des sections amont et aval D et par une frontière extérieure  $\Sigma$  (fig. 1).

La section U est en général placée là où la couche limite est mince et la section D est placée loin dans le sillage. Toutefois, dans les situations futures où le problème de l'écoulement autour du corps complet sera considéré, la section U sera placée en amont du corps, là où l'écoulement n'est pas perturbé. La position de  $\Sigma$  est déterminée par le besoin de capturer complètement l'interaction visqueuse. L'idée de base d'un système de coordonnées liées à la géométrie est de trouver une transformation telle que les surfaces de courbes des frontières du domaine physique en coordonnées cylindriques ( $x, y \equiv r, z \equiv \theta$ ) ou cartésiennes ( $x, y, z$ ) sont transformées en frontières d'un domaine parallélépipédique dans l'espace de calcul ( $\lambda, \eta, \zeta$ ) où les calculs sont effectués. Quand les valeurs des coordonnées curvilignes sont spécifiées sur  $\partial D$ , l'obtention des valeurs des coordonnées curvilignes dans D résulte en général d'un problème aux limites où ( $\lambda, \eta, \zeta$ ) sont les fonctions et ( $x, y, z$ ) les variables indépendantes. Parce que la correspondance entre les coordonnées ( $\lambda_i, \eta_j, \zeta_k$ ) d'un point M du domaine de calcul et les coordonnées correspondantes ( $x_i, y_j, z_k$ ) du même point dans le domaine physique doit être bijective ;  $\lambda_i, \eta_j, \zeta_k$  sont des fonctions monotones croissantes de  $i, j, k$ . Un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques peut donc être utilisé pour générer les coordonnées puisque de telles équations incorporent un principe du maximum qui interdit en général la présence de maxima locaux de  $\lambda, \eta, \zeta$  à l'intérieur du domaine. De plus, la solution du problème est déterminée entièrement par les conditions aux limites.

L'ensemble classique des équations de Poisson

$$(1) \quad \nabla^2 \lambda = f^1 \qquad \nabla^2 \eta = f^2 \qquad \nabla^2 \zeta = f^3$$

est utilisé.  $\nabla^2$  désigne le laplacien exprimé dans les coordonnées  $x, y, z$ . Une grande latitude de choix existe parmi les maillages ainsi générés grâce à la sélection des termes sources  $f^m$  et cette latitude est en général utilisée pour tasser les points dans les zones où les propriétés de l'écoulement (vitesse et pression) varient rapidement.

Comme le calcul des propriétés de l'écoulement s'effectue dans le domaine de calcul, il faut pouvoir reconnaître la position des coordonnées dans l'espace physique à partir des positions correspondantes données dans le domaine de calcul. Ainsi les fonctions et les variables doivent être interchangées ; le problème aux limites dans le domaine de calcul transformé exige donc de trouver les valeurs des coordonnées  $(x, y, z)$  dans le domaine physique à partir des valeurs spécifiées sur le bord. Le problème de génération de maillage qui doit donc être résolu numériquement est alors le suivant :

$$(2) \quad g^{11} r_{\lambda\lambda} + g^{22} r_{\eta\eta} + g^{33} r_{\zeta\zeta} + 2g^{12} r_{\lambda\eta} + 2g^{13} r_{\lambda\zeta} + 2g^{23} r_{\eta\zeta} \\ + f^1 r_{\lambda} + f^2 r_{\eta} + f^3 r_{\zeta} = \sigma \Theta_y / r$$

avec  $r \equiv x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z(\sigma+1) \mathbf{e}_z$ .

$\sigma = 1$  correspond aux coordonnées polaires ;  $\sigma = 0$ ,  $r = 1$  aux coordonnées cartésiennes)

$g^{ij}$  est le tenseur métrique contravariant résultant du tenseur métrique covariant classique par :

$$g^{ik} g_{kj} = g_{jk} g^{ki} = \delta^i_j \quad (\text{Symbole de Kronecker})$$

soit :

$$g g^{11} = g_{22} g_{33} - g_{23}^2$$

$$g g^{22} = g_{11} g_{33} - g_{13}^2$$

$$g g^{33} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$$

$$g g^{12} = g g^{21} = g_{13} g_{23} - g_{12} g_{33}$$

$$g g^{13} = g g^{31} = g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22}$$

$$g g^{23} = g g^{32} = g_{12} g_{13} - g_{23} g_{11}$$

Le tenseur métrique  $g_{ij} (=g_{ji})$  est classiquement défini :

$$g_{11} = x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2 + r^2 z_{\lambda}^2$$

$$g_{12} = x_{\lambda} x_{\eta} + y_{\lambda} y_{\eta} + r^2 z_{\lambda} z_{\eta}$$

$$g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 + r^2 z_{\eta}^2$$

$$g_{13} = x_{\lambda} x_{\zeta} + y_{\lambda} y_{\zeta} + r^2 z_{\lambda} z_{\zeta}$$

$$g_{33} = x_{\zeta}^2 + y_{\zeta}^2 + r^2 z_{\zeta}^2$$

$$g_{12} = x_{\eta} x_{\zeta} + y_{\eta} y_{\zeta} + r^2 z_{\eta} z_{\zeta}$$

avec :

$$g \equiv J^2 = g_{11} g_{22} g_{33} + 2g_{12} g_{13} g_{23} - g_{23}^2 g_{11} - g_{13}^2 g_{22} - g_{12}^2 g_{33}$$

Comme un arrière corps est en général défini par l'ensemble de sections transversales composant sa forme en plan et que nous visons prioritairement l'obtention d'une solution partiellement parabolique des équations de Navier-Stokes, une solution particulière de (2) est recherchée sous la forme suivante :

$$(3) \quad \lambda = \lambda(x) \text{ ou de façon équivalente } x \equiv x(\lambda)$$

si bien que la position des lignes coordonnées  $\lambda = \text{const}$  (qui sont des plans  $x = \text{const}$ ) donnée a priori fixe le terme source  $f^1$

$$(4a) \quad f^1 = -g^{11} x_{\lambda\lambda} / x_\lambda$$

Cette procédure revient donc à empiler des maillages bidimensionnels mais elle présente l'avantage de garantir une bonne régularité longitudinale de l'empilage ; elle peut ultérieurement fournir une bonne initialisation d'un générateur complètement tridimensionnel. Cette méthode est assez peu utilisée dans le cas de problèmes d'hydrodynamique et pour les problèmes d'arrière corps (cf. néanmoins [10], [11], [12]).

Reportant (3) et (4a) dans (2), il vient :

$$(4b, c) \quad g^{11} r_{\lambda\lambda} + g^{22} r_{\eta\eta} + g^{33} r_{\zeta\zeta} + 2g^{12} r_{\lambda\eta} + 2g^{13} r_{\lambda\zeta}$$

$$+ 2g^{23} r_{\eta\zeta} + f^1 r_\lambda + F^2 r_\eta + f^3 r_\zeta = \sigma e_y / r$$

où maintenant  $r = y e_y + z e_z$  et

$$(5a) \quad \text{and } f^2 = \sigma / r r_\eta + F^2(\lambda, \eta, \zeta)$$

(4b, c) permet en général la détermination de  $F^2$  et de  $f^3$  au moyen d'une solution approchée à partir de laquelle l'ensemble des dérivées de  $r$  est calculé et lissé. Dans ce cas  $F^2$  et  $f^3$  sont liés à  $g^{ij}$  d'une façon fixée, mais ils sont gelés lors de la résolution itérative de (4b, c) seuls les  $g^{ij}$  étant "updatés". C'est l'option retenue dans [10][11][12] et utilisée ici pour obtenir les résultats présentés.

De façon alternative, le choix [13] est aussi possible

$$(6a, b) \quad f^3 = q(\zeta) e^{-a\eta} + s(\zeta) e^{-c(J-\eta)}$$

$$F^2 = p(\zeta) e^{-b\eta} + r(\zeta) e^{-d(J-\eta)}$$

et une procédure d'étirement semblable à [1][2] est introduite. Les exigences d'entrées géométriques (contrôle des angles et des espacements aux frontières) sont satisfaites en même temps que les équations de Poisson sur le bord qui sont utilisées pour adapter  $F^3$  et  $F^2$  à partir du calcul des premiers membres de (4b, c). Si cette procédure n'introduit pas de difficulté particulière dans le cas de l'arrière corps 3:1, elle introduit une distorsion du maillage sur le SSPA 720 à proximité de l'emplanture de la gouverne fictive.

### 3 - METHODES NUMERIQUES

La discrétisation de (4a, b, c) est effectuée par un choix  $\Delta\lambda = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$  si bien que  $1 \leq \lambda \leq I$  ;  $1 \leq \eta \leq J$  ;  $1 \leq \zeta \leq K$ .

Les fonctions  $F^2$  et  $f^3$  sont prescrites comme dans [10] à l'exception d'une dépendance en  $\zeta$  introduite :

$$(5b, c) \quad F^2(\lambda, \eta, \zeta) = \begin{cases} F_A(\eta, \zeta) & \lambda < \lambda_A \\ F_C(\lambda, \eta, \zeta) & \lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B \\ F_B(\eta, \zeta) & \lambda > \lambda_B \end{cases} \quad f^3 = -g^{33} z_{\zeta\zeta} / z_{\zeta}$$

où  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  sont des points choisis en amont et en aval du point le plus arrière du corps et

$$(5d) \quad F_A = -g^{11} x_{\lambda\lambda} / x_{\lambda} \quad \lambda = \lambda_A$$

$$F_B = -g^{11} x_{\lambda\lambda} / x_{\lambda} \quad \lambda = \lambda_B$$

Des valeurs négatives de  $F^2$  ont pour conséquence de tirer les lignes coordonnées vers la surface du corps et des valeurs positives de les en éloigner. Des effets analogues ont lieu pour  $f^1$  et  $f^3$ .

Considérons maintenant la discrétisation de (4b, c) qui constituent des équations de transport ayant les nombres de Reynolds de maille  $2a \equiv -f^1/g^{11}$ ,  $2b \equiv -F^2/g^{22}$ ,  $2c \equiv -f^3/g^{33}$  ; il est souhaitable de permettre de traiter des cas tels que  $|a|$  et (ou)  $|c|$  soient grands ; cela est effectué grâce à un schéma exponentiel qui évite la classique limitation des nombres de maille présentée par les schémas centrés. L'argument se comprend facilement en considérant le problème modèle (6) :

$$(6) \quad \phi_{\lambda\lambda} - 2a \phi_{\lambda} = S \quad \phi(\lambda=-1) = \phi_L \quad \phi(\lambda=+1) = \phi_R$$

Le schéma exponentiel est obtenu par intégration analytique de (6) en supposant  $a$  et  $S$  uniformes sur  $-1 \leq \lambda \leq 1$ . Soit  $\phi_p \equiv \phi(\lambda=0)$  ; on trouve

$$(7) \quad S = 2a [ \coth a \phi_p - e^a \phi_L / (e^a - e^{-a}) - e^{-a} \phi_R / (e^a - e^{-a}) ]$$

La discrétisation de (4b, c) s'en déduit aisément

$$(8) \quad S_1 + S_2 + S_3 = -2(g^{12} r_{\lambda\eta} + g^{13} r_{\lambda\zeta} + g^{23} r_{\eta\zeta})$$

où  $S_i = g^{ij} r_{,ij} + f^i r_{,i}$  ;  $i = 1, 2, 3$  correspondant respectivement aux directions  $\lambda, \eta, \zeta$ .

Les dérivées croisées sont traitées comme termes sources qui de même que les composantes des métriques  $g^{ij}$  sont approchés par des différences centrées.

En spécifiant des conditions de Neuman sur l'ensemble des frontières

des domaines  $\lambda = \text{const}$  ou en retenant une procédure de contrôle des angles et des espacements, la résolution de (8) est effectuée par méthode SLOR avec un paramètre de surrelaxation en général voisin de 1.4.

#### 4 - AUTRES METHODES TESTEES

##### 4.1. *Emplage de grilles bidimensionnelles générées par transformation conforme.*

Une telle méthode semble plus rapide et, pour la clarté de la présentation, on présentera une application à un aileron. Dans le contexte de l'hydrodynamique, cette technique a été surtout employée en fluide parfait [14][15] et en couche limite. Pour une synthèse de ces méthodes voir [18][19]. Dans ce qui suit, l'attention est concentrée sur la méthode de James qui transforme en cercle unité un contour bidimensionnel. La méthode nécessite deux étapes

(i) tout d'abord, les points anguleux sont "effacés" par une transformation de Karman-Trefftz rendue unique en localisant le point singulier intérieur  $z_1$  à mi-chemin entre le point de courbure dans un système de coordonnées translaté de façon que la transformation s'écrit sous la forme (9)

$$(9) \quad Z = nz_1 \left[ 1 - (z-z_1)^n / z^n \right]^{-1} \quad ; \quad dz/dZ = z^2/Z^2$$

La transformation de Karman & Trefftz étant appliquée autant de fois que nécessaire, le corps à une forme quasi-circulaire dans le plan  $Z$  appelé dorénavant plan  $z$ .

(ii) Une transformation conforme  $z - Z$  est ensuite introduite de sorte que le "quasi-cercle" est transformé en cercle dans le nouveau plan  $Z$ . Comme il n'y a plus ni zéro, ni valeurs infinies dans la fonction de transformation ou dans ses dérivées, cette dernière peut être développée en séries de Laurent.

La détermination de la série utilise les techniques FFT et n'est pas limitée sur la forme du corps à représenter. Elle est initialisée par une séparation du logarithme de la dérivée de la transformation en module et argument et s'inspire directement de la méthode d'Halsey.

La méthode est validée en considérant la restitution d'un contour spécifié par points.

Le passage au tridimensionnel consiste à "empiler" ces transformations dans la direction  $x$  puis à lisser les résultats longitudinalement. Cette phase de lissage apparaît essentielle dans la restitution correcte du maillage de surface. Utilisée largement en couche limite, elle ne semble pas aussi intéressante dans le cas tridimensionnel à cause de l'irrégularité longitudinale du maillage loin de l'obstacle.

##### 4.2. *Problèmes d'adaptation du maillage.*

L'existence de tourbillons longitudinaux et la complexité de la géométrie arrière (gouvernes et hélice) implique de très fortes variations des vitesses dans

le champ de l'écoulement ; il est donc nécessaire de prévoir la possibilité de déformer le maillage en accord avec la solution du problème visqueux. Ainsi il sera possible de concentrer les points au cours du processus itératif de détermination de cette solution dans les zones de forte variation des vitesses. Avant d'effectuer ce travail en tridimensionnel, il est nécessaire de tester les procédures d'adaptation du maillage, ce qui est maintenant effectué.

Un maillage adaptatif repose en général sur des principes variationnels si bien qu'il permet une optimisation des calculs en concentrant les points de discrétisation dans les zones de forts gradients. La méthode utilisée ici est une généralisation des "méthodes de ressort" introduites dans [20][21]. L'idée est de redistribuer les points de façon qu'une fonction de pondération  $w_i$  soit distribuée le long d'une ligne coordonnée en accord avec  $K_i \Delta S_i = \text{const.}$  où  $\Delta S_i$  est l'intervalle de maillage. Cette approche unidimensionnelle s'étend au cas bidimensionnel de façon immédiate, mais telle quelle, elle ne permet pas de contrôler de façon satisfaisante la forme des volumes de calcul à cause du manque de liaisons internodales. Nakahashi & Deiwert [22][23] ont généralisé cette approche et introduit, d'une part des ressorts de tension entre les noeuds afin de contrôler les espacements et de satisfaire un principe d'équidistribution, d'autre part des ressorts de torsion, attachés à chaque noeud, qui contrôlent l'inclinaison des lignes coordonnées et évitent un "cisaillement" excessif des volumes élémentaires.

Afin de réduire la complexité du processus de résolution, la distribution du maillage est traitée dans un mode parabolique en décomposant la procédure en séquences d'adaptations unidimensionnelles au cours desquelles le balayage doit s'effectuer de préférence dans les directions de forte variation des propriétés de l'écoulement. Malheureusement ces directions ne sont pas toujours connues a priori et, de plus, elles peuvent voir leur orientation renversée le long d'une ligne coordonnée. Le ressort de torsion est en outre susceptible d'introduire des efforts trop importants. Par suite, la méthode [22],[23] peut, en dépit de sa simplicité, être délicate à mettre en oeuvre.

Nous présentons dans ce qui suit une méthode de ressort qui généralise [22][23] et en élimine certaines insuffisances au prix d'une complexité accrue de la procédure de résolution. Pour la clarté de la présentation, la discussion de la méthode sera articulée sur le problème bidimensionnel et le problème tridimensionnel, qui en est une simple extension, sera ensuite rapidement décrit.

Supposons tout d'abord que les lignes coordonnées  $\eta = \eta_j = \text{const.}$  sont fixées et étudions la redistribution des noeuds le long de ces lignes (Fig. 2) A, B, C désignent les positions initiales des noeuds  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i,j}$ ,  $P_{i+1,j}$  et A', B', C' les positions après l'itération de redistribution. Comme dans la méthode [22], des ressorts de tension dont les constantes sont :  $K_{1i-1,j}$  entre A et B,  $K_{1i,j}$  entre B et C permettent la redistribution, ces quantités  $K_{1i,j}$  peuvent s'interpréter comme les valeurs discrètes de la fonction de contrôle de discrétisation qui mesure l'erreur de troncature du schéma numérique ; mais à la différence de [22], les ressorts n'occupent pas la totalité des longueurs  $\Delta L_{1i-1,j} = AB$ ,  $\Delta L_{1i,j} = BC$  et un segment rigide de longueur  $C_r$  uniforme sur tout le domaine empêche les noeuds de trop se rapprocher.

Pour déterminer les tractions exercées, il suffit de chercher les allongements des ressorts ; soient  $AA' = S_{1i-1,j}$  ;  $BB' = S_{1i,j}$  ;  $CC' = S_{1i+1,j}$  les déplacements inconnus, (le premier indice  $-1-$  donne la direction  $-\lambda-$  d'adaptation, les deuxièmes et troisièmes indices indiquent la position). Les tractions étant proportionnelles aux allongements, on trouve que si  $F_{1i-1,j}$  est la traction exercée par le ressort  $K_{1i-1,j}$  sur B et si  $F_{1i,j}$  est la traction exercée par le ressort  $K_{1ij}$  sur le noeud B.

$$(10) \quad \begin{aligned} F_{1i-1,j} &= K_{1i-1,j} (\Delta L_{1i-1,j} - C_r + S_{1i,j} - S_{1i-1,j}) \\ F_{1i,j} &= K_{1i,j} (\Delta L_{1i,j} - C_r + S_{1i+1,j} - S_{1i,j}) \end{aligned}$$

L'équilibre du noeud B résulte alors de  $F_{1i-1,j} = F_{1i,j}$ . Un ressort de torsion est alors rajouté pour déplacer B vers une position permettant d'améliorer la qualité du maillage (Fig. 3). En l'absence de torsion, le point B se déplacerait au point "de référence" O intermédiaire entre H (tel que EH est orthogonal à EF) et I (tel que I est le pied sur BC de la perpendiculaire commune à GE et BC). Ce point O satisfait:

$$(11) \quad OH = (1-\alpha) HI. \quad (\text{dans ce qui suit, } \alpha = .7 \text{ est retenu}).$$

Introduisons les coordonnées respectives  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  des points E, B, C, A.. Soient  $N_0(n_0, m_0, l_0)$  le vecteur unitaire tangent en E à la ligne  $\eta = \eta_{i-1}$ ,  $N_1(n_1, m_1, l_1)$  et  $N_2(n_2, m_2, l_2)$  les vecteurs unitaires le long de GE et BC.

Un calcul élémentaire de trigonométrie fournit alors:

$$|BI| = S = -(N_2 \times EB) \cdot (N_1 \times N_2) / [(N_1 \times N_2) \cdot (N_1 \times N_2)]$$

d'où l'on peut tirer

$$S'_{1ij1} = BO = \alpha BH + (1-\alpha) BI$$

où les trois premiers indices de  $S'$  ont la même signification que pour les déplacements liés aux tractions, le dernier indice indique la position du ressort de torsion.

Si  $W_{1ij1}$  désigne la constante du ressort de torsion, la torsion exercée est:

$$Q_{1ij1} = W_{1ij1} \cdot \theta_{1ij1}$$

où  $\theta_{1ij1}$  est l'angle OEB' exprimé de façon approchée par

$$\theta_{1ij1} = (BB' - BO) / BE \text{ en fonction de } S_{1ij} = BB' \text{ inconnu.}$$

La torsion  $Q_{1ij2}$  exercée en T se calcule de façon analogue.

Les constantes  $W_{1ijr}$  doivent être telles que les forces de torsion  $Q_{1ijr}$  et de traction  $K_{1ij}$  soient du même ordre. Comme  $W_{1ijr}$  est de l'ordre de  $BE \cdot K_{1ij}$ , on choisit  $W_{1ij1} = W_{1ij2} = \alpha H K_{1ij}$  où H est le pas moyen le long de  $\lambda = \text{const.}$  ( $W$  très grand correspond à l'orthogonalité ;  $W_{1ij2} = 0$ ,  $C_r = 0$  correspond à la méthode [22]).

L'équilibre des forces exercées sur le noeud  $P_{ij}$  a lieu quand B est en B' :

$$(12) \quad F_{1i-1j} + \sum_{s=1}^{N_t} Q_{1ijs} = F_{1ij}$$

où  $N_t$  est le nombre de ressorts de torsion attachés au noeud  $P_{ij}$  ( $N_t=1$  à la paroi,  $N_t = 2$  à l'intérieur du domaine).

Imposant aux noeuds  $P_{1j}$  et  $P_{ij}$  d'être par exemple fixés à la paroi, il vient  $S_{11j} = S_{1ij} = 0$ , les valeurs de  $S_{1ij}$  sont obtenues en résolvant le système tridiagonal (13) issu de (12).

$$(13) \quad -K_{1i-1,j} S_{1i-1,j} + [K_{1i-1,j} + K_{1i,j} + \sum_{s=1}^{N_t} W_{1ijs} / H_{1ijs}] S_{1i,j} - K_{1i,j} S_{1i+1,j} = \\ = -K_{1i-1,j} (\Delta L_{1i-1,j} - C_r) + K_{1i,j} (\Delta L_{1i,j} - C_r) + \sum_{s=1}^{N_t} W_{1ijs} S'_{1ijs} / H_{1ijs}$$

pour  $i=2, \dots, I-1$

Les positions itérées des noeuds de maillage résultent alors de l'interpolation linéaire (13):

$$(14) \quad r_{ijk}^{(n+1)} = S_{1ij}^{(n)} (r_{i+1jk}^{(n)} - r_{ijk}^{(n)}) / S_{1ij}^{(n)} + r_{ijk}^{(n)}$$

où  $r = (x, y, z)$  et

$$S_{1ij}^{(n)} = \sqrt{[(x_{i+1jk}^{(n)} - x_{ijk}^{(n)})^2 + (y_{i+1jk}^{(n)} - y_{ijk}^{(n)})^2 + (z_{i+1jk}^{(n)} - z_{ijk}^{(n)})^2]}$$

ou d'une interpolation conservant les points sur la paroi dans le cas où celle-ci est irrégulière.

L'algorithme d'adaptation unidirectionnelle est alors le suivant

- (i) détermination des constantes  $K_{1ij}$  et  $W_{1ijs}$  à partir des fonctions de contrôle retenues.
- (ii) pour  $j = 1, \dots, J$ ,  
à  $j$  fixé, pour des positions de noeuds fixées sur les autres lignes  $\eta = \text{const}$ , redistribuer les positions des noeuds sur  $\eta = \eta_j$  d'après (13).
- (iii) recommencer (ii) jusqu'à ce que  $\max S_{1ij} < \epsilon$ , valeur tolérée.

La Fig. 4 compare les résultats d'une adaptation selon  $\lambda$  dans le cas (a) sans ressort de torsion, (b) avec ressorts de torsion tels que  $W_{1ijs} = .05 * K_{1ij}$

Dans le cas d'une adaptation bidirectionnelle, outre quatre ressorts de tension issus de chaque noeud, quatre ressorts de torsion sont rajoutés (deux contrôlant le déplacement sur la ligne  $\eta = \text{const}$ , deux sur la ligne  $\lambda = \text{const}$ ). La procédure est la suivante :

- (i) détermination de  $K_{rij}$  et  $W_{rijs}$  à partir des fonctions de contrôle
- (ii) gel des lignes  $\eta = \text{const}$ . Pour  $j = 1, \dots, J$  ; à  $j$  fixé pour des positions de noeuds fixées sur les autres lignes  $\eta = \text{const}$ , redistribuer les positions des noeuds sur  $\eta = \eta_j$  d'après (2.26)
- (iii) gel des lignes  $\lambda = \text{const}$ . Pour  $i = 1, \dots, I$  redistribution des noeuds sur les lignes  $\lambda = \text{const}$  de façon analogue à (ii)
- (iv) recommencer (ii) et (iii) jusqu'à ce que  $\text{Max } S_{1ij} < \epsilon$  valeur tolérée.

## 5 - RESULTATS

Nous présentons tout d'abord les résultats obtenus au moyen des méthodes décrites aux §2 & 3 (§5.1, §5.2) ; les résultats obtenus avec d'autres

méthodes seront ensuite examinés, en particulier ceux résultant de l'utilisation des méthodes de ressorts (§5.4).

La table 1 donne la position des abscisses  $X/L$  ainsi que le facteur de relaxation  $R_f$  utilisé, le nombre d'itérations  $N$ , la valeur minimum des résidus  $\Delta y_{\max}$ ,  $\Delta z_{\max}$  (ou  $\Delta r_{\max}$ ,  $\Delta \theta_{\max}$ ), la position de la première abscisse  $x_0/L$  et le nombre de points de maillage dans les directions  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  pour les cas décrits aux §5.1 & 2.

### 5.1. Ellipsoïde de résolution allongé

Ce cas avait pour but d'étudier le comportement du mailleur près de l'axe polaire. La fig. 5 présente la solution convergée après 40 itérations. Elle montre que la version polaire du code fonctionne correctement. Cette dernière a été appliquée également à un arrière corps 3:1 et à la "niche à chiens" de l'hélicoptère SNIAS [24].

### 5.2. Arrière du SSPA Ship Liner

La Fig. 6 présente le maillage dans le plan de symétrie de la surface libre. La Fig. 7 présente plusieurs sections transversales en amont de la gouverne fictive, au niveau de la gouverne fictive et dans le sillage proche du navire. On constate que l'orthogonalité à la paroi au sein de chaque section transversale n'est pas imposée car elle pourrait créer des distorsions inacceptables du maillage à l'emplanture de la gouverne fictive au voisinage de  $x_0/L = 1$ .

### 5.3. Profil ONERA cambré

La méthode de James a été testée pour un aileron bidimensionnel afin de vérifier si la restitution du contour du profil par le générateur de maillage de la frontière était correct. Un profil ONERA cambré est considéré (Fig. 9). Les triangles correspondent à une distribution régulière de 57 points de maillage sur le cercle unité ; les lignes continues donnent la frontière B du profil.

### 5.4. Mailleurs adaptatifs (exemples)

A titre d'exemple d'application, nous présentons un maillage adaptatif basé sur un calcul convergé de l'écoulement visqueux dans une cavité entraînée, en utilisant les fonctions de contrôle

$$(15) \quad K_1 = 1 + A|U_x| + B|V_x| ; \quad K_2 = 1 + A|V_y| + B|U_y| ; \quad A = B = 1$$

Afin de satisfaire la condition d'adhérence :

$$K_{1i,1} = K_{1i,2} ; \quad K_{1i,j} = K_{1i,j-1} ; \quad K_{21,j} = K_{22,j} ; \quad K_{2i,j} = K_{2i-1,j}$$

En outre  $W_{rij}$  où  $\alpha$  est de l'ordre du pas  $H = 1/13$  du maillage initial.

La convergence du processus (i)(ii)(iii) nécessite une régularisation de  $K_{rij}$  analogue à celle utilisée dans [22].

Les Fig. 9 présentent différents maillages obtenus.

Il n'est pas toujours souhaitable d'avoir un pas trop petit qui risque de démunir de points les zones à moins forte variation dans la mesure où, en l'absence de barre de rigidité,  $C_r = 0$ . Le rapport des pas minimum et maximum est contrôlé par le rapport entre les valeurs maximum et minimum de la fonction de contrôle  $K_{r||}$  dans la direction correspondante (si  $C_r = 0$ ). La présence d'une barre de rigidité  $C_r$  est donc fondamentale pour contrôler le pas minimum du maillage.

Des exemples supplémentaires sont présentés aux Fig. 10 et 11 dans lesquelles la fonction de contrôle retenue est

$$K_1 = A e^{-B(\lambda_{\max}^{-\lambda})} + 1 ; K_2 = \text{const.}, A = 1000 ; B = 0.35.$$

La fig. 10a correspond à  $C_r = 0$ , la fig. 10b à  $C_r = .15 H$  pour une section de la carène SSPA720. ( $H$  est le pas uniforme avant adaptation).

Les Fig. 12a, b présentent des maillages obtenus dans une cavité où la fonction de contrôle est

$$K_1 = K_2 = A e^{-B|R-\sqrt{[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2]}|} + 1 \text{ avec } A = 1000, B = 6.5, R = .3$$

La Fig. 12a concerne le cas  $C_r = \alpha = 0$  (cas où la méthode itérative diverge), la Fig. 12b concerne  $\alpha = 0 ; C_r = .15 H$  (cas où la méthode itérative converge), les Fig. 12c, d correspondent aux fonctions de contrôle (15). Les valeurs des paramètres sont:  $\alpha = .02 ; C_r = .25 H$  (Fig. 12c) et  $\alpha = 0.1, C_r = .1 H$  (Fig. 12d). Ces deux dernières figures montrent l'influence du ressort de torsion.

La procédure précédente a été étendue au cas tridimensionnel. L'équation d'équilibre reste alors de la forme (13) mais le nombre de ressorts de torsion est  $N_t = 4$ . La Fig. 13 montre un exemple préliminaire de maillage adaptatif dans une cavité tridimensionnelle de côté unité, maillage basé sur la fonction de contrôle

$$K_1 = K_2 = K_3 = A e^{B(1-|R-\sqrt{[(x-.5)^2+(y-.5)^2+(z-.5)^2]}|)} + 1$$

avec  $A = 2000, B = 10, R = .3, C_r = .04, \alpha = .08$  et dix points de maillage dans chaque direction. Le maillage vu de l'extérieur de la cavité cubique est présenté à la Fig. 13a. La Fig. 13b montre la cavité cubique "épluchée" des éléments les plus périphériques.

## 6 - CONCLUSIONS

Un certain nombre de travaux sont en cours et concernent les trois points suivants :

(i) examen d'un mailleur tridimensionnel complet pour lequel les surfaces longitudinales  $\lambda = \text{const}$  ne correspondraient plus à  $x = \text{const}$ . Ce travail est nécessaire si l'on envisage de résoudre le problème "complet" autour du navire.

(ii) examen des procédures autoadaptatives sur le code tridimensionnel développé.

(III) procédures de définition d'une décomposition multidomaines permettant de traiter des cas plus complexes.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient le Pr. Patel pour avoir mis à leur disposition un listing d'une version préliminaire du générateur tridimensionnel appliqué au cas de l'arrière corps NSRDC 3:1 et Mr. Deng pour les calculs effectués concernant le mailleur adaptatif.

Les heures de calcul nécessaires à la réalisation du travail ont été effectuées sur le 9080 du Circé. Les moyens Cray1 ont été fournis par le Comité Scientifique du CCVR.

## 7 -REFERENCES.

- [1] Sorenson, R.L. - "A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids About Airfoils and Other Shapes by the Use of Poisson's Equations." NASA TM 81198 (1980)
- [2] Sorenson, R.L. - "Three Dimensional Elliptic Grid Generation about Fighter Aircraft for Zonal Finite Difference Computations." AIAA Paper 86-0429.
- [3] Thompson, J.F. ; Warsi, Z.U.A. & Mastin, C.W. - "Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations: A Review." J. Comp. Phys., 97, N°1 (1982) pp. 1-108.
- [4] Thompson, J.F. - "Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics." AIAA Journ. 22, N°1 (1984) pp. 1505-1522.
- [5] Thompson, J.F. ; Warsi, Z.U.A. & Mastin, C.W. - "Numerical Grid Generation, foundations and applications." Ed. North Holland (1984) ISBN 0-444-00985X.
- [6] Smith, R.S. Ed. - "Numerical Grid Generation Techniques" NASA CP 2166 Proc. NASA-ICASE Workshop (oct. 1980)
- [7] Ghia, K.N. & Ghia, U. Eds. - "Advances in Grid Generation" Appl. Mech., Bioeng. & Fluid Eng. Conf. ASME, FED -5 (1983) Houston.
- [8] Thompson, J.F. Ed. - "Numerical Grid Generation" Elsevier Publ. Co. N. York.
- [9] Hauser, J. & Taylor, C. Eds. - "Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics." Pineridge Press (Swansea, U.K.)
- [10] Chen, H.C. & Patel, V.C. - "Calculation of Stern Flows by a Time Marching Solution of the Partially Parabolic Equations" 15th Symposium on Naval Hydrodynamics, Hamburg (1984)
- [11] Chen, H.C. & Patel, V.C. - "Calculation of Trailing Edge, Stern and Wake Flows by a Time-Marching Solution of the Partially-Parabolic Equations." IHR Rept. 285 (1985)

- [12] Chen, H. C. & Patel, V. C. - "Numerical Solutions of the Flow over the Stern and in the Wake of Ship Hulls." 4th. Num. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics. (1985) Washington.
- [13] Thompson, J. G. ; Thames, F. C. & Mastin, C. W. - "TOMCAT - A code for Numerical Generation of Body Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing any Number of Arbitrary Two Dimensional Bodies." J. Comp. Phys. , 24, No3 (1977)
- [14] Von Kerczek, C. & Tuck, E. O. - "The Representation of Ship Hulls by Conformal Mapping Functions." J. Ship Res. Vol. 13, No4, pp. 284-298 (1969).
- [15] Halsey, N. D. - "Potential Flow Analysis of Multielement Airfoils using Conformal Mapping." AIAA Journ. , 17, No12 (1979) pp. 1281-1288.
- [16] Cebeci, T. , Chang, K. C. & Kaups, K. - "A General Method for Calculating Threedimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Ship Hulls." Proc. 12th. ONR Symp. Naval Hydrodynamics ; Nat. Acad. Sciences (Washington D. C.)
- [17] Visonneau, M. - "Contribution à l'Etude Numérique des Couches Limites Tridimensionnelles en Mode Direct et Inverse." Thèse de Doct. D'Ing. (Univ. Nantes) 1985.
- [18] Trefethen, L. N. (Ed.) - "Special Issue on Numerical Conformal Mapping" J. Comp. Appl. Maths. Vol. 24 ; No1&2 (1986)
- [19] Moretti, G. - "Grid Generation using Classical Techniques" in [5], pp. 1-37.
- [20] Gnoffo, P. A. - "A Finite Volume Adaptive Grid Algorithm Applied to Planetary Entry Flowfields." AIAA Journ. Vol. 21 ; No9 (1983) pp. 1249-1254
- [21] Dwyer, H. A. - "Grid Adaptation for Problems with Separation, Cell Reynolds Number, Shock-Boundary Layer Interaction and Accuracy." AIAA Paper 83-0449 (1983)
- [22] Nakahashi, K. & Delwert, G. S. - "A practical Adaptive Grid Method with Application to Airfoil Flow." AIAA Paper 85-1525 (1985)
- [23] Nakahashi, K. & Delwert, G. S. - "A Three Dimensional Adaptive Grid Method." AIAA Paper 85-0486 (1985)
- [24] Marx, Y. , Piquet, J. & Visonneau, M. - "Three Dimensional Mesh Generation of a Coordinate System for Navier Stokes Equations." in [9], pp. 773-784.
- [25] Anderson, D. A. - "Constructing Adaptive Grids with Poisson Grid Generators." in [9], pp. 125-136.

$R_f=0.90$	$x/L$	$R_f: 1.20$	$x/L$
Nombre		Nombre	
d'itérations: 140	0.775	d'itérations: 40	0.573
$\Delta y_{max}=.75 \cdot 10^{-3}$	0.825	$\Delta r_{max}=0.54 \cdot 10^{-4}$	0.653
$\Delta z_{max}=.62 \cdot 10^{-3}$	0.925	$\Delta \theta_{max}=0.67 \cdot 10^{-5}$	0.722
$x_0/L=0.70$	0.975	$x_0/L=0.500$	0.785
$N_x=40$	1.000	$N_x=60$	0.842
$N_y=19$	1.050	$N_y=19$	1.000
$N_z=13$		$N_z=16$	

SSPA 720 Ship Liner

Ellipsoïde de révolution 6:1

Table I

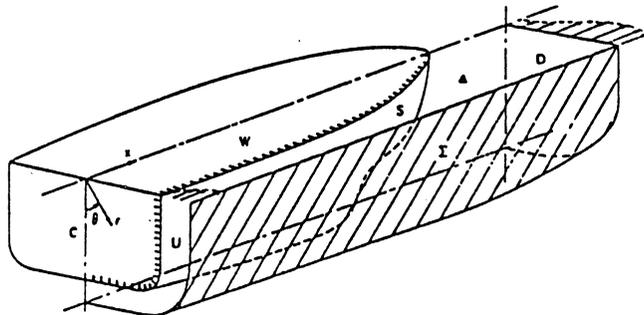


Fig. 1 Domaine physique étudié

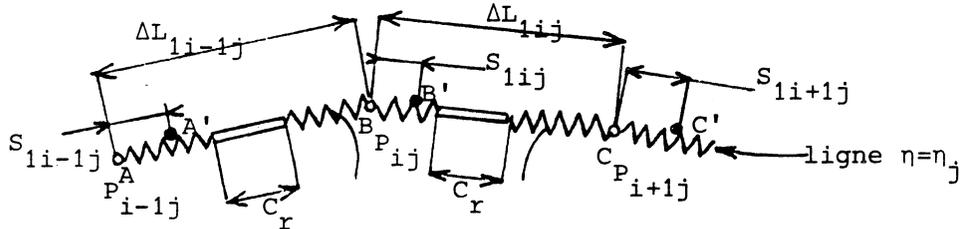


Fig. 2 Redistribution unidirectionnelle, schéma.

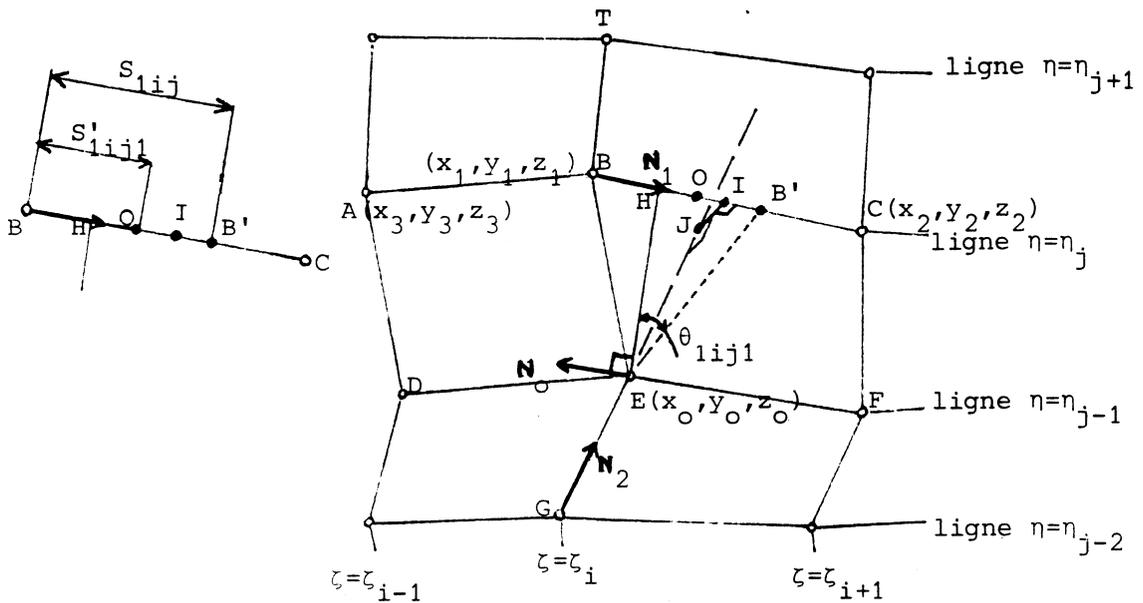


Fig. 3 Ressorts de tension et de traction, schéma.

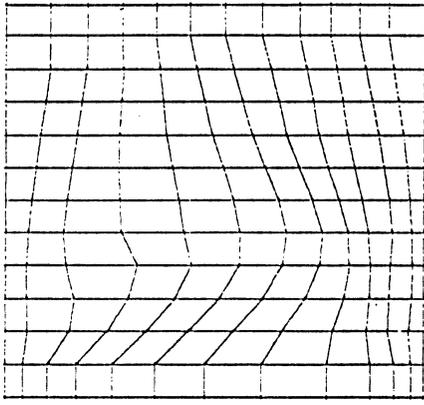


Fig. 4a Cas sans ressort de torsion

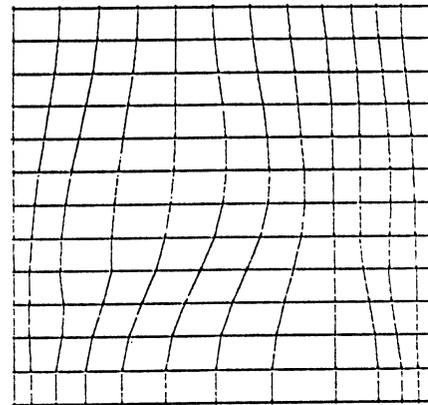


Fig. 4b Cas avec ressort de torsion

Fig. 4 Adaptation unidirectionnelle

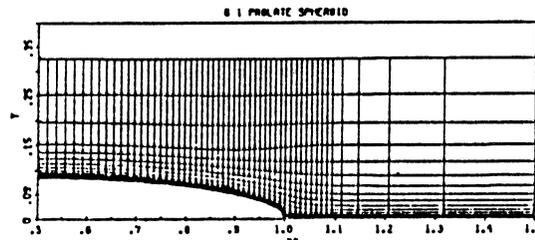


Fig. 5a Vue longitudinale

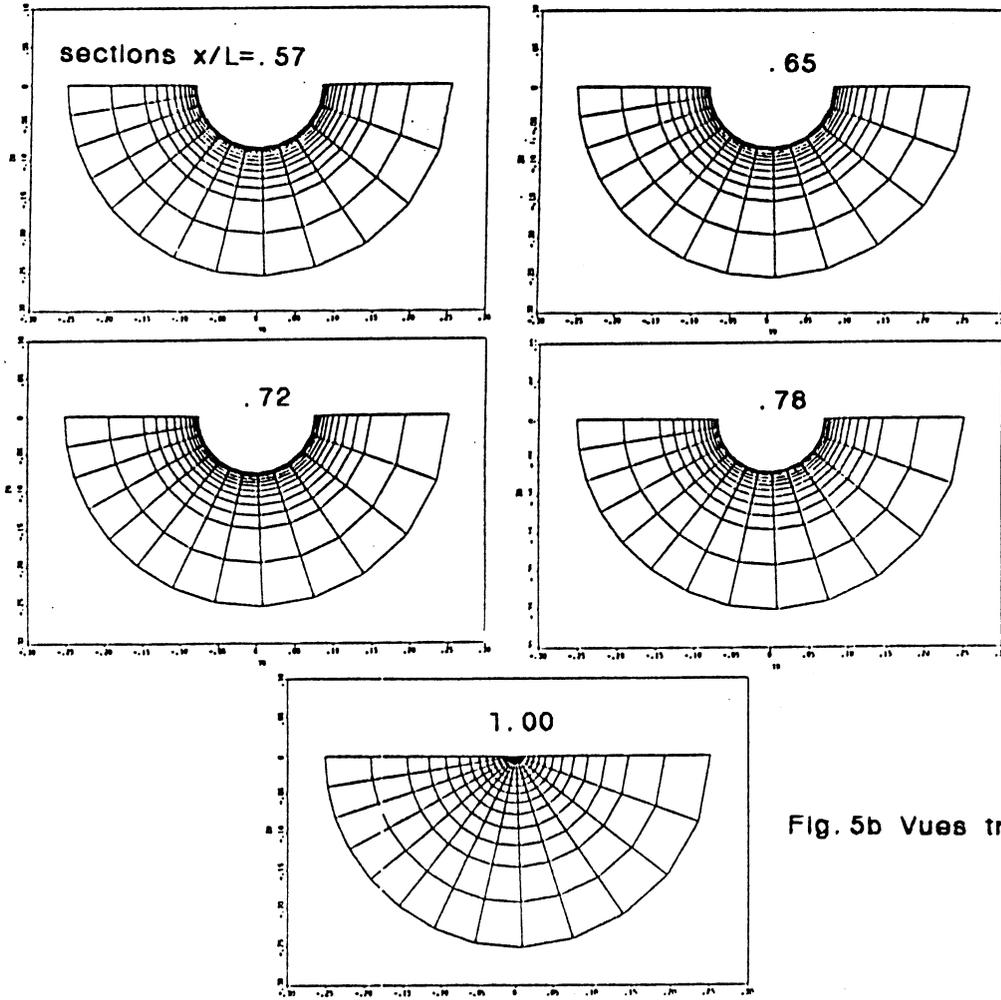


Fig. 5b Vues transversales

Fig. 5 Maillage tridimensionnel d'un ellipsoïde de révolution d'allongement 6:1.

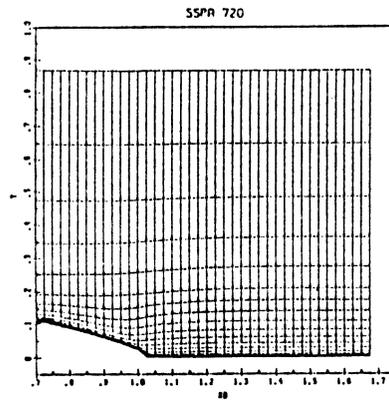


Fig. 6 Maillage du SSPA 720 (plan de symétrie de la surface libre)

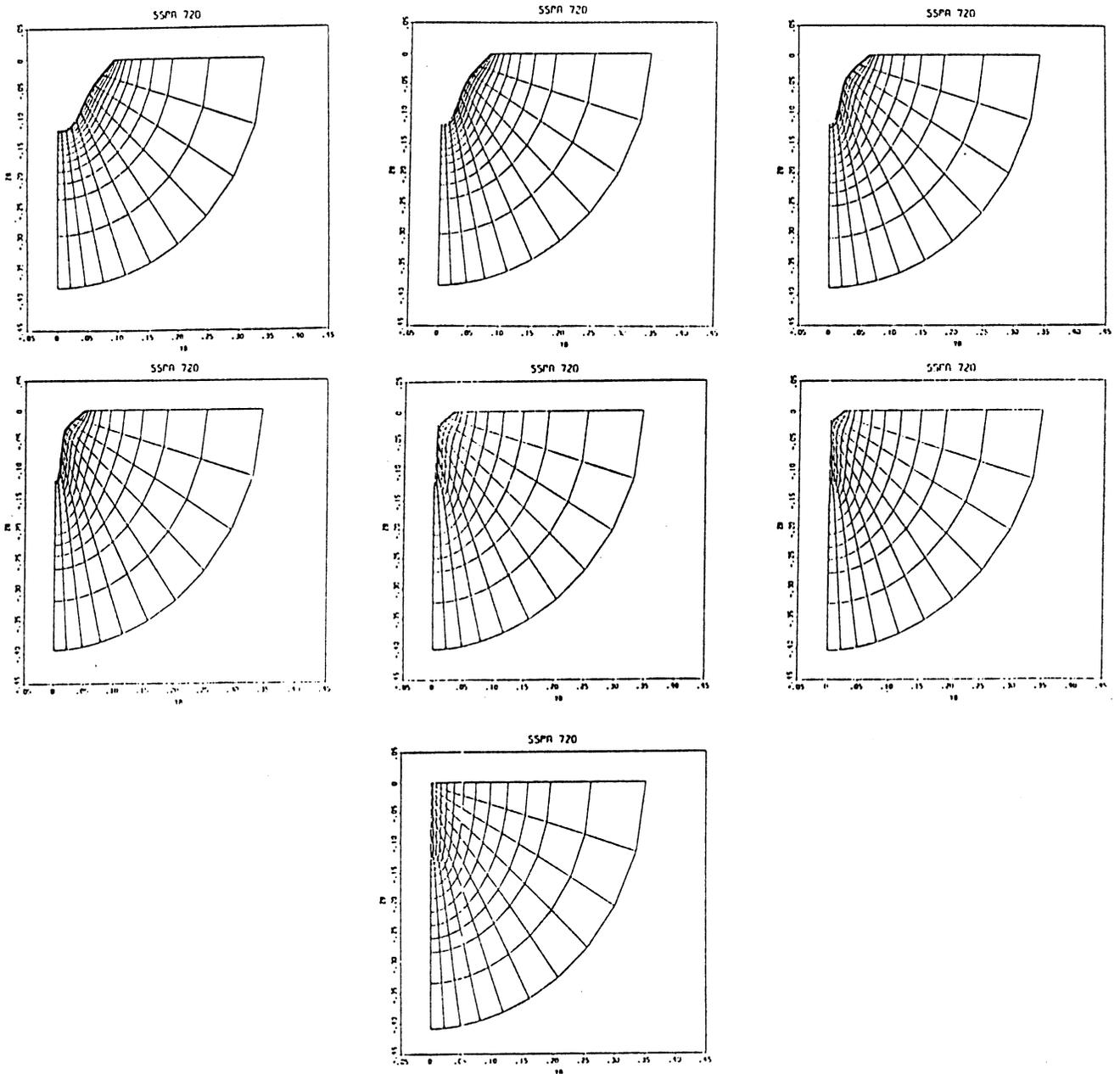


Fig. 7 Maillage du SSPA 720 ( sections  $X/L = .775 ; .825 ; .875 ; .925 ; .975 ; 1.000 ; 1.050$  )

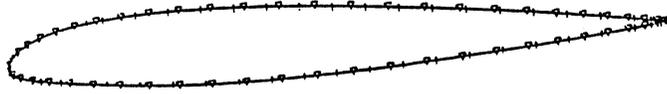


Fig. 8 Restitution du contour d'un profil ONERA cambré

+ points définissant le profil  
 ▽ points images équirépartis sur le cercle

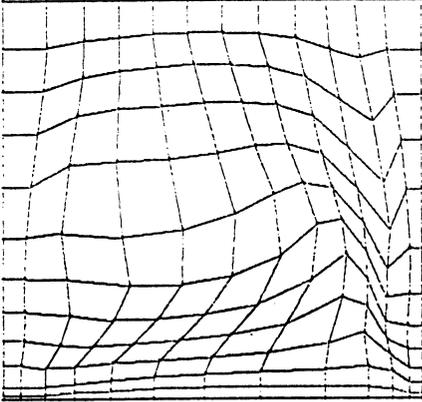


Fig. 9a Première itération (cas  $\alpha=C_r=0$ )

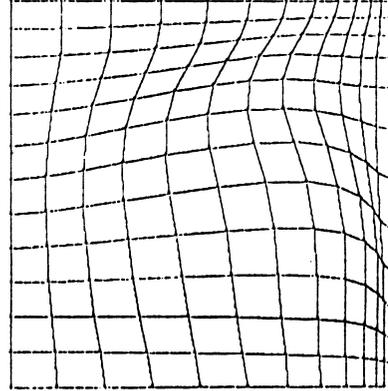


Fig. 9b Résultat avec 5 régularisations  
 (cas  $\alpha=C_r=0$  équivalent à [23])

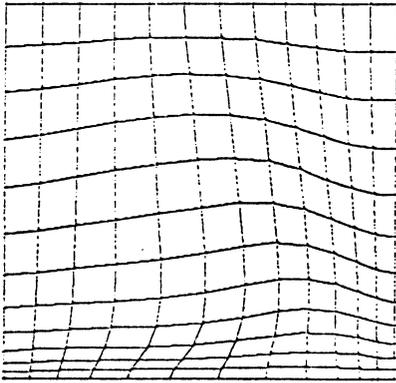


Fig. 9c Résultat avec 5 régularisations  
 (cas  $\alpha=.01 C_r=0 \Delta L_{\max}=.1318$   
 $\Delta L_{\min}=.01685$ )

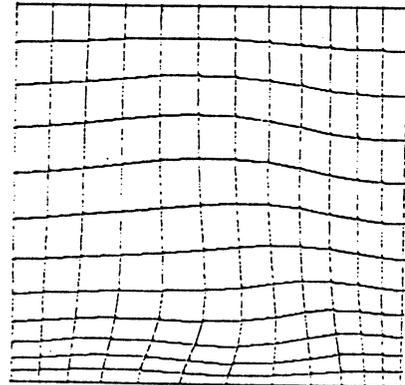


Fig. 9d Résultat avec 5 régularisations  
 (cas  $\alpha=.04 C_r=0 \Delta L_{\max}=.1242$   
 $\Delta L_{\min}=.02418$ )

Fig. 9 Maillage d'une cavité entraînée en utilisant la solution convergée du problème visqueux

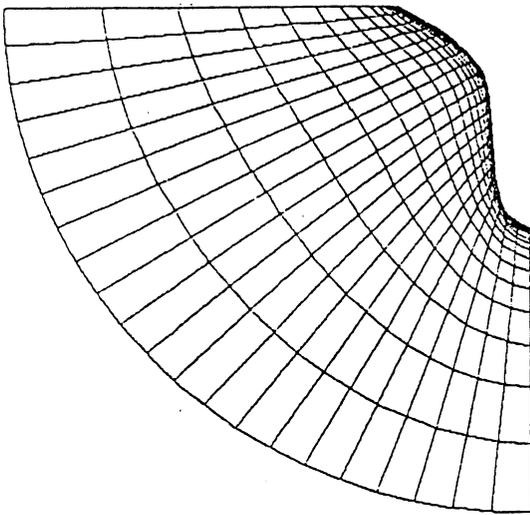


Fig. 10a Cas  $\alpha=C_r=0$  ;  $\Delta L_{max}=.212$  ;  
 $\Delta L_{min}=.000393$

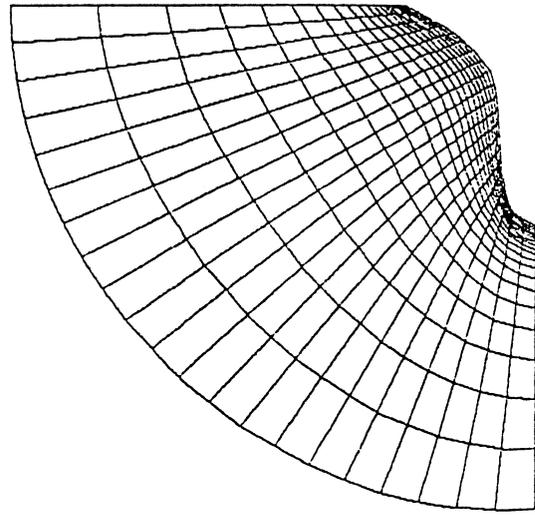


Fig. 10b Cas  $\alpha=0$  ;  $C_r=.15H$  ;  
 $\Delta L_{max}=.1867$  ;  
 $\Delta L_{min}=.004895$

Fig. 10 Maillage de la section  $x/L = .875$  du SSPA 720 ( $\eta_{max}=20$  ;  $\zeta_{max}=22$ )

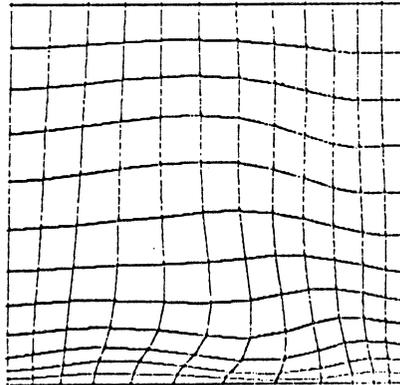


Fig. 11 Exemple de choix où  $C_r < 0$ . Cas  $\alpha=.04$  ;  $C_r=-.035H$  ;  $\Delta L_{max}=.1369$  ;  
 $\Delta L_{min}=.01097$

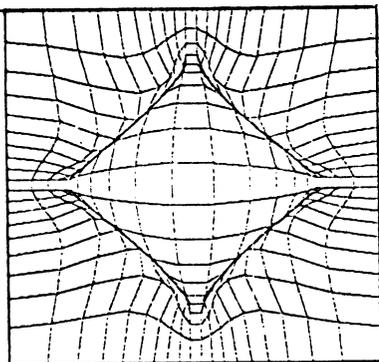


Fig. 12a Cas  $\alpha = C_r = 0$

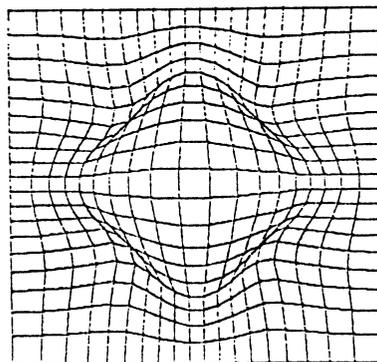


Fig. 12b Cas  $\alpha=0$  ;  $C_r=.5H$

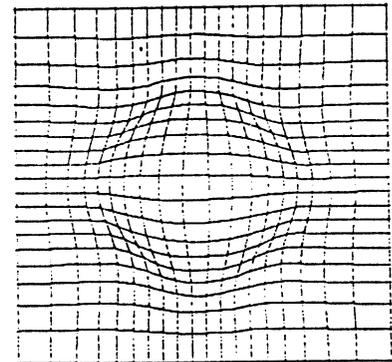


Fig. 12c Cas  $\alpha=.02$  ;  $C_r=.25H$

(méthode itérative divergente)(méthode itérative convergente)(méthode itérative convergente)

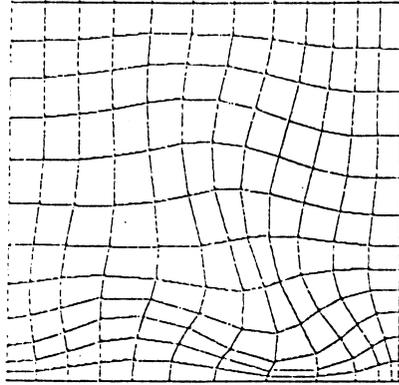


Fig. 12d Cas  $\alpha = .1$  ;  $C_r = .1H$  ;  
 $\Delta L_{\max} = .1242$  ;  $\Delta L_{\min} = .02418$

Fig. 12 Autres maillages en cavité

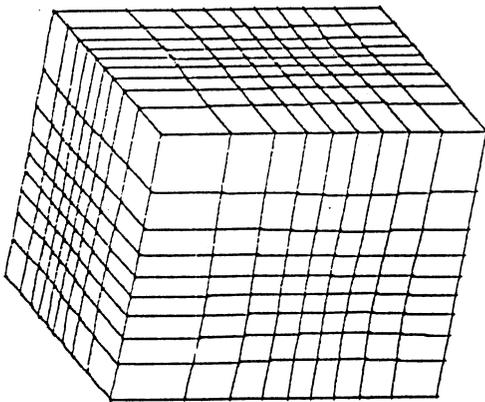


Fig. 13a Vue extérieure

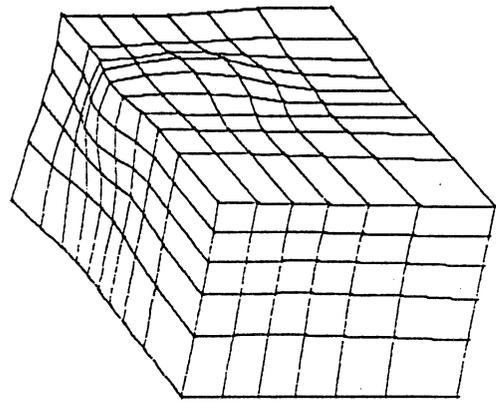


Fig. 13b Vue "épluchée"

Fig. 13 Maillage tridimensionnel d'une cavité cubique 10x10x10