

# 1ères JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

16 au 18 Février 1987 - Nantes

---

## MODELISATION DE LA REFRACTION/DIFFRACTION DE LA HOULE UTILISANT LES VARIABLES AMPLITUDE/PHASE PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS

par Y. VUJASINOVIC et J. CAHOUE

LNH - EDF  
6, Quai Watier - 78401 CHATOU

### Résumé

Le calcul de la réfraction/diffraction de la houle étant un problème d'ondes courtes, il faut à tout prix employer des méthodes numériques nécessitant peu de points de discrétisation par longueur d'onde. Cette exigence justifie l'utilisation de nouvelles variables : l'amplitude et la phase du potentiel complexe. Le système obtenu est discrétisé par la méthode des éléments finis, et une résolution de type "moindres carrés" permet de traiter les non linéarités apparaissant dans cette formulation.

### Summary

In order to solve the "mild slope" equation for short waves, one should develop numerical methods requiring a small number of nodes per wavelength. This is why we suggest to use as variables the amplitude and phase of the complex potential. The resulting equations are discretized using the Finite Element Method, and a least squares solution enables us to solve the set of non linear equations obtained.

## INTRODUCTION

La construction d'ouvrages côtiers nécessite une connaissance approfondie de la houle au voisinage de la côte. En particulier, il est utile de pouvoir évaluer quantitativement les effets de la bathymétrie et des obstacles sur la houle. Pour ce faire, jusqu'aux années 60-70, on calculait par construction d'orthogonales des plans de vagues en tenant compte uniquement de la réfraction (théorie linéaire, méthode des rayons). On obtenait ainsi une première approximation de l'effet des variations de profondeur sur une houle se propageant du large vers la côte. L'inconvénient majeur de cette méthode était l'apparition de singularités lors du croisement des orthogonales, ce qui arrivait fréquemment dans les applications pratiques.

Pour surmonter cette difficulté, il faut être capable de prendre en compte simultanément la réfraction et la diffraction de la houle. Ces deux effets complémentaires sont inclus dans l'équation de Berkhoff, qui a été établie en 1972 (cf. 1), sous les hypothèses suivantes: on considère une houle linéaire, irrotationnelle, monochromatique, et on suppose que les variations du fond sont faibles. Cette équation modélise à la fois trois phénomènes physiques: la réfraction, la diffraction, et la réflexion sur un obstacle.

L'équation de Berkhoff, qui porte sur le potentiel complexe  $\Phi$  de la houle, peut être résolue numériquement en la discrétisant à l'aide de la méthode des éléments finis, et en utilisant comme variables la partie réelle  $\Phi_1$  et la partie imaginaire  $\Phi_2$  de  $\Phi$  (cf. 1, 2, 6, 7).

Le principal désavantage de cette méthode est que les calculs nécessitent un nombre élevé de points de discrétisation par longueur d'onde: en effet,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont des fonctions qui varient rapidement en espace, même dans les zones où la houle incidente n'est que peu déformée. Pour des problèmes d'ondes longues, comme les tsunamis, cette contrainte n'est pas trop gênante. Par contre, dans le cas d'ondes courtes comme la houle, le domaine de calcul s'étend fréquemment sur plusieurs dizaines de  $\text{km}^2$ , ce qui correspond à des centaines de longueurs d'onde au carré. Le nombre de points de discrétisation requis est alors gigantesque.

Pour contourner cette difficulté, nous proposons d'employer comme variables l'amplitude  $a$  et la phase  $s$  du potentiel complexe  $\Phi$ . L'utilisation de ces nouvelles variables présente deux avantages:

-d'une part, elles ont une signification physique évidente (rappelons que le potentiel complexe  $\Phi$  et la cote de la surface libre sont reliées par une simple relation de proportionnalité);

-d'autre part, dans la zone d'approche de la côte, où l'onde incidente n'est pas modifiée considérablement, l'amplitude  $a$  et le gradient de la phase  $\vec{\nabla}s$  sont pratiquement constants.

Cette propriété se révèle particulièrement intéressante dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis, car elle peut permettre d'utiliser un maillage beaucoup plus grossier dans cette partie du domaine. Mentionnons qu'une première approche de ce type a déjà été mise en oeuvre par B.A. Ebersole (cf. 4) en différences finies.

Dans ce papier, nous présenterons d'une part la formulation en amplitude/phase dans le cas général, et d'autre part des applications numériques dans le cas monodimensionnel qui permettent de mettre en évidence dans deux configurations simples les difficultés rencontrées.

## 1. MISE EN EQUATIONS

### 1.1. L'EQUATION DE BERKHOFF

L'équation de Berkhoff modélise la réfraction, la diffraction et la réflexion d'une houle linéaire de pulsation  $\omega$  donnée.

Elle s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} \Phi) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \Phi = 0 \quad (1)$$

où:

- $\Phi(x,y)$  est le potentiel complexe inconnu,

- $c$  est la célérité de l'onde,

- $c_g$  est la vitesse de groupe.

$c$ ,  $c_g$  sont des fonctions données de la profondeur; elles sont calculées à partir de la relation de dispersion :

$$\omega^2 = g k \operatorname{th}(k d)$$

où:

-g est l'accélération de la pesanteur

- $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde

-d est la profondeur.

Rappelons très brièvement l'origine de l'équation de Berkhoff.  
Partant de l'équation tridimensionnelle:

$$\Delta\varphi(x,y,z) = 0 \text{ (houle irrotationnelle)}$$

et des conditions aux limites suivantes:

-imperméabilité du fond,

-conditions de surface libre linéarisées,

on obtient l'équation de Berkhoff après intégration suivant la verticale, en supposant que les variations du fond sont faibles par rapport à la profondeur moyenne et à la longueur d'onde. Cette équation, de type elliptique dans  $\mathbb{C}$ , nécessite la donnée de conditions aux limites sur tout le bord du domaine de calcul.

On a schématiquement deux types de conditions aux limites possibles:

-sur les obstacles (frontières terrestres), on impose une condition de réflexion totale:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

-sur les frontières maritimes, au delà desquelles la profondeur est supposée constante, le potentiel total  $\Phi(x,y)$  est la somme du potentiel incident  $\Phi_i$  connu, et du potentiel  $\Phi_d$  rayonné par le domaine, qui doit satisfaire la condition de Sommerfeld écrite à distance finie:

$$\frac{\partial\Phi_d}{\partial n} - i k \Phi_d = 0$$

On obtient après quelques calculs la condition suivante sur le potentiel total  $\Phi$  :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = i k ( \Phi - (1+\cos\theta) \Phi_i )$$

où  $\theta$  désigne l'angle que fait la direction de l'onde incidente avec la normale à la frontière considérée.

## 1.2. LES EQUATIONS EN AMPLITUDE/PHASE

Posons :

$$\Phi(x,y) = a(x,y) e^{i s(x,y)}$$

a étant l'amplitude, et s la phase de  $\Phi$ .

Si on remplace  $\Phi$  par cette expression dans (1), et si on annule la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation, on obtient le système suivant sur (a,s) :

$$c c_g \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} s + \vec{\nabla} \cdot (c c_g a \vec{\nabla} s) = 0 \quad (2)$$

$$c c_g a (\vec{\nabla} s \cdot \vec{\nabla} s - k^2) - \vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a) = 0 \quad (3)$$

Donnons quelques propriétés de ces équations.

On remarque tout d'abord que, si on multiplie la première équation par a, on retrouve l'équation de conservation du flux d'énergie :

$$\vec{\nabla} \cdot (c c_g a^2 \vec{\nabla} s) = 0 \quad (4)$$

D'autre part, dans la seconde équation, on voit que c'est le terme  $\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a)$  qui permet de modéliser la diffraction. En effet, sans ce terme, l'équation (3) redonne l'équation eikonale :

$$\vec{\nabla} s \cdot \vec{\nabla} s = k^2 \quad (5)$$

On retrouve alors les équations de la réfraction pure.

Donnons l'allure des conditions aux limites sur (a,s).

-réflexion sur un obstacle : on impose des conditions de Neumann homogènes sur a et s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial n} &= 0 \end{aligned}$$

-frontière maritime :

$$\frac{\partial a}{\partial n} = k a_i (1 + \cos\theta) \sin(s_i - s)$$

$$a \frac{\partial s}{\partial n} = k (a - a_i (1 + \cos\theta) \cos(s_i - s))$$

$a_i$  et  $s_i$  étant l'amplitude et la phase de l'onde incidente.

Notons que ces conditions non linéaires couplent à nouveau  $a$  et  $s$ .

En conclusion, l'utilisation des variables  $(a, s)$  conduit donc à traiter un problème plus complexe que celui obtenu avec la partie réelle et la partie imaginaire de  $\phi$ .

Les difficultés proviennent :

- du terme non linéaire  $\vec{\nabla}s \cdot \vec{\nabla}s$
- du couplage entre les deux équations
- des conditions aux limites.

Les deux couples de variables suivants peuvent être envisagés pour la résolution :

-soit  $(a, s)$  : deux variables scalaires.

-soit  $(a, \vec{\nabla}s)$  : un scalaire et un vecteur.

En effet, les équations ne mettent en jeu que  $a$  et  $\vec{\nabla}s$ , et  $s$  n'intervient qu'à travers les conditions aux limites.

Ayant établi la formulation en amplitude/phase dans le cas général, nous nous sommes tout d'abord placés dans le cas monodimensionnel, qui permet de mettre en évidence les difficultés du problème. Nous avons mis en oeuvre successivement les deux couples de variables  $(a, \vec{\nabla}s)$  et  $(a, s)$ ; nous avons mené l'étude de la résolution avec le couple  $(a, \vec{\nabla}s)$  car nous pensons qu'elle pourra nous fournir des indications précieuses sur la façon de résoudre le problème complet avec les variables  $(a, s)$ . Elle nécessite toutefois l'utilisation de conditions aux limites approchées, et dans le cas bidimensionnel, il sera nécessaire de rajouter une équation exprimant que  $\vec{\nabla}s$  est un champ de gradients :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}s = 0 \quad (6)$$

## 2. DEGENERESCENCE DES EQUATIONS

Avant d'aborder la résolution des équations en  $(a,s)$ , décrivons deux configurations où le couplage entre les deux équations disparaît.

Si le terme  $\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a)$  est négligeable (ce qui revient à dire que la diffraction ne joue pas), nous avons vu que l'équation (3) se réduit à l'équation eïkonale, où  $a$  ne figure plus.

A l'inverse, en présence d'ondes stationnaires (clapot),  $\vec{\nabla} s$  étant nul, seule subsiste une équation de type Helmholtz sur  $a$  :

$$c c_g k^2 a + \vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a) = 0 \quad (7)$$

Ces dégénérescences de l'équation (3) rendent la résolution du problème d'autant plus délicate. En effet, en réfraction pure, l'équation est de type hyperbolique et ne porte que sur  $s$ , alors que dans le cas du clapot, elle est elliptique et ne porte que sur  $a$ . En fait, dans le cas général, la nature du système écrit pour le couple  $(a,s)$  ne peut être précisée. L'élaboration de schémas numériques adaptés à l'ensemble des configurations possibles sera en conséquence une tâche ardue.

## 3. COMPARAISON DE PLUSIEURS METHODES DE RESOLUTION

Nous avons successivement mis en oeuvre plusieurs méthodes itératives dont nous avons comparé les performances respectives.

### 3.1. METHODE DE POINT FIXE

En se référant à une étude de B.A. Ebersole (cf. 4), nous avons tout d'abord construit une méthode de point fixe adaptée au cas où la réfraction est le phénomène physique prépondérant, en explicitant les termes correspondant à la diffraction, ce qui nous permet de découpler les équations.

Dans le cas monodimensionnel, cela revient à construire une suite  $(a_n, \vec{\nabla} s_n)$  en résolvant :

$$\vec{\nabla} s_{n+1} \cdot \vec{\nabla} s_{n+1} - k^2 = \frac{\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a_n)}{c c_g a_n} \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (c c_g a_{n+1}^2 \vec{\nabla} s_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

Les calculs ont été réalisés en différences finies, en associant à ce système des conditions de Neumann non homogène sur  $s$ .

La méthode converge tant que le terme  $\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} a)$  reste négligeable. Par contre, si le fond est trop irrégulier, la diffraction agit et des oscillations numériques apparaissent.

### 3.2. FORMULATION MOINDRES CARRÉS DU PROBLÈME

#### a. Construction de la fonctionnelle et discrétisation

Pour se donner les moyens de traiter toutes les configurations, il faut résoudre le système couplé. Pour ce faire, nous avons utilisé une formulation du type "moindres carrés" du problème, dont le principe est de remplacer la résolution d'un système non linéaire par la minimisation d'une fonctionnelle  $J$ , localement convexe au voisinage de la solution (cf. 5).

Nous avons choisi de construire  $J$  de la façon suivante :

On commence par écrire une formulation faible des équations. La méthode des éléments finis est alors bien adaptée à la discrétisation spatiale. En se fondant sur le degré des opérateurs aux dérivées partielles qui agissent sur  $a$  et  $s$  dans chaque équation, il semble naturel de multiplier la première équation par les fonctions test  $\pi$  associées à  $s$ , et la seconde par les fonctions test  $\varphi$  associées à  $a$ .

On obtient alors le problème suivant :



Trouver  $(a, s)$  tels que, pour tout  $(\varphi, \pi)$ , on ait :

$$R_1 = 0$$

$$R_2 = 0$$

avec :

$$R_1 = \int_{\Omega} c \ c_g \ \vec{\nabla} s \cdot (\vec{\nabla} a \ \pi - \vec{\nabla} \pi \ a) \ d\omega - \int_{\Gamma} c \ c_g \ a \ \frac{\partial s}{\partial n} \ d\sigma$$

$$R_2 = \int_{\Omega} (c \ c_g \ a (\vec{\nabla} s \cdot \vec{\nabla} s - k^2) \ \varphi + c \ c_g \ \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} \varphi) \ d\omega - \int_{\Gamma} c \ c_g \ \frac{\partial a}{\partial n} \ \varphi \ d\sigma$$

On construit alors la fonctionnelle  $J$  en prenant la demi somme des carrés de  $R_1$  et  $R_2$ .

On a donc :

$$J(a, s) = 1/2 ( R_1^2 + R_2^2 )$$

Par construction, une solution des équations est un minimum de  $J$ . Bien que  $J$  ne soit pas convexe dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut raisonnablement supposer qu'elle est localement convexe au voisinage du minimum recherché.

Nous avons adimensionnalisé  $J$ , en prenant soin que les contributions des deux équations soient du même ordre de grandeur. Plusieurs méthodes sont envisageables pour la minimisation de  $J$  (citons par exemple la méthode du gradient conjugué, la méthode de Newton, les méthodes de quasi Newton).

Nous avons choisi d'employer une méthode de quasi Newton d'ordre 2 (cf. 3) qui nous a paru intéressante car elle nécessite un stockage réduit en mémoire. Notons que le choix de la méthode de minimisation ne doit pas, lorsqu'il y a convergence, influencer sur les résultats obtenus.

#### b. Resultats numeriques

Nous avons traité les deux couples de variables  $(a, \vec{\nabla} s)$  et  $(a, s)$  dans le cas monodimensionnel, pour des configurations pour lesquelles on dispose de solutions analytiques.

Nous présentons fig. 1 et 2 les résultats de deux tests numériques avec les variables  $(a, \vec{\nabla}s)$ , où  $a$  et  $\vec{\nabla}s$  sont approchés à l'aide de fonctions continues, linéaires par élément.

Fig. 1 : Une onde incidente se propage de gauche à droite. La profondeur diminue avec une pente d'environ 2% : la réflexion sur le fond est donc négligeable. On a représenté l'amplitude obtenue à convergence de l'algorithme. On retrouve dans ce cas l'amplitude en réfraction pure, avec seulement 2 points de discrétisation par longueur d'onde.

Fig. 2 : L'onde incidente est réfléchiée sur un obstacle situé à l'extrémité droite du domaine. Ayant imposé des conditions de Neumann sur  $s$  et  $a$  (seule la condition sur  $a$  en entrée n'est pas homogène), et ayant évité de se placer sur un mode propre, on retrouve le clapot (solution sinusoïdale de pulsation  $k$ ).

Dans les deux cas, la comparaison avec les solutions analytiques montre que la précision obtenue est satisfaisante; par contre, le nombre d'itérations nécessaires est assez élevé.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'emploi de la variable  $\vec{\nabla}s$  dans le cas bidimensionnel nécessite le traitement de l'équation(6).

Nous avons donc réalisé des tests analogues sur le couple  $(a, s)$  où  $a$  et  $s$  sont approchés par des fonctions continues linéaires par élément. Les résultats obtenus mettent en évidence des oscillations numériques.

La comparaison avec les résultats précédents nous amène à reconsidérer les discrétisations utilisées. En effet, dans ce cas,  $\vec{\nabla}s$  calculé à partir de  $s$  est discontinu, et le fait que l'on n'ait pas observé ces oscillations dans les calculs en  $(a, \vec{\nabla}s)$  nous conduit à penser qu'il est préférable d'avoir une discrétisation continue de  $\vec{\nabla}s$ .

## CONCLUSION

En définitive, nous avons comparé deux méthodes : une méthode de point fixe, et une méthode de moindres carrés.

Par construction, la méthode de point fixe, bien adaptée à la réfraction pure, ne permet pas de calculer le clapot.

La formulation "moindres carrés" nous a permis de traiter à la fois la réfraction et le clapot dans un cas simplifié. Les applications numériques dans le cas monodimensionnel mettent en évidence des difficultés liées à l'approximation des différentes variables. Nous allons poursuivre notre étude en considérant une formulation mixte des équations, qui devrait nous permettre de revenir à des discrétisations compatibles.

En ce qui concerne la convergence de la méthode de minimisation employée, nous envisageons la mise au point d'un préconditionneur permettant d'accélérer sa vitesse.

La prochaine étape de ce travail sera le passage au cas bidimensionnel, sur lequel nous étudierons plus particulièrement le choix et la prise en compte des conditions aux limites.

La formulation en amplitude/phase devrait en définitive permettre de modéliser la réfraction/diffraction de la houle à l'approche des côtes avec un nombre réduit de points de discrétisation.

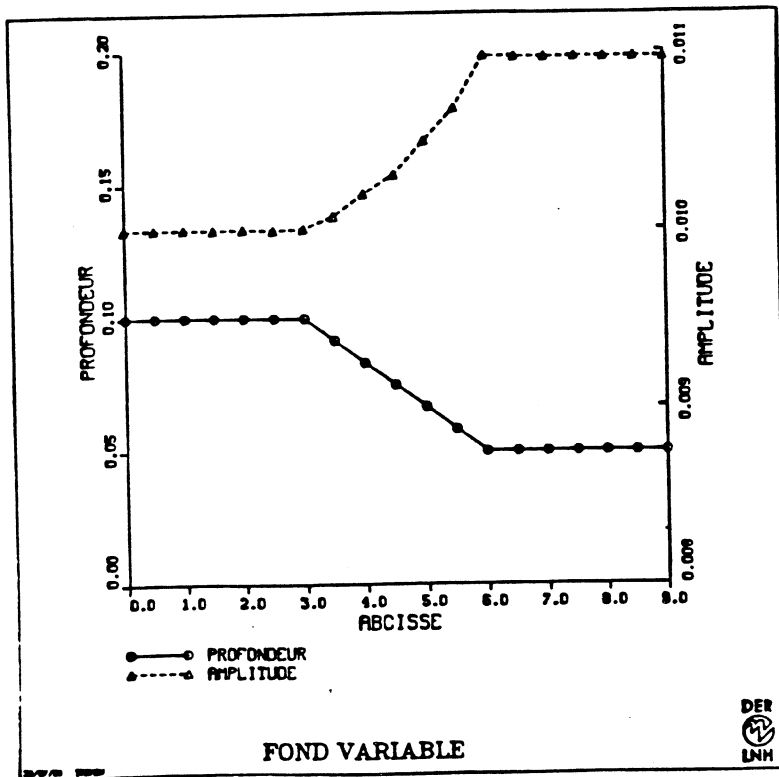


Figure 1.

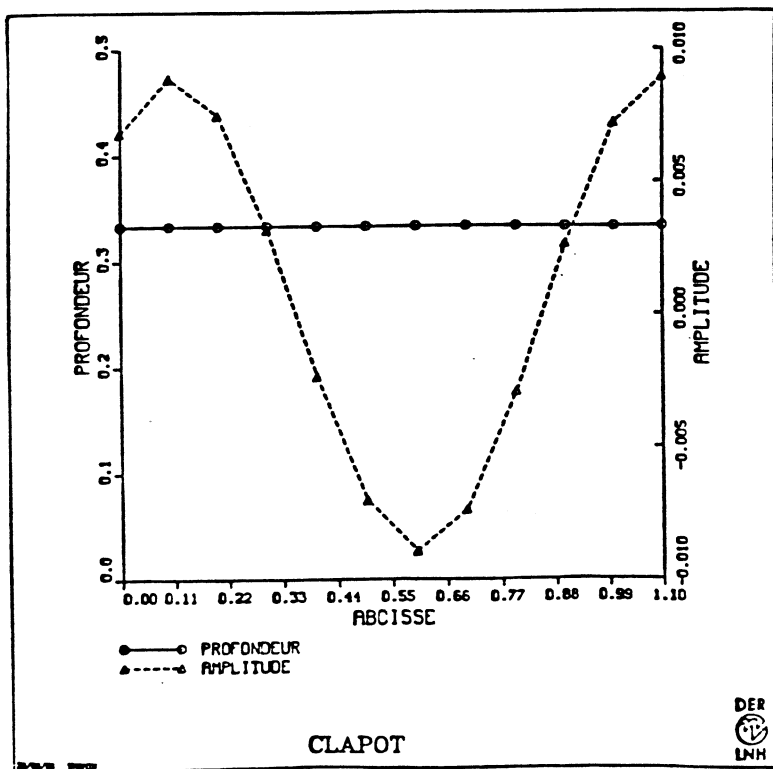


Figure 2.

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) J.C.W. Berkhoff : "Computation of combined Refraction/Diffraction", Proc. 13th Conf. Coastal Eng. ASCE 1 (1977).
- (2) P. Bettess and O.C. Zienkiewicz : "Diffraction and Refraction of Surface Waves using Finite and Infinite Elements", Int. J. for Numer. Methods in Eng. Vol. 11, 1271-1290 (1977).
- (3) J.E. Dennis Jr. and J.J. More : "Quasi Newton Methods, Motivations and Theory", SIAM Review, Vol. 19, n° 1, Jan. 1977.
- (4) B.A. Ebersole : "Refraction/Diffraction Model for Linear Water Waves", J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engg. Vol. 111, n° 6, Nov. 1985.
- (5) R. Glowinski : "Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems", Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag 1984.
- (6) J.R. Houston : "Combined Refraction and Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method", Applied Ocean Research, 1981, Vol. 3, n° 4.
- (7) M. Polyzakis : "Calcul Numérique de la Houle diffractée par une Ile ou dans un Port en Eau Peu Profonde", ENSTA Rapport de Recherche 127, Nov. 1980.