

SPHERE IMMERGEE EN MOUVEMENT DE PILONNEMENT
DE GRANDE AMPLITUDE

P. FERRANT

L. H. N. - E. N. S. M.

Résumé

Nous décrivons une méthode permettant de déterminer l'écoulement engendré par le mouvement de pilonnement de grande amplitude d'un corps immergé sous la surface libre d'un fluide parfait. Le phénomène est supposé établi, et le problème est posé dans le domaine fréquentiel. La condition de glissement sur la surface du corps est satisfaite sur la position exacte de celle-ci. Par contre, la condition de surface libre est linéarisée, et satisfaite sur sa position moyenne. La méthode proposée permet en particulier le calcul des efforts sur le corps, ainsi que la détermination du champ de vagues.

Bien que le code de calcul que nous avons développé ne comporte aucune restriction quant à la géométrie du corps, la relative modestie de nos moyens informatiques nous a contraint à ne l'appliquer qu'à des corps présentant une symétrie de révolution autour d'un axe vertical. Ainsi, les résultats présentés concernent une sphère.

Abstract

This paper presents a method for the determination of the flow generated by a body performing a large amplitude heave motion under the free surface of a perfect fluid. As we assume steady-state conditions, the problem is solved in the frequency domain. The body boundary condition is satisfied at the exact position of the body surface, the free surface boundary condition being still linearized. The methods allows the calculation of the forces on the body, and the determination of the wave field.

Although the computer code does not suffer of any restriction regarding the body geometry, it has only been applied to vertical axisymmetric bodies, because of the limited memory capacity of the local computer. Consequently the results presented in the paper concern a sphere.

INTRODUCTION

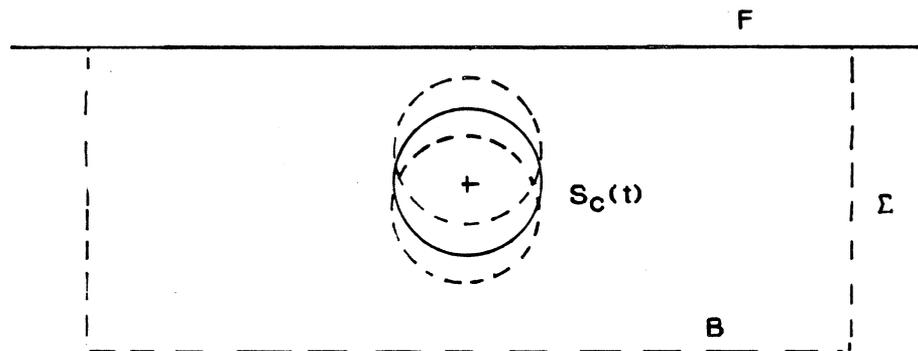
Ces dernières années, le problème du calcul de la tenue à la mer des structures marines (navires, plates-formes off-shores ...) a trouvé une solution satisfaisante avec l'apparition de codes de calcul basés sur les hypothèses de linéarisation. Diverses méthodes ont été utilisées avec succès pour résoudre le problème linéarisé qui prend alors le nom de "Problème de Diffraction-Radiation", citons principalement la méthode des éléments finis et la méthode des singularités.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience, tant que l'on ne s'éloigne pas des hypothèses de départ qui imposent une faible cambrure de la houle et de faibles déplacements de la carène autour de sa position d'équilibre. Malheureusement, les circonstances qui échappent à ces restrictions sont précisément celles où la sécurité des hommes et du matériel est en jeu. Pour s'engager dans la voie d'une modélisation plus réaliste de telles situations, il est nécessaire de s'affranchir d'une ou plusieurs des hypothèses de linéarisation. Pour notre part, nous proposons sur un cas simple l'étude des non-linéarités associées à la condition de glissement sur le corps.

POSITION DU PROBLEME - HYPOTHESES

Nous nous proposons de déterminer le régime établi de l'écoulement engendré par le mouvement de pilonnement forcé d'un corps entièrement immergé sous la surface libre d'un fluide parfait, celui-ci étant supposé initialement au repos.

Figure 1



En ce qui concerne le fluide, les hypothèses consenties sont les suivantes :

- H1 - On néglige les tensions superficielles et on suppose que la pression est constante au-dessus de la surface libre
- H2 - Le fluide est parfait et isovolume
- H3 - L'écoulement est irrotationnel
- H4 - La profondeur d'eau est infinie
- H5 - Le phénomène est établi depuis un temps infiniment long
- H6 - La cambrure de la houle générée est petite devant l'unité
- H7 - Le corps est indéformable
- H8 - Un système extérieur impose au corps un mouvement oscillatoire périodique autour de sa position moyenne

Les seules restrictions sur les caractéristiques du corps et de son mouvement seront la conséquence de l'hypothèse H6. On ne pourra s'assurer qu'a posteriori que celle-ci est bien satisfaite.

L'hypothèse H2, ainsi que l'équation de continuité, permettent d'écrire en tout point du fluide :

$$(1) \quad \text{div}(\vec{V}) = 0$$

$V(M,t)$ étant la vitesse d'une particule fluide au point M à l'instant t.

L'hypothèse H3 permet de conclure que le champ de vitesse dérive d'un potentiel scalaire $\phi(M,t)$:

$$(2) \quad \vec{V}(M,t) = \overline{\text{grad}} \phi(M,t)$$

Soit alors :

$$(3) \quad \text{div} \overline{\text{grad}} \phi(M,t) = \Delta\phi(M,t) = 0$$

Le potentiel des vitesses satisfait donc l'équation de Laplace, à tout instant et en tout point du domaine fluide.

CONDITIONS AUX LIMITES

Condition de surface libre

L'hypothèse H1, l'hypothèse de continuité et l'équation de Lagrange conduisent à la condition de Poisson pour la surface libre d'équation $z = \eta(x,y,t)$:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} V^2 \Big|_{z=\eta} = 0$$

La hauteur de vague étant donné par l'équation de Lagrange :

$$(5) \quad \eta = - \frac{1}{g} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \Big|_{z=\eta}$$

L'hypothèse portant sur la cambrure de la houle générée va nous permettre de satisfaire la condition (4) sur la position de la surface libre au repos ($z=0$). Les termes quadratiques en vitesse, d'un ordre supérieur au termes de potentiel par rapport à l'amplitude de la houle, seront négligés.

Nous obtenons alors une condition de surface libre classique, affichée sur une frontière fixe, le plan $z = 0$.

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

La hauteur de vague sera donnée par l'équation de Lagrange linéarisée, consistante avec cette approximation.

$$(7) \quad \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Condition de glissement sur le corps

On traduit ici le fait que la vitesse normale du fluide en tout point de la carène est égale à tout instant à la composante normale de la vitesse d'entraînement du corps.

On ne fera pas ici l'hypothèse des petits mouvements du corps qui permet d'afficher la condition de glissement sur la position moyenne de la carène. L'objet de notre étude est précisément d'étudier l'effet de l'abandon de cette hypothèse de linéarisation.

Cette condition sera donc satisfaite sur la position instantanée de la carène :

$$(8) \quad \left. \frac{\partial \phi(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S(t)} = \bar{V}_E(M, t) \cdot \bar{n}$$

Conditions à l' ∞

On exprime simplement le fait que la perturbation due au mouvement du corps cesse de se faire sentir à l' ∞ . On pourra écrire par exemple

$$(9) \quad \phi(M, t) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad R \rightarrow \infty$$

R étant la distance du point M à point de référence lié au corps.

Condition de rayonnement

Pour ne conserver que les solutions correspondant à une propagation des ondes de gravité du corps vers l'infini, il est habituellement nécessaire d'introduire une condition de rayonnement à l'infini. Nous adopterons, pour notre part, la notion de fluide presque parfait qui en introduisant un amortissement fictif infinitésimal $\epsilon > 0$ permet d'éviter de formuler explicitement la condition de rayonnement [1]. A cet effet, nous retiendrons finalement comme condition aux limites sur la surface libre la condition de Poisson linéarisée des fluides "presque" parfaits :

$$(10) \quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Les opérateurs élémentaires construits par la méthode des transformées de Fourier en adoptant cette formulation, satisfont alors intrinsèquement la condition de radiation à l'infini.

Dépendance temporelle

On impose au corps un mouvement périodique, à la pulsation ω .

Ce mouvement est l'élément exciteur du système. On admettra alors que la réponse établie de celui-ci est périodique. Les grandeurs cinématiques décrivant son comportement seront donc développables en série de Fourier. En particulier, le potentiel des vitesses au sein du fluide $\phi(M, t)$ est écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \phi(M, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(M) \cos(n\omega t) + \phi_n^{**}(M) \sin(n\omega t) \\
 (11) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\phi_n e^{-in\omega t})
 \end{aligned}$$

LE PROBLEME AUX LIMITES

Les considérations précédemment exposées nous amènent à écrire que le potentiel de l'écoulement est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \Delta \phi = 0 \quad \text{soit } \Delta \phi_p = 0 \quad p = 0, 1, \dots \\
 & \frac{\partial \phi_p}{\partial z} = K_p \phi_p \quad ; \quad K_p = \frac{p^2 \omega^2}{g} \\
 & \overline{\operatorname{grad} \phi_p} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0 \\
 & \sum_p \frac{\partial \phi_p}{\partial n} e^{-ip\omega t} = \bar{v}_e \cdot \bar{n} \quad M \in S(t) \\
 & + \text{une condition de radiation des ondes à l'infini}
 \end{aligned}$$

LE PROBLEME INTEGRAL

Dans la perspective d'une résolution au problème à l'aide d'une méthode de singularités, on transformera le problème aux limites en un problème intégral, et on résoudra ce dernier par discrétisation des intégrales de surface.

Soit un domaine D limité par une surface fermée S . Pour deux fonctions de classe C_2 dans ce domaine, ϕ et ψ , la formule de Green s'écrit :

$$(13) \quad \iiint_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dD = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, dS,$$

n étant la normale unitaire de S , extérieure à D .

Pour nous, D sera le domaine fluide dépendant du temps $D(t)$ limité par la surface libre moyenne $F(z=0)$, un cylindre vertical de rayon arbitrairement grand Σ , le fond B rejeté à une profondeur infinie, et la surface mobile du corps $S_c(t)$.

Si ψ est le potentiel induit par une source unitaire en milieu infini, située en M' :

$$(14) \quad \psi(M) = -\frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}$$

et si ϕ est solution de l'équation de Laplace dans D, la formule (13) donne :

$$(15) \quad \iint_{S=S_c(t)+\Gamma+B+F} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\phi) \right] dS_{M'} = \begin{cases} 0 & M \in C_D(t) \\ -2\pi \phi(M) & M \in S \\ -4\pi \phi(M) & M \in D(t) \end{cases}$$

Si maintenant ϕ est une fonction périodique du temps, (11), on obtient :

$$(16) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \iint_{B+F+\Gamma+S_c(t)} \left[\phi_p^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\cos p\omega t}{R} \right) + \phi_p^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\sin p\omega t}{R} \right) - \frac{\cos p\omega t}{R} \frac{\partial}{\partial n'} (\phi_p^*(M')) - \frac{\sin p\omega t}{R} \frac{\partial}{\partial n'} (\phi_p^{**}(M')) \right] dS_{M'} = \begin{cases} 0 & M \in C_D \\ -2\pi \phi(M, t) & M \in \delta D \\ -4\pi \phi(M, t) & M \in D \end{cases}$$

Remarque : R est une fonction du temps lorsque M' est située sur Sc(t).

Différentes méthodes intégrales peuvent être déduites de cette formule, suivant que l'on choisit d'utiliser des singularités simples de Rankine, ou des singularités de Kelvin qui satisfont de manière intrinsèque la condition de surface libre. Dans tous les cas, le potentiel devra être calculé en tenant compte du déplacement réel de la singularité, afin que la condition de glissement puisse être satisfaite sur la position instantanée de la sphère.

Nous avons choisi de développer une méthode utilisant des singularités de Kelvin, après avoir montré que les équations intégrales déduites de (12) étaient alors bien réduites à la surface de la carène, comme c'est le cas lorsqu'on travaille dans un domaine dont les frontières ne dépendent pas du temps ([1]). En contrepartie, une part importante de la difficulté est alors reportée dans la détermination de fonctions de Green relativement complexes. dans une précédente publication ([2]), nous donnions diverses formulations de la fonction de Green relative à une source de débit pulsant en mouvement de pïonnement sinusoïdal, le débit étant à la même fréquence que le mouvement. D'une façon plus générale, il nous faut développer des fonctions de Green que nous noteront G_{1p} et G_{2p} , solutions du problème suivant:

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta G_{1p}(M, M', t) = \delta(M, M') \cdot \begin{cases} \cos(p\omega t) & i=1 \\ \sin(p\omega t) & i=2 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial z} \right] G_{ip}(M, M', t) = 0, \quad i=1, 2, \quad M \in D \\ \bar{\nabla}_M G_{ip}(M, M', t) \longrightarrow 0 \quad \text{pour } z \longrightarrow -\infty \\ \text{avec: } M'(x', y', z'=z_0+a \cos \omega t) \quad z_0 + a < 0 \\ M(x, y, z) \quad z < 0 \end{cases}$$

et $R = |MM'|$

$$(18) \quad \begin{aligned} G_{1p}(M, M', t) &= \frac{-\cos(pwt)}{R(t)} + g_{1p}(M, M', t) \\ G_{2p}(m, m', t) &= \frac{-\cos(pwt)}{R(t)} + g_{2p}(M, M', t) \end{aligned}$$

Les fonctions g_{1p} et g_{2p} sont harmoniques et régulières dans D . Les équations intégrales pour le potentiel sur la carène sont déduites de (16), après avoir substitué respectivement aux singularités simples $\cos(pwt)/R$ et $\sin(pwt)/R$ les fonctions de Green G_{1p} et G_{2p} . On obtient alors:

$$(19) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \iint \left[\Phi_p^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{1p}(M, M', t) + \Phi_p^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{2p}(m, m', t) \right. \\ \left. - G_{1p}(M, M', t) \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^*(M') - G_{2p}(M, M', t) \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^{**}(M') \right] = \begin{cases} 0 & M \in D \\ \Phi(M, t)/2 & M \in S_C^1(t) \\ \Phi(M, t) & M \in D \end{cases}$$

(D_i : intérieur de la carène)

G_{1p} et G_{2p} sont des fonctions périodiques du temps. Elles possèdent donc un développement de Fourier, que nous noterons:

$$(20) \quad \begin{aligned} G(M, M', t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_{1p}^{n*} \cos(nwt) + G_{1p}^{n**} \sin(nwt) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[G_{1p}^n e^{-inwt} \right] \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Les équations (11) et (20) nous permettent d'éliminer le temps du système d'équations intégrales (19). Nous obtenons alors le système (21), formé d'une infinité d'équations intégrales couplées portant sur les composantes harmoniques du potentiel sur la carène.

$$(21) \quad \left[\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \iint_{S_C(t)} \left[\Phi_p^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{1p}^{n*} + \Phi_p^{**} \frac{\partial}{\partial n'} G_{2p}^{n*} - G_{1p}^{n*} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^*(M') - G_{2p}^{n*} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^{**}(M') \right] dS_{M'} \\ \text{pour } 0 \leq n \leq \infty \end{aligned} \right] = \frac{1}{2} \Phi_n^*(M)$$

$$\left[\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \iint_{S_C(t)} \left[\Phi_p^* \frac{\partial}{\partial n'} G_{1p}^{n**} + \Phi_p^{**} \frac{\partial}{\partial n'} G_{2p}^{n**} - G_{1p}^{n**} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^* - G_{2p}^{n**} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_p^{**} \right] dS_{M'} \\ \text{pour } 0 \leq n < \infty \end{aligned} \right] = \frac{1}{2} \Phi_n^{**}(M)$$

Les systèmes d'équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce portant sur les distributions de singularités utilisées lors de la résolution du problème (ici sources seules où sources et doublets normaux) seront déduits du système (21). Nous aborderons cette étape après avoir décrit les opérateurs G_{1p} et G_{2p} qui nous seront alors nécessaires.

FNCTIONS DE GREEN

Les solutions du problème (17) seront obtenues de manière classique par résolution dans l'espace de Fourier de l'équation différentielle issue de l'équation aux dérivées partielles correspondant à la condition de surface libre linéarisée, puis par retour dans l'espace physique par transformée de Fourier inverse ([2]). Les solutions se présentent "naturellement" sous forme de développements en séries harmoniques du potentiel calculé en un point fixe de l'espace. Chacun des termes de ces séries harmoniques peut s'écrire sous une forme s'apparentant à celle de la fonction de Green de la tenue à la mer linéarisée, la prise en compte du mouvement du point "source" se traduisant par l'apparition d'une intégrale supplémentaire. Les fonctions G_{1n} et G_{2n} s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
 G_{1n}(M, M', t) = & - \frac{\cos n \omega t}{4\pi} \left[\frac{1}{MM'(t)} + \frac{1}{MM'_1(t)} \right] \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{2K_p}{\pi^3} \int_0^{\pi} \cos n\sigma \cos p\sigma \int_0^{\pi/2} R_e \left[e^{K_p \zeta} E_1(K_p \zeta) \right] d\theta d\sigma \cos p\omega t \right. \\
 & \left. + K_p C_{np}(aK_p) e^{K_p(Z+Z'_0)} \left[H_0(K_p r) \cos p\omega t - J_0(K_p r) \sin p\omega t \right] \right] \\
 (22) \\
 G_{2n}(M, M', t) = & - \frac{\sin n \omega t}{4\pi} \left[\frac{1}{MM'(t)} + \frac{1}{MM'_1(t)} \right] \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{2K_p}{\pi^3} \int_0^{\pi} \sin n\sigma \sin p\sigma \int_0^{\pi/2} R_e \left[e^{K_p \zeta} E_1(K_p \zeta) \right] d\theta d\sigma \sin p\omega t \right. \\
 & \left. + K_p S_{np}(aK_p) e^{K_p(Z+Z'_0)} \left[H_0(K_p r) \sin p\omega t + J_0(K_p r) \cos p\omega t \right] \right]
 \end{aligned}$$

Avec les notations suivantes :

- M' point "source" de coordonnées $x', y', z' = z'_0 + a \cos \omega t$
- M'_1 son symétrique par rapport au plan $z = 0$
- M point de calcul du potentiel, de coordonnées x, y, z
- H_0, J_0 Fonctions de Struve et de Bessel d'ordre 0
- r distance horizontale entre M et M' $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}$
- $\zeta = Z + Z'_0 + a \cos \sigma + i r \cos \theta$
- $C_{np} = I_{n+p} + I_{n-p}$ avec I_k fonction de Bessel modifiée d'ordre n
- $S_{np} = -I_{n+p} + I_{n-p}$
- E_1 fonction exponentielle intégrale
- $K_p = P^2 \omega^2 / g$ nombre d'onde d'ordre p

Ces expressions ont été utilisées pour étudier l'écoulement engendré par une source isolée, de débit pulsant, en mouvement de pilonnement sinusoïdal ([2]). Elles sont adaptées au calcul du potentiel en un point fixe de l'espace, puisque les composantes harmoniques sont formulées explicitement, et permettent en particulier de calculer les composantes du champ de vagues.

La présence des deux intégrales successives est a priori peu favorable du point de vue du temps de calcul numérique, cependant cet inconvénient est marginal lorsqu'on s'intéresse au cas d'une source isolée.

Il en est tout autrement lorsque les fonctions de Green sont utilisées dans la résolution du problème intégral. Nous avons alors affaire à des répartitions de singularités constantes par morceaux sur les facettes de discrétisation de la carène, chacun des coefficients d'influence comporte alors une intégrale supplémentaire sur la surface de la facette "influçante" considérée. De plus, ces coefficients concernent les composantes harmoniques du potentiel, calculé en des points situés eux aussi sur la carène.

Si l'on utilise la méthode qui nous a conduits aux formules (22) pour calculer les composantes harmoniques du potentiel en ces points dont la position est fonction du temps, on verra apparaître une autre intégrale, similaire à l'intégrale portant sur la variable σ des formules (22).

Chacun des coefficients d'influence se présente alors sous la forme de l'intégrale sur la surface d'une facette de discrétisation, d'un terme comportant trois intégrales successives. Les formules obtenues sont alors difficilement exploitables numériquement.

Nous avons donc été amenés à développer de nouvelles expressions des fonctions de Green G_{1n} et G_{2n} qui soient plus adaptées au calcul des coefficients d'influence élémentaires utilisées lors de la résolution du problème intégral discrétisé. En particulier, on exprimera le fait que le point de calcul du potentiel est lui aussi en mouvement ($M(x, y, z = z_0 + a \cos \omega t)$) pour séparer les variables d'espace et de temps.

Ces nouvelles formulations sont données ci-après, les détails de calcul étant reportés en annexe. Soulignons qu'elles ne sont valables que dans le cas où le point "influçé" accompagne la singularité dans son mouvement, au contraire des formules (22) qui sont valides pour un point M quelconque.

$$\begin{aligned}
 G_{1h}(M, M', t) = & \frac{\cos \omega t}{4\pi MM'} + \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l c_{np l} (2a)^l l! \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{z_0^{l+1}} \right] \cos p \omega t \\
 & - \sum_{p=0}^{\infty} \left[R_e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{K_l}{2\pi^2} [c_{nl}(aK_l) c_{lp}(aK_l) e^{K_l \zeta_0} [E_1'(K_l \zeta_0) + i\pi] \right. \right. \\
 (23) \quad & \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nlpk} (aK_l)^k \sum_{ll=1}^{\infty} (-1)^{ll} (ll-1)! (K_l \zeta_0)^{-ll} \right] \right] \cos p \omega t \\
 & + \frac{R_e}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{l=1}^{\infty} \left[K_l c_{nl}(aK_l) S_{lp}(aK_l) e^{K_l \zeta_0} \right] \sin p \omega t
 \end{aligned}$$

G_{2n} s'exprime de façon similaire, à condition d'effectuer les substitutions :

$$(24) \quad \begin{array}{lll} C_{nl} C_{lp} & \longrightarrow & S_{nl} S_{lp} \\ C_{nl} S_{lp} & \longrightarrow & S_{nl} C_{lp} \\ CC_{nlpk} & \longrightarrow & SS_{nlpk} \\ C_{npl} & \longrightarrow & S_{npl} \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos(n\omega t) \longrightarrow \sin(n\omega t) \\ \sin(n\omega t) \longrightarrow -\cos(n\omega t) \end{array} \quad \forall n$$

Les nouvelles notations introduites sont les suivantes :

$$\zeta_0 = z_0 + z'_0 + i((x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta)$$

CC_{nlpk} , SS_{nlpk} , C_{npl} , S_{npl} : coefficients de rang k des séries de Taylor des fonctions C_{nl} , C_{lp} , S_{nl} , S_{lp} , C_{np} , S_{np} , respectivement.

E'_1 : exponentielle intégrale modifiée (voir ([3]))

Les termes G_{1n}^{p*} et G_{1n}^{p**} définis en (20) s'expriment maintenant sous la forme suivante, pour $n \neq 0$

$$(25) \quad \begin{aligned} G_{1n}^{p*} &= \frac{-8np}{4\pi MM'} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l c_{npl} (2a)^l l! \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\zeta_0^{l+1}} \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{K_l}{2\pi^2} C_{nl}(aK_l) C_{lp}(aK_l) e^{K_l \zeta_0} \left[E'_1(K_l \zeta_0) + i\pi \right] \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} CC_{nplk} (aK_l)^k \sum_{ll=1}^{\infty} (-1)^{ll} (ll-1)! (K_l \zeta_0)^{-ll} \right] \\ G_{1n}^{p**} &= \frac{R_e}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{l=1}^{\infty} \left[K_l C_{nl}(aK_l) S_{lp}(aK_l) e^{K_l \zeta_0} \right] \end{aligned}$$

G_{2n}^{p*} et G_{2n}^{p**} s'obtiennent en opérant les substitutions (24), respectivement à partir de $-G_{1n}^{p**}$ et G_{1n}^{p*}

Pour $n = 0$, on a simplement :

$$G_{10}(M, M', t) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \right]$$

et $G_{20}(M, M', t) = 0$

$$\text{soit : } G_{10}^{p*} = \frac{-8op}{4\pi MM'} - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l c_{npl} (2a)^l l! \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\zeta_0^{l+1}}$$

$$(26) \quad G_{10}^{p**} = G_{20}^{p*} = G_{20}^{p**} = 0$$

DISTRIBUTIONS DE SINGULARITES

Les équations intégrales (21) montrent que l'on peut représenter le potentiel $\phi(M,t)$ par des distributions mixtes sources et doublets normaux, d'intensité harmonique en temps, de pulsation $p\omega$, $0 \leq p < \infty$, satisfaisant les relations :

$$(27) \quad \begin{aligned} \sigma_p^*(M') &= -\frac{\partial \phi_p^*}{\partial n'} & \sigma_p^{**}(M') &= -\frac{\partial \phi_p^{**}}{\partial n'} & \text{pour les sources} \\ \mu_p^*(M') &= \phi_p^*(M') & \mu_p^{**}(M') &= \phi_p^{**}(M') & \text{pour les doublets} \\ & & & & \text{normaux} \end{aligned}$$

Le mouvement du corps étant une donnée du problème, la vitesse normale sur la carène est connue, ainsi que les intensités de sources.

Le mouvement est donné par

$$z = z_0 + a \cos \omega t$$

$$\text{et donc } V_X = 0 \quad V_Y = 0 \quad V_Z = -\omega a \sin \omega t = V_Z^{**} \sin \omega t$$

Les intensités de sources seront donc :

$$(28) \quad \begin{aligned} \sigma_p^* &= \sigma_p^{**} = 0 \quad \text{pour } p \neq 1 \\ \sigma_1^* &= 0 \quad ; \quad \sigma_1^{**} = V_Z^{**}(n.Z) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant déduire de (27) le système d'équations intégrales suivant, dont les densités de doublets normaux sont les inconnues.

$$(29) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\mu_n^*(M)}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \iint_{S_0} \left[\mu_p^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{1p}^{n*}(M, M') + \mu_p^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{2p}^{n*}(M, M') \right] dS_{M'} \\ = \iint_{S_0} -\sigma_1^{**}(M') G_{21}^{n*}(M, M') dS_{M'} \\ \frac{\mu_n^{**}(M')}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \iint_S \left[\mu_p^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{1p}^{n**}(M, M') + \mu_p^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} G_{2p}^{n**}(M, M') \right] dS_{M'} \\ = \iint_{S_0} -\sigma_1^{**}(M') G_{21}^{n**}(M, M') dS_{M'} \end{aligned} \right\} 0 \leq n < \infty$$

La trajectoire de la surface $S_C(t)$ étant prise en compte a priori dans l'expression des opérateurs G_{ip} , les intégrales seront en fait effectuées sur les variables (x', y', z'_0) , c'est-à-dire sur la position moyenne S_0 du corps. De même, les opérations de dérivée normale sur la surface ne concerneront que ces variables. Ainsi, la variable temps est totalement éliminée des systèmes d'équations intégrales (29).

calculés. Quant aux seconds, ils décroissent très rapidement en fonction de l (e^{-l^2}), et seul un nombre limité d'entre eux est calculé.

Les coefficients D_{1p}^{n*} , D_{2p}^{n**} , S_{21}^{n*} , S^{n**} sont alors évalués par sommations des séries formulées en (24) et (25), jusqu'à convergence de chacun d'entre eux. Ces séries convergent rapidement, et pour les cas que nous avons abordés, la prise en compte des termes $(\zeta_0)^{-l}$ jusqu'à $l = 10$ et $e^{K_l \zeta_0} E_1(K_l \zeta_0)$ jusqu'à $l = 6$ s'est avérée suffisante.

Le système (30) est alors résolu à l'aide d'une méthode de Gauss, et l'on obtient les composantes harmoniques du potentiel sur la carène

CALCUL DES EFFORTS

La pression au sein du fluide est donnée par l'équation de Bernoulli, p_0 étant la pression atmosphérique.

$$(32) \quad p - p_0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left| \text{grad } \phi \right|^2 + \rho g z$$

La pression dynamique est alors

$$(33) \quad P_d = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left| \text{grad } \phi \right|^2$$

Sur la carène, nous écrirons, si \vec{v} est la vitesse du corps :

$$(34) \quad P_d = -\rho \left[\frac{d\phi}{dt} - \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \phi + \frac{1}{2} \left| \overline{\text{grad}} \phi \right|^2 \right]$$

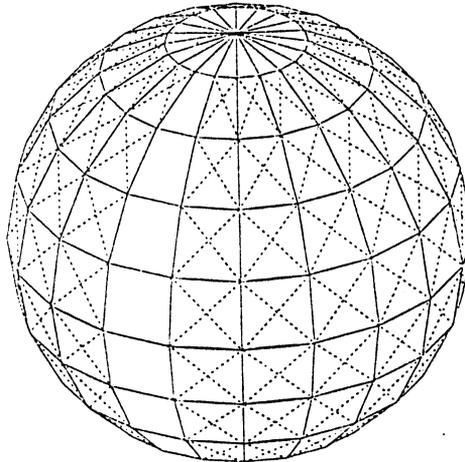
Le premier terme correspond à la pression que l'on obtient dans le cadre d'une théorie linéarisée, où les opérateurs $\partial/\partial t$ et d/dt sont assimilables. Il est directement accessible après résolution du système (30), le potentiel sur la carène étant alors connu. Les autres termes nécessitent un calcul complémentaire pour déterminer la vitesse du fluide sur la carène. Ce calcul est en cours de mise au point, et les résultats que nous présentons ne comportent que le premier terme, intégré sur la carène, qui représente la partie prépondérante des efforts.

MISE EN OEUVRE DES CALCULS - RESULTATS

Dans le cadre restreint de l'étude du pilonnement d'une sphère, le phénomène présente une symétrie de révolution autour d'un axe vertical. Afin de conserver un caractère général à notre méthode, nous n'avons exploité ce fait qu'au stade de la résolution du système linéaire.

La figure 2 représente la discrétisation adoptée pour la sphère, avec au total 200 facettes.

Figure 2



Seules sont conservées les inconnues correspondant à un méridien soit ici 10 facettes, les coefficients élémentaires étant préalablement sommés suivant les parallèles.

Ainsi, le système à résoudre est finalement de dimension $10(2N+1)$, à coefficients réels, où N est le rang de troncature de la série harmonique du potentiel.

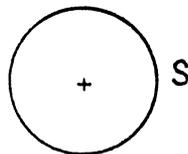
La majeure partie du temps de calcul numérique est consacrée à l'évaluation des coefficients d'influence élémentaires, pour lesquels la symétrie de révolution n'est pas exploitée. Ensuite, pour une fréquence donnée, l'assemblage et la résolution du système représentent un coût de calcul marginal, ce qui permet de faire varier l'amplitude de façon économique. C'est ici qu'apparaît tout l'intérêt de la formulation sous forme de série des fonctions de Green, par rapport aux formules initiales (22). Notons que pour un corps de géométrie quelconque, le système linéaire ne pourrait pas être réduit, et la résolution représenterait une part beaucoup plus importante du temps total de calcul.

RESULTATS

La méthode que nous venons de présenter a été appliquée au cas d'une sphère dont la distance moyenne du centre à la surface libre est égale à 2 rayons.

_____ F

fig. 3



La gamme des nombres d'onde K_1R étudiés varie de 0. à 2., c'est à dire qu'elle englobe la zone dans laquelle nous avons décelé le maximum de composantes sur-harmoniques dans le champ de vagues induit par une source seule en pilonnement ([2]). La figure 4 représente en fonction du nombre d'onde la variation du taux d'énergie propagé par chacune de ces composantes, pour une source dont le débit et le mouvement sont à la même fréquence. En dehors de cette zone, au delà de $K_1R = 2.$, les coefficients hydrodynamiques atteignent rapidement leurs valeurs asymptotiques, ainsi que le montre la figure 5 qui donne les coefficients linéarisés de masse d'eau ajoutée

et d'amortissement en pilonnement. Ceux-ci ont été obtenus à l'aide de notre code de calcul, en donnant une amplitude nulle. Les calculs sont alors absolument identiques à ceux effectués à l'aide du code de tenue à la mer linéarisé décrit en [3]. Ceci peut être aisément vérifié en faisant tendre A vers 0 dans les formules (23) et en ne retenant du système (30) que le sous-système $n=p=1$. Ces résultats linéarisés sont en bon accord avec ceux issus de méthodes différentes, voir par exemple Wang [4].

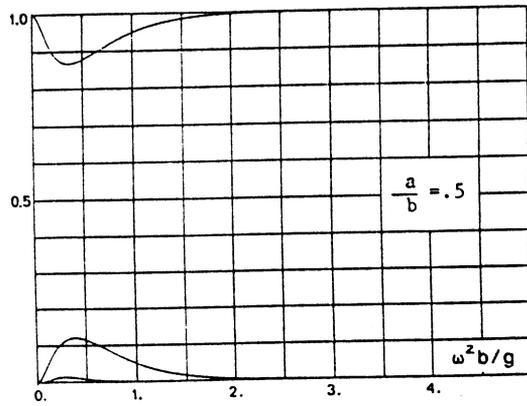
Enfin, nous présentons nos premiers résultats "grands déplacements", pour deux valeurs de l'amplitude réduite: $A/R = 0.50$ et $A/R = 0.30$. La figure 6 donne la variation en fonction du nombre d'onde du module des composantes harmoniques des efforts "linéarisés", c'est à dire issus du terme $d\phi/dt$ de l'équation (34), pour $A/R = 0.50$. Les efforts correspondant à la première harmonique diffèrent peu de ceux issus d'une théorie entièrement linéarisée. Par contre, on voit apparaître des efforts significatifs aux harmoniques 2 et 3. Ceux-ci sont présents sur toute la gamme des nombres d'onde, avec un maximum pour l'harmonique 2 autour de $K_1R = .3$. Le taux d'harmonique 3 varie beaucoup moins. Notons que pour $K_1R = 2.$, les courbes semblent indiquer que l'on atteint la limite en haute fréquence du phénomène ($\phi = 0$ sur SL).

En 7, nous donnons pour cette même amplitude et pour un nombre d'onde $K_1R = 1$, la courbe des efforts verticaux sur la sphère en fonction du temps, reconstitués à partir des coefficients de leur série harmonique. Pour cette valeur particulière des paramètres, nous disposons de résultats obtenus récemment par G.POT [5]. Celui-ci a abordé le problème des grands déplacements d'un corps immergé avec les mêmes hypothèses que les nôtres en ce qui concerne les conditions aux limites sur le corps et sur la surface libre, mais en résolvant un problème aux valeurs initiales à l'aide d'une méthode mixte éléments finis-représentation intégrale. La comparaison porte sur les harmoniques supérieures à 1, la courbe de G.Pot étant obtenue en soustrayant les résultats "instationnaires linéarisés" aux résultats "instationnaires grands déplacements". Bien que les résultats de G.Pot représentant la variation des efforts à partir du repos initial n'aient pas pleinement atteint leur limite périodique, ils se rapprochent progressivement des résultats issus de notre propre méthode, et la comparaison peut être considérée comme satisfaisante. Pour $A/R = 0.3$, les sur-harmoniques sont bien sûr moins importantes, les courbes ayant la même allure générale que pour $A/R = 0.50$. Nous donnons simplement, à la figure 9, l'allure des efforts en fonction du temps, pour $K_1R = 1.0$ (cf fig. 7).

CONCLUSION

Nous avons présentés les premiers résultats issus de notre méthode de calcul de l'écoulement engendré par le mouvement de pilonnement de grande amplitude d'un corps sous la surface libre d'un fluide parfait. Nous avons mis en évidence l'apparition de sur-harmoniques dans les efforts d'origine linéaire (terme $d\phi/dt$), lorsque la condition de glissement est prise en compte sur la position instantanée du corps. Nous avons effectué une comparaison satisfaisante avec les résultats issus d'une théorie instationnaire ([5]). Différents développements du code de calcul sont en cours, en particulier pour le calcul des termes quadratiques dans l'équation de Bernoulli, et le calcul du champ de vagues. Ceci nous permettra d'une part d'affiner le calcul des efforts sur le corps, et d'autre part de déterminer, pour chaque configuration géométrique, la zone du plan amplitude-fréquence dans laquelle l'hypothèse de linéarisation de la surface libre reste valide. Notre méthode étant relativement économique en temps de calcul, nous pourrions nous permettre de tester de nombreuses combinaisons des paramètres.

Figure 4



a: amplitude du pilonnement

b: Immersion moyenne de la source

COEFFICIENTS HYDRODYNAMIQUES
DE MASSE D'EAU AJOUTEE
ET D'AMORTISSEMENT

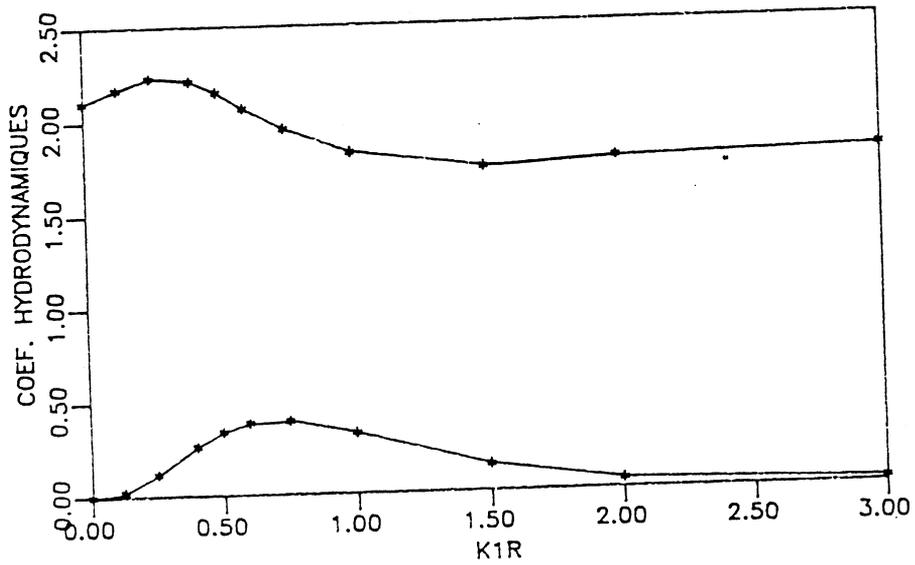
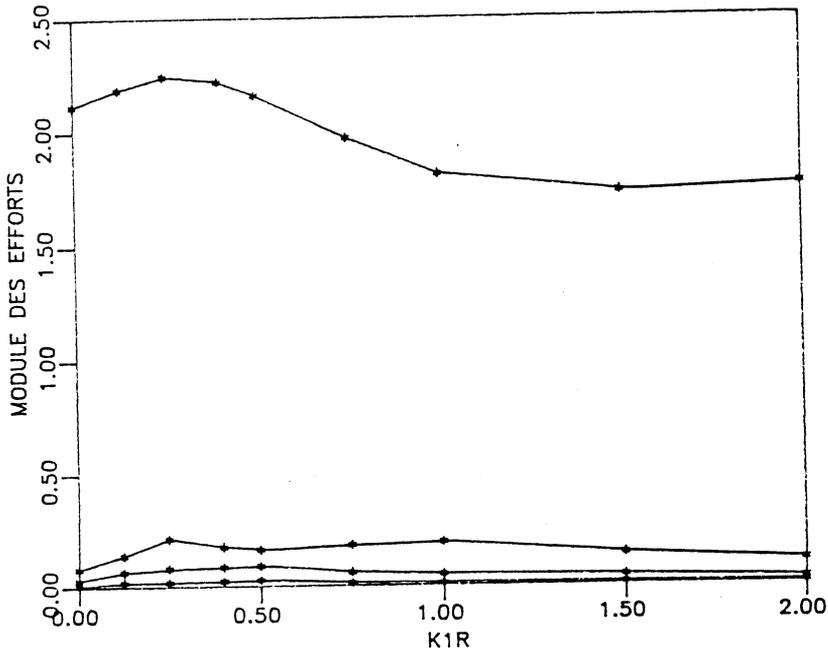


Figure 5

AMPLITUDE $A/R = 0.50$
 IMMERSION MOYENNE $Z_0 = 2R$

Figure 6



SPHERE DE RAYON R
 AMPLITUDE $A/R = 0.50$
 NOMBRE D'ONDE $K1R = 1.00$
 IMMERSION MOYENNE $Z_0 = 2R$

TRAIT INTERROMPU : HARMONIQUE 1
 TRAIT PLEIN : EFFORTS TOTAUX
 ET HARMONIQUES SUPERIEURES

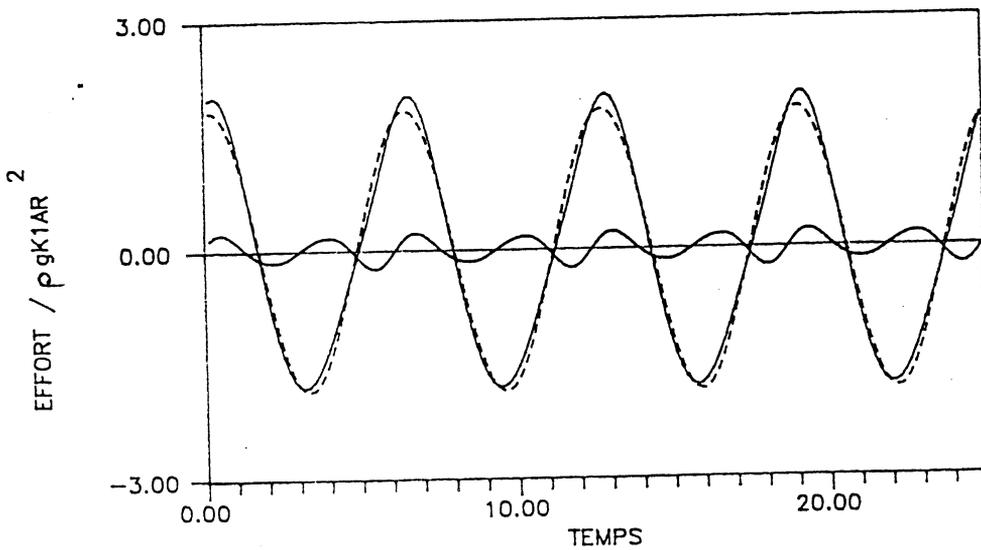
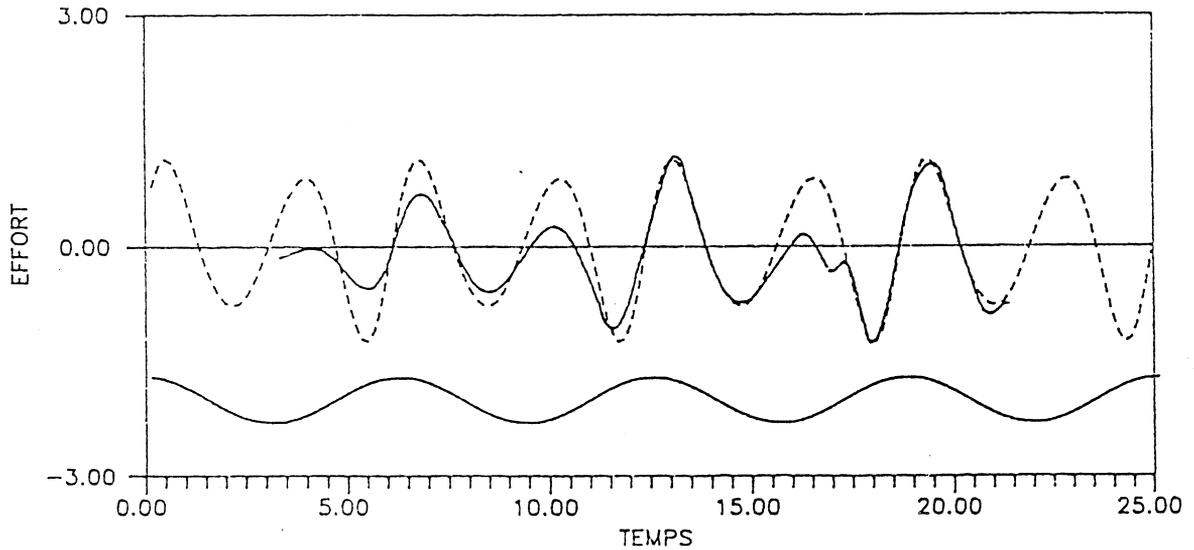


Figure 7

SPHERE DE RAYON R
 AMPLITUDE $A/R = 0.50$
 NOMBRE D'ONDE $K_1 = 1.00$
 IMMERSION MOYENNE $Z_0 = 2R$

TRAIT INTERROMPU : SUR-HARMONIQUES * 5.
 TRAIT PLEIN : RESULTATS G.POT * 5.
 ET RAPPEL DU SIGNAL DEPLACEMENT



Nota : le décalage d'une demi-période est dû
 à une différence de convention sur l'équation du mouvement.

Figure 8

SPHERE DE RAYON R
 AMPLITUDE $A/R = 0.30$
 NOMBRE D'ONDE $K_1 R = 1.00$
 IMMERSION MOYENNE $Z_0 = 2R$

TRAIT INTERROMPU : HARMONIQUE 1
 TRAIT PLEIN : EFFORTS TOTAUX
 ET HARMONIQUES SUPERIEURES

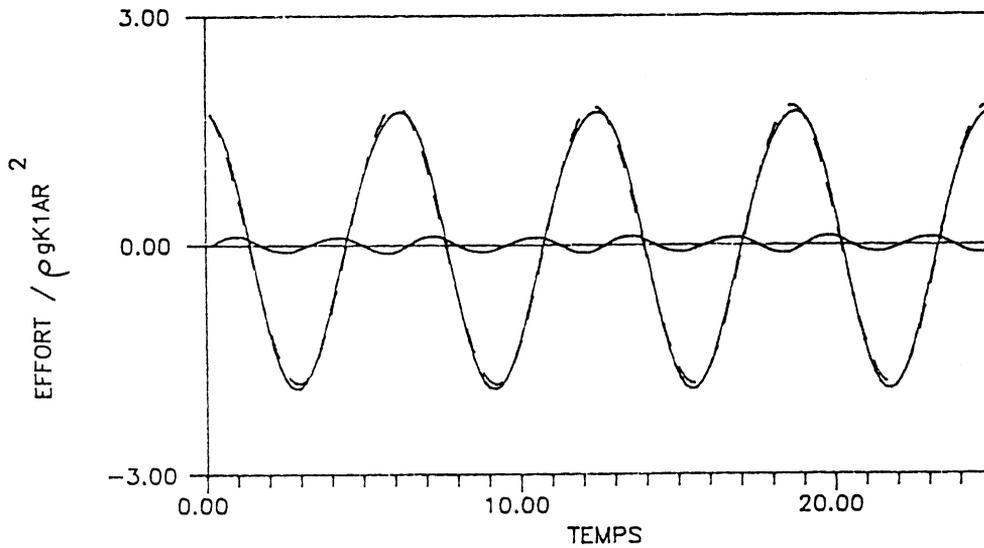


Figure 9

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FERRANT P. : *Corps immergé en mouvement de grande amplitude: Le problème intégral*. Rapport L. H. N. n° 8509. juin 1985.
- [2] CLEMENT A., FERRANT P. (1985): *Free surface potential of a pulsating singularity in harmonic heave motion*. Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics. Washington.
- [3] GUEVEL P., DAUBISSE J.C., DELHOMMEAU G. (1978): *Oscillations des corps flottants soumis aux actions de la houle*. Bulletin de l'ATMA. n° 78.
- [4] WANG S. (1986): *Motions of a spherical submarine in waves*. Ocean Engng. Vol. 13. No 3. pp. 249-271.
- [5] POT G. (1986): *Etude théorique et numérique des mouvements libres de corps flottants ou immergés. Extension au cas des grands mouvements de corps immergés*. Thèse de Docteur-Ingénieur. ENSTA. Palaiseau.
- [6] ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1965): *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications. Neww-York.
- [7] WATSON G.N. (1944): *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2nd edition. Cambridge University Press.