

**QUELQUES REFLEXIONS SUR LA RESOLUTION DU PROBLEME  
DE DIFFRACTION AU DEUXIEME ORDRE**

**Bernard MOLIN**

**Institut Français du Pétrole**

**RESUME**

Le problème considéré ici est celui de la diffraction d'une onde plane régulière par un obstacle fixe (tridimensionnel) de grandes dimensions, et de la détermination des efforts et pressions de deuxième ordre. Après avoir formulé le problème, on étudie le comportement à l'infini du potentiel de diffraction de deuxième ordre. On met en évidence deux composantes: des ondes liées au système d'ondes de premier ordre, et des ondes libres se propageant indépendamment. On en déduit la validation d'une méthode de calcul des efforts globaux de deuxième ordre (faisant intervenir une intégrale sur la surface libre), et on propose une méthode de calcul approché des pressions de deuxième ordre.

**SUMMARY**

In this paper we consider the second-order diffraction problem for a fixed body in a regular wave system. A thorough attention is given to the second-order diffraction potential, and we show that at infinity two components coexist that describe waves locked to the first-order wave system and free waves traveling independently. This allows to validate a method to derive the global second-order loads through an integral over the whole free surface, and to propose an approximate method to calculate the second-order pressures on the body.

## INTRODUCTION

Le problème considéré ici est celui de la diffraction d'une onde plane régulière par un obstacle fixe (tridimensionnel) de grandes dimensions. Ce problème est classiquement résolu par la théorie dite du potentiel linéarisé, qui fournit en première approximation des efforts proportionnels à l'amplitude de la houle incidente et apparaissant à la même pulsation.

Ce premier ordre de résolution est obtenu en introduisant un petit paramètre de perturbation  $\xi$ , assimilé à la cambrure de la houle (les dimensions de l'obstacle étant de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde), et en ne conservant dans les équations du problème que les termes d'ordre 1 en  $\xi$ . Une question légitime qu'il convient de se poser est celle de la validité de cette approximation, et donc de l'importance relative des termes d'ordre supérieur. D'où, dans un passé récent, un nombre important de travaux sur l'ordre suivant d'approximation: le deuxième ordre, qui permet de faire apparaître des efforts proportionnels au carré de l'amplitude de la houle incidente, et prenant place aux pulsations 0 (les efforts de dérive) et  $2\omega$ , où  $\omega$  est la pulsation fondamentale de la houle incidente.

On montre facilement que les efforts de dérive s'obtiennent à partir de la solution au premier ordre. Il n'en va pas de même pour les efforts à la pulsation  $2\omega$ , où apparaît une contribution due au potentiel de diffraction de deuxième ordre. Or celui-ci satisfait un système d'équations aux limites fondamentalement différent de celui vérifié par la composante de premier ordre, en ce que la condition de surface libre est non-homogène. Il s'ensuit que les méthodes classiques de résolution du problème linéarisé ne sont pas directement applicables à celle du problème de deuxième ordre.

Dans cet article on rappelle tout d'abord le problème aux limites satisfait par le potentiel de diffraction de deuxième ordre, puis on montre comment, à l'aide du théorème d'Haskind, on peut obtenir, de façon globale, les efforts de deuxième ordre. L'expression obtenue fait apparaître une intégrale sur le plan de surface libre, dont l'étude de la convergence requiert d'avoir accès au comportement asymptotique du potentiel de diffraction de deuxième ordre. C'est ce problème que l'on aborde dans un deuxième temps et on montre qu'à l'infini coexistent deux types d'ondes: des ondes "liées" au système d'ondes de premier ordre, et des ondes "libres" satisfaisant la condition homogène de surface libre et se propageant indépendamment. On présente alors quelques résultats numériques sur le calcul des efforts de deuxième ordre et on propose une méthode de calcul, au voisinage du corps, du potentiel de diffraction de deuxième ordre.

## EQUATIONS DU PROBLEME

On considère un système d'axes  $Oxyz$  tel que  $Oxy$  coïncide avec la surface libre au repos et que l'axe  $Oz$  soit dirigé vers le haut (fig. 1).  $Oxyz$  est supposé centré sur le corps perturbateur. Le fond est à la cote  $-h$ . On suppose le fluide parfait et l'écoulement irrotationnel, ce qui permet d'introduire un potentiel des vitesses  $\Phi(x,y,z,t)$  harmonique dans le domaine fluide  $\Omega$ .

On suppose la houle incidente régulière, de pulsation  $\omega$ , et d'amplitude (infinitésimale)  $a$ . Elle se propage suivant l'axe  $Ox$ , vers les  $x$  négatifs.

On développe le potentiel  $\Phi$  au deuxième ordre d'un petit paramètre de perturbation  $\varepsilon$ :

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} \quad (2)$$

les termes d'ordre supérieur étant ignorés. On sépare alors dans  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , d'une part potentiel incident et potentiel diffracté, d'autre part variables d'espace et variable de temps:

$$\Phi^{(1)} = \text{Re} \left\{ (\varphi_I^{(1)} + \varphi_D^{(1)}) e^{i\omega t} \right\} \quad (3)$$

$$\Phi^{(2)} = \text{Re} \left\{ (\varphi_I^{(2)} + \varphi_D^{(2)}) e^{2i\omega t} \right\} + \delta_I^{(2)} t + \varphi_0^{(2)} \quad (4)$$

et on écrit les problèmes aux limites satisfaits par  $\varphi_D^{(1)}$  et  $\varphi_D^{(2)}$ :

Premier ordre:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi_D^{(1)} = 0 & P \in \Omega_0 \\ \nabla \varphi_D^{(1)} \cdot \vec{n} = - \nabla \varphi_I^{(1)} \cdot \vec{n} & P \in S_0 \\ g \frac{\partial \varphi_D^{(1)}}{\partial z} - \omega^2 \varphi_D^{(1)} = 0 & z = 0 \\ \frac{\partial \varphi_D^{(1)}}{\partial z} = 0 & z = -h \\ \sqrt{R} \left( \frac{\partial \varphi_D^{(1)}}{\partial R} + ik \varphi_D^{(1)} \right) = 0 & R \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (5)$$

Deuxième ordre:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi_D^{(2)} = 0 & P \in \Omega_0 \\ \nabla \varphi_D^{(2)} \cdot \vec{n} = - \nabla \varphi_I^{(2)} \cdot \vec{n} & P \in S_0 \\ g \frac{\partial \varphi_D^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_D^{(2)} = -g \frac{\partial \varphi_I^{(2)}}{\partial z} + 4\omega^2 \varphi_I^{(2)} & z = 0 \\ \quad + \frac{i\omega}{2g} \varphi_I^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \varphi_I^{(1)}}{\partial z} - \omega^2 \varphi_I^{(1)} \right) - i\omega \nabla \varphi_I^{(1)2} & \\ \frac{\partial \varphi_D^{(2)}}{\partial z} = 0 & z = -h \\ \text{Rad} (\varphi_D^{(2)}) & R \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (6)$$

 $\Omega_0$ : domaine fluide au repos $S_0$ : surface mouillée du corps au repos $\vec{n}$ : normale intérieure au corpsLes composantes  $\varphi_I^{(1)}$  et  $\varphi_I^{(2)}$  du potentiel incident étant:

$$\varphi_I^{(1)} = i \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} e^{ikx} \quad (7)$$

$$\varphi_I^{(2)} = \frac{3i}{8} a^2 \omega \frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} e^{2i k z} \quad (8)$$

avec  $\omega^2 = g k \tanh kh$  (9)

Au premier ordre on a écrit la condition de radiation sous la forme classique de l'équation de Sommerfeld. On ne s'est par contre pas aventuré à la spécifier au deuxième ordre. En dehors de ce point la seule différence entre les deux systèmes d'équations consiste en la condition non homogène de surface libre qui apparaît au deuxième ordre.

Appliquant la relation de Bernoulli on peut exprimer les efforts hydrodynamiques de premier et deuxième ordres. Ces derniers se scindent en deux composantes aux pulsations 0 et  $2\omega$ :

$$\vec{F}^{(2)} = \vec{f}_0^{(2)} + \operatorname{Re} \left\{ \vec{f}^{(2)} e^{2i\omega t} \right\} \quad (10)$$

où: 
$$\vec{f}_0^{(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_{c_0}} -\rho \frac{\nabla \varphi^{(1)} \nabla \varphi^{(1)*}}{4} \vec{n} dS + \int_{\Gamma_0} \rho \frac{\omega^2}{4g} \varphi^{(1)} \varphi^{(1)*} \vec{n} d\Gamma \right\} \quad (11)$$

$$\vec{f}^{(2)} = - \iint_{S_{c_0}} \rho \left( \frac{\nabla \varphi^{(1)2}}{4} + 2i\omega \varphi^{(2)} \right) \vec{n} dS - \int_{\Gamma_0} \rho \frac{\omega^2}{4g} \varphi^{(1)2} \vec{n} d\Gamma \quad (12)$$

$\Gamma_0$  étant la ligne de flottaison au repos.

On note que les efforts de dérive  $\vec{f}_D^{(2)}$  ne dépendent que du potentiel linéarisé global  $\Psi'' = \Psi''_I + \Psi''_D$  de l'écoulement, alors que la composante fluctuante fait apparaître le terme:

$$\vec{f}_D^{(2)} = -2i\omega\rho \iint_{S_{C_0}} \Psi_D^{(2)} \vec{n} dS \quad (13)$$

qui requiert apparemment la connaissance du potentiel diffracté  $\Psi_D^{(2)}$  sur la carène.

### CALCUL DES EFFORTS GLOBAUX

Si on ne s'intéresse qu'aux efforts globaux, il est cependant possible d'obtenir  $\vec{f}_D^{(2)}$  sans avoir à résoudre le problème de diffraction de deuxième ordre. Considérant par exemple la composante suivant  $x$  de  $\vec{f}_D^{(2)}$ :

$$f_{Dx}^{(2)} = -2i\omega\rho \iint_{S_{C_0}} \Psi_D^{(2)} n_x dS$$

on introduit le potentiel (linéarisé) de radiation en cavement  $\Psi$  à la pulsation  $2\omega$ , qui vérifie le système d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \Psi = 0 & P \in \Omega_0 \\ \nabla \Psi \cdot \vec{n} = n_x & P \in S_{C_0} \\ g \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 4\omega^2 \Psi = 0 & z = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 & z = -h \\ \sqrt{R} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial R} + ik_2 \Psi \right) = 0 & R \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (14)$$

où  $k_2$  est le nombre d'onde associé à la pulsation  $2\omega$ :

$$4\omega^2 = g k_2 \tanh k_2 h \quad (15)$$

L'application de la deuxième formule de Green permet alors d'exprimer  $f_D^{(2)}$  sous la forme:

$$f_{Dxc}^{(2)} = -2i\omega\rho \left[ \iint_{S_\infty} \psi \alpha_c^{(2)} dS + \iint_{z=0/S_\infty} \psi \frac{\alpha_L^{(2)}}{g} dS + \iint_{S_\infty} \left( \psi \frac{\partial \psi_D^{(2)}}{\partial R} - \psi_D^{(2)} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) dS \right] \quad (16)$$

où  $S_\infty$  est un cylindre d'axe vertical entourant le corps et  $z=0/S_\infty$  la portion du plan de surface libre situé à l'intérieur. Dans cette relation  $\alpha_c^{(2)}$  et  $\alpha_L^{(2)}$  désignent respectivement les deuxièmes membres des équations 6-b et 6-c, qui sont connus (une fois résolu le problème de diffraction au premier ordre).

Il reste néanmoins à montrer que l'intégrale sur  $S_\infty$  tend vers zéro lorsqu'on fait tendre son rayon vers l'infini. Ce point n'est pas trivial et nécessite d'établir le comportement asymptotique de  $\psi_D^{(2)}$  aux grandes distances radiales. C'est ce problème que l'on aborde au paragraphe suivant.

#### COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL DE DIFFRACTION DE DEUXIEME ORDRE

On commence par étudier le comportement asymptotique du deuxième membre de l'équation de surface libre (6-c):

$$\alpha_L^{(2)} = \frac{i\omega}{2g} \left[ \psi_I^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \psi_D^{(1)}}{\partial z} - \omega^2 \psi_D^{(1)} \right) + \psi_D^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \psi_I^{(1)}}{\partial z} - \omega^2 \psi_I^{(1)} \right) + \psi_D^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \psi_D^{(1)}}{\partial z} - \omega^2 \psi_D^{(1)} \right) \right] - 2i\omega \psi_I^{(1)} \psi_D^{(1)} - i\omega \psi_D^{(1)2} \Big|_{z=0} \quad (17)$$

En coordonnées cylindriques le potentiel incident s'écrit:

$$\varphi_I^{(1)} = i \frac{ag}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikR \cos \theta} \quad (18)$$

et le potentiel de diffraction  $\varphi_D^{(1)}$  se comporte asymptotiquement comme:

$$\varphi_D^{(1)} = \frac{ia g}{\omega} \frac{H(0)}{\sqrt{kR}} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{-ikR} \quad (19)$$

Il est alors aisé de déduire que  $\alpha_L^{(2)}$  se comporte comme:

$$\alpha_L^{(2)} = \frac{f_{L1}(0)}{\sqrt{kR}} e^{-ikR(1-\cos \theta)} + \frac{f_{L2}(0)}{kR} e^{-2ikR} + O(R^{-3/2}) \quad (20)$$

aux grandes valeurs de la distance radiale  $R$ .

Il apparaît donc que la décroissance de  $\alpha_L^{(2)}$  avec la distance radiale est relativement lente puisque le terme dominant est d'ordre  $R^{-1/2}$ .

Wehausen /1/ (p. 593-594) considère le cas de vagues engendrées par des fluctuations de pression sur la surface libre, et montre que si la distribution de pression  $p(R, \theta)$  est absolument intégrable, le potentiel à l'infini du champ de vagues rayonnées est du type:

$$\varphi_{DF}^{(2)} = \frac{gF(0)}{\sqrt{k_2 R}} \frac{\operatorname{ch} k_2(z+h)}{\operatorname{ch} k_2 h} e^{-ik_2 R} \quad (21)$$

(la pression de surface fluctuant à la pulsation  $2\omega$ ).

Notre problème est similaire, à la différence importante près que  $\alpha_L^{(2)}$  est loin d'être absolument intégrable sur la surface libre.



L' hypothèse faite par Wehausen est en fait fort restrictive et il suffit que  $p(R, \theta)$  soit intégrable. Il est alors naturel de rechercher  $\varphi_D^{(2)}$  sous la forme d'une somme de deux potentiels:

$$\varphi_D^{(2)} = \varphi_{DF}^{(2)} + \varphi_{DL}^{(2)} \quad (22)$$

où  $\varphi_{DL}^{(2)}$  satisfait asymptotiquement la condition non homogène de surface libre aux grandes distances radiales, de telle façon que le deuxième membre de la condition de surface libre associée à  $\varphi_{DF}^{(2)}$  soit intégrable, et permette d'appliquer le résultat de Wehausen.

On obtient /2/ que  $\varphi_{DL}^{(2)}$  est de la forme:

$$\begin{aligned} \varphi_{DL}^{(2)} = & \frac{g_{L1}(\theta)}{\sqrt{kR}} \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{2-2\cos\theta}(z+h)}{\operatorname{ch} k\sqrt{2-2\cos\theta}h} e^{-ikR(1-\cos\theta)} \\ & + \frac{g_{L2}(\theta)}{kR} \frac{\operatorname{ch} 2k(z+h)}{\operatorname{ch} 2kh} e^{-2ikR} + O(R^{-3/2}) \end{aligned} \quad (23)$$

Le potentiel  $\varphi_{DL}^{(2)}$  décrit des ondes "liées" au système d'ondes de premier ordre, alors qu'au contraire  $\varphi_{DF}^{(2)}$  décrit des ondes "libres" de nombre d'onde  $k^2$  tiré de la relation de dispersion de la théorie linéaire (15). Il est remarquable qu'au premier ordre d'approximation  $\varphi_{DL}^{(2)}$  et  $\varphi_{DF}^{(2)}$  soient tout deux d'ordre  $R^{-1/2}$ .

On n'a, dans les développements précédents, explicité ni  $f_{L1}(\theta)$  ni  $f_{L2}(\theta)$ , d'où sont déduits  $g_{L1}(\theta)$  et  $g_{L2}(\theta)$ . Il est néanmoins d'intérêt d'expliciter ces quantités si l'on veut par exemple mettre en oeuvre une méthode de résolution du potentiel de diffraction  $\varphi_D^{(2)}$ . On va montrer maintenant que l'approximation de l'onde plane équivalente permet d'y avoir

aisément accès, et aussi d'atteindre une meilleure compréhension des phénomènes. Un préalable est de déterminer le potentiel de deuxième ordre associé à la superposition de deux ondes planes, de même pulsation, mais se propageant dans des directions différentes.

#### POTENTIEL DE DEUXIEME ORDRE ASSOCIE A LA SUPERPOSITION DE DEUX ONDES PLANES DE DIRECTIONS DIFFERENTES

On considère donc deux ondes planes, l'une se propageant suivant l'axe Ox (toujours vers les x négatifs), et la seconde de vecteur d'onde ( $k \cos \theta$ ,  $k \sin \theta$ ). Au premier ordre d'approximation le potentiel s'écrit:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & i \frac{a_1 g}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikx} \\ & + i \frac{a_2 g}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned} \quad (24)$$

Le calcul du potentiel de deuxième ordre associé est fastidieux mais direct. On obtient trois composantes qui décrivent trois ondes se propageant dans des directions différentes

Les deux premières résultent de l'interaction de chaque onde plane avec elle-même, et ont pour potentiel:

$$\varphi_{11}^{(2)} = \frac{3i}{8} a_1^2 \omega \frac{\operatorname{ch} 2k(z+h)}{\operatorname{sh}^4 kh} e^{2ikx} \quad (25)$$

$$\varphi_{22}^{(2)} = \frac{3i}{8} a_2^2 \omega \frac{\operatorname{ch} 2k(z+h)}{\operatorname{sh}^4 kh} e^{-2ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (26)$$

La troisième onde résulte de l'interaction croisée des deux ondes planes et se propage dans la direction médiane. Elle admet pour potentiel:

$$\varphi_{12}^{(2)} = i a_1 a_2 \frac{g^2 k^2}{\omega} \frac{(2 \cos \theta + 3 \operatorname{th}^2 kh - 1) \operatorname{ch} k \sqrt{2-2 \cos \theta} (z+h)}{g k \sqrt{2-2 \cos \theta} \operatorname{sh} k \sqrt{2-2 \cos \theta} h - 4 \omega^2 \operatorname{ch} k \sqrt{2-2 \cos \theta} h} e^{i k x (1 - \cos \theta) - i k y \sin \theta} \quad (27)$$

Le cas particulier  $\theta=0$  conduit à la disparition des variables d'espace. On retrouve là un résultat bien connu dans le cas de la houle stationnaire, où l'on observe une pression dynamique de deuxième ordre indépendante de la profondeur.

#### APPLICATION AU PROBLEME CONSIDERE

Aux grandes distances radiales l'onde diffractée par l'obstacle peut être considérée comme une onde plane se propageant dans la direction radiale. On a donc, localement, un système d'ondes composé de la superposition de deux ondes planes: la houle incidente, et l'onde de diffraction, d'amplitude:

$$a_2 = a \frac{H(\theta)}{\sqrt{k R}} \quad (28)$$

On peut alors appliquer le résultat précédent, et on obtient donc que le système de deuxième ordre associé consiste

- du potentiel de deuxième ordre associé à la houle incidente (25)
- de son équivalent associé à l'onde de diffraction (26)

- du potentiel croisé (27) qui décrit une onde se propageant dans la direction médiane et dont l'amplitude est d'ordre  $R^{-1/2}$ .

On retrouve donc bien le système d'ondes liées décrit par les équations (8) et (23).

### APPLICATION AU CALCUL DES EFFORTS GLOBAUX

On est maintenant en mesure d'étudier la convergence de l'intégrale sur  $S_\infty$  apparaissant dans (16). L'application du théorème de la phase stationnaire permet de montrer qu'elle tend effectivement vers zéro lorsque  $S_\infty$  s'éloigne à l'infini. Malheureusement sa décroissance est lente, les termes dominants étant du type :

$$I_{S_\infty} = \frac{A}{\sqrt{k R_\infty}} e^{-i k_2 R_\infty} + \frac{B}{\sqrt{k R_\infty}} e^{-i(k_2 + 2k) R_\infty} \quad (29)$$

et on retrouve donc des fluctuations opposées dans l'intégrale de surface libre. Pratiquement le premier terme est dominant (on montre aisément que  $B$  est nul en profondeur infinie) et on peut donc se servir du fait que la périodicité des oscillations de l'intégrale de surface libre est connue pour les filtrer et accélérer la convergence numérique.

Dans /2/ et /3/ sont présentées des applications au cas du cylindre posé sur le fond (pour lequel la solution est quasi analytique), et au cas général d'un corps de révolution. Dans ce dernier cas la solution est purement numérique, et elle est obtenue à partir du code COREV de l'IFP /4/. On reproduit sur les figures 2, 3, 4, et 5 quelques résultats. Un phénomène intéressant est qu'à nombre d'onde adimensionnel  $kR_0$  donné ( $R_0$  étant le rayon

du cylindre), la composante aux efforts de deuxième ordre due au potentiel  $\varphi_D^{(2)}$  n'atteint pas une valeur limite lorsque la profondeur devient "infinie" au sens de la théorie linéarisée, mais continue à croître. Ce caractère est manifestement lié à l'effet de houle stationnaire qui prend place du côté de l'obstacle exposé à la houle incidente.

#### UNE METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME DE DIFFRACTION DE DEUXIEME ORDRE

Il est d'intérêt, pour certaines applications (vibrations des coques par exemple), d'avoir accès aux pressions de deuxième ordre sur la carène. Ceci suppose donc la résolution du problème aux limites satisfait par le potentiel de diffraction de deuxième ordre  $\varphi_D^{(2)}$  (6).

On a vu qu'asymptotiquement ce potentiel se scinde en deux composantes: un potentiel  $\varphi_{DF}^{(2)}$  d'ondes libres, c'est à dire satisfaisant la condition homogène de surface libre, et un potentiel  $\varphi_{DL}^{(2)}$  d'ondes liées, dont on connaît l'expression analytique (23). En toute rigueur cette décomposition n'est correcte qu'à une distance infinie du corps, mais on peut espérer obtenir une solution approchée du problème en l'imposant à une distance finie.

On divise donc le domaine fluide en deux sous-domaines,  $\Omega_i$  et  $\Omega_e$ , à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre de raccordement  $S_r$ .

Dans le domaine extérieur on écrit le potentiel  $\varphi_D^{(2)}$  sous la forme:

$$\varphi_D^{(2)} = \varphi_{DL}^{(2)} + \varphi_{DF}^{(2)} \quad (30)$$

où  $\varphi_{DL}^{(2)}$  est connu, à partir de (28), (26), et (27).  $\varphi_{DF}^{(2)}$  est indéterminé mais satisfait la condition homogène de surface libre et peut donc se construire,

par exemple sur une base de fonctions propres, ou à partir de singularités de Green distribuées sur  $S_r$ .

On formule alors un problème intérieur en  $\varphi_D^{(2)}$  qui s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi_D^{(2)} = 0 & P \in \Omega_i \\ \nabla \varphi_D^{(2)} \cdot \vec{n} = -\nabla \varphi_I^{(2)} \cdot \vec{n} & P \in S_{co} \\ g \frac{\partial \varphi_D^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_D^{(2)} = \alpha_L & z = 0 \\ \frac{\partial \varphi_D^{(2)}}{\partial z} = 0 & z = -h \end{array} \right. \quad (31)$$

auquel on adjoint les conditions de raccordement sur  $S_r$ :

$$\begin{aligned} \varphi_D^{(2)} &= \varphi_{DL}^{(2)} + \varphi_{DF}^{(2)} \\ \frac{\partial \varphi_D^{(2)}}{\partial R} &= \frac{\partial \varphi_{DL}^{(2)}}{\partial R} + \frac{\partial \varphi_{DF}^{(2)}}{\partial R} \end{aligned} \quad (32)$$

Plusieurs techniques de résolution du problème intérieur (éléments finis, singularités de Rankine sur le contour) et de raccordement sont applicables. On peut par exemple s'inspirer de la méthode de Yeung /5/, ou de celle de Chenot /4/, ou de celles en vigueur au GHN.

Une inquiétude que l'on peut légitimement avoir a trait à la distance à laquelle situer le cylindre de raccordement  $S_r$ . Trop près la décomposition (30) est manifestement incorrecte, trop loin le problème intérieur risque d'être d'une taille exagérée.

On peut s'en faire une idée en considérant le cas simple du cylindre en profondeur infinie, et en comparant le calcul exact du deuxième membre de l'équation de surface libre au calcul approché obtenu à partir de (28) et (27).

En coordonnées cylindriques potentiel incident et potentiel diffracté (au premier ordre) s'expriment par:

$$\varphi_I^{(1)} = i \frac{ag}{\omega} e^{kz} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kR) \cos m\theta \quad (33)$$

avec  $\varepsilon_0 = 1$   $\varepsilon_m (m \neq 0) = 2$

$$\varphi_D^{(1)} = i \frac{ag}{\omega} e^{kz} \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_m i^m \frac{J'_m(kR_0)}{H'_m(kR_0)} H_m(kR) \cos m\theta \quad (34)$$

avec  $H_m = J_m - iY_m$ ,  $R_0$  étant le rayon du cylindre.

A grande distance radiale l'onde plane équivalente au potentiel diffracté est:

$$\varphi_D^{(1)} = i \frac{ag}{\omega} \frac{H(\theta)}{\sqrt{kR}} e^{kz} e^{-ikR} \quad (35)$$

où

$$H(\theta) = \frac{1+i}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^{m+1} \frac{J'_m(kR_0)}{H'_m(kR_0)} \cos m\theta \quad (36)$$

En profondeur infinie le deuxième membre de l'équation de surface libre se réduit à:

$$\alpha_L^{(2)} = -2i\omega \nabla \varphi_I^{(1)} \nabla \varphi_D^{(1)} - i\omega \nabla \varphi_D^{(1)2} \Big|_{z=0} \quad (37)$$

Son calcul exact s'opère aisément à partir de (33) et (34).  
L'expression approchée déduite de l'hypothèse d'onde plane équivalente donne:

$$\tilde{\alpha}_L^{(2)} = 2 i a^2 \omega^3 (1 + \cos \theta) e^{-ikR(1 - \cos \theta)} \frac{H(\theta)}{\sqrt{kR}} \quad (38)$$

Les figures 6, 7, et 8 présentent les valeurs comparées de  $\|\alpha_L^{(2)}\|$  et  $\|\tilde{\alpha}_L^{(2)}\|$  pour différentes valeurs du rayon adimensionnel  $kR_0$  et de l'angle polaire  $\theta$ , en fonction de la distance radiale  $kR$ . On note que les valeurs obtenues deviennent très voisines dès lors que  $kR$  est supérieur à 10, soit donc que l'on se trouve à une distance du cylindre de l'ordre de 1.5 à 2 longueurs d'onde.

Il semble donc que la méthode proposée ici soit applicable, le cylindre de raccordement étant placé à une ou deux longueurs d'onde de l'obstacle. On pourrait dans un premier temps aborder la résolution numérique dans le cas particulier du cylindre, puis dans celui d'un corps de révolution.

## REMERCIEMENTS

Cet article est tiré, en partie, d'une étude /2/ réalisée dans le cadre d'un cofinancement IFP-DRET. Cette dernière est remerciée pour son soutien.



## REFERENCES

- /1/ J. WEHAUSEN: "Surface waves", Handbuch der Physik, IX, 1960.
- /2/ B. MOLIN et A. MARION: "Etude au deuxième ordre du comportement des corps flottants en houle régulière", rapport IFP n° 33031, 1985.
- /3/ B. MOLIN et A. MARION: "Second-order loads and motions for floating bodies in regular waves", OMAE Tokyo, 1986.
- /4/ J.L. CHENOT: "Méthode numérique de calcul du mouvement d'un corps flottant", revue de l'IFP, vol. XXX-5, 1975.
- /5/ R. YEUNG: "A singularity-distribution method for free-surface flow problems with an oscillating body", Ph. D. dissertation, U. C. Berkeley, 1973.

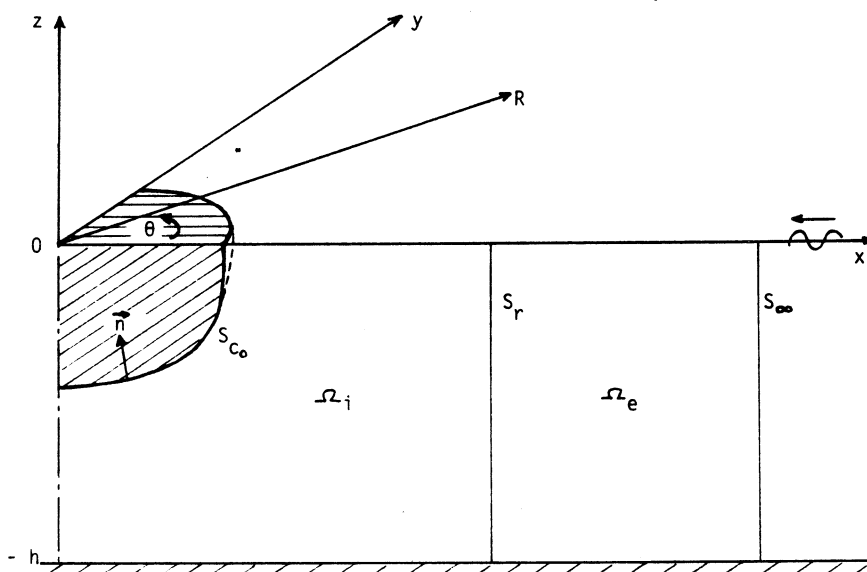


Fig. 1

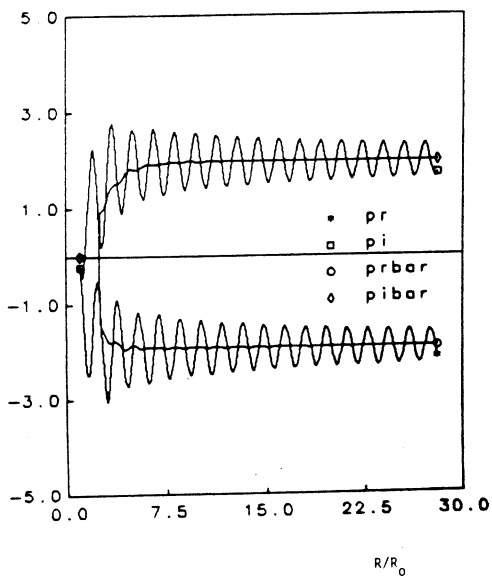


Fig. 2 : Convergence de l'intégrale de surface libre, avec et sans filtrage  
( $h/R_0 = 3$  ;  $KR_0 = 11$ ).

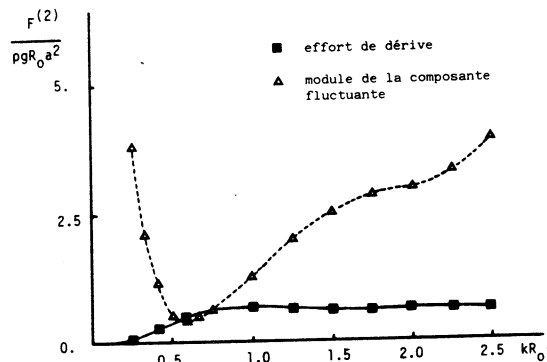


Fig. 3 : Efforts de deuxième ordre sur un cylindre ( $h/R_0 = 3$ ).

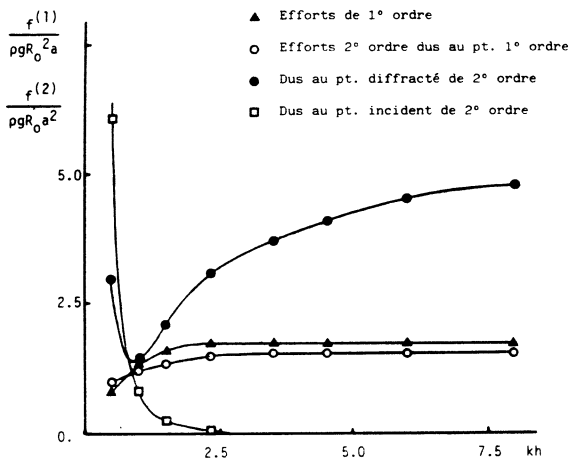


Fig. 4 : Variations des efforts de 1° et 2° ordres avec la profondeur ( $KR_0 = 2$ ).

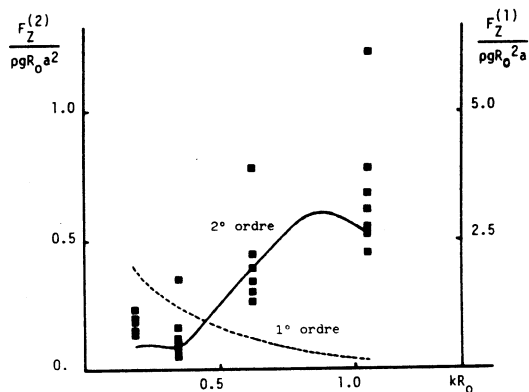


Fig. 5 : Efforts verticaux sur une bouée. Comparaison avec les résultats expérimentaux (■).

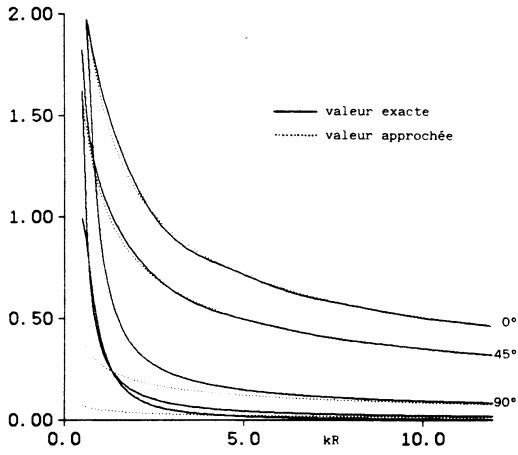


Fig. 6 : Valeur exacte et valeur approchée du 2<sup>e</sup> membre de la condition de surface libre ( $kR_0 = 0.5$ ).

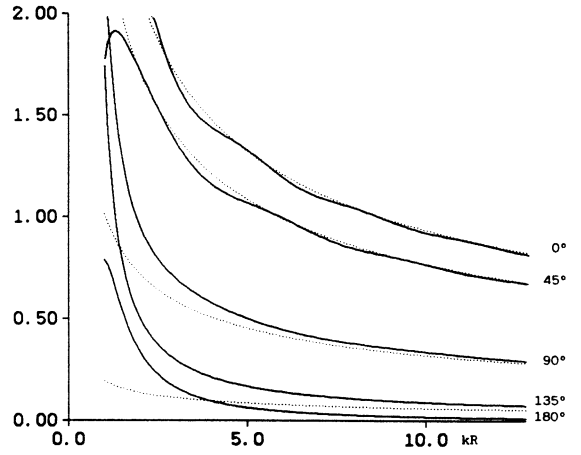


Fig. 7 : Valeur exacte et valeur approchée du 2<sup>e</sup> membre de la condition de surface libre ( $kR_0 = 1$ ).

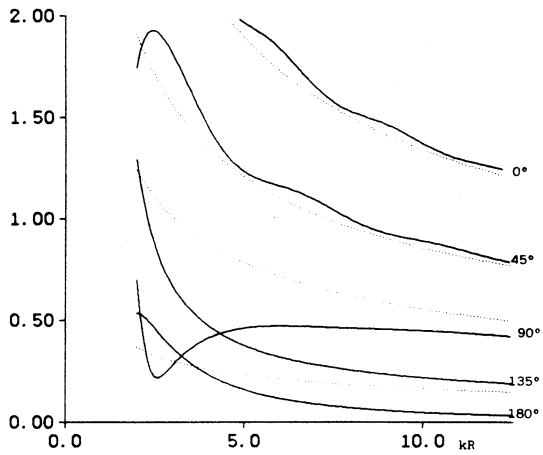


Fig. 8 : Valeur exacte et valeur approchée du 2<sup>e</sup> membre de la condition de surface libre ( $kR_0 = 2$ ).

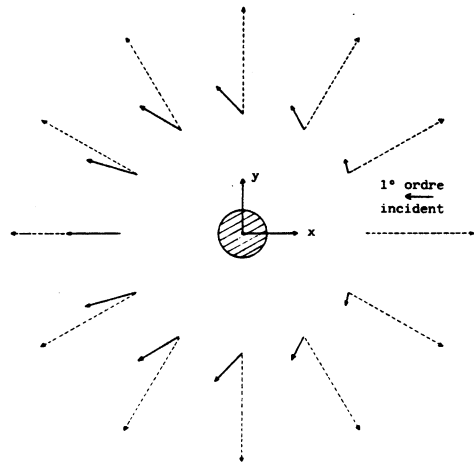


Fig. 9 : Représentation du champ de vagues lointain du potentiel de diffraction du 2<sup>e</sup> ordre

—> vecteurs d'onde des ondes liées  
 - - -> vecteurs d'onde des ondes libres