1ères JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

16 au 18 Février 1987 - Nantes

LA TENUE A LA MER DES NAVIRES ELANCES EST-ELLE UNE AFFAIRE D'ECHELLES MULTIPLES?

G. FERNANDEZ[1], A. JAMI[2].

[1]DRET/SDR/G.6.3.
[2]ENSTA/CNRS - LME/GHN (Groupe associé au CNRS et à l'UPMC)

RESUME

On examine le problème linéarisé de la tenue à la mer des navires élancés. On montre que la méthodes des échelles multiples fournit un cadre asymptotique cohérent pour justifier la méthode des tranches.

L'examen du cas particulier des carènes à pente faible permet d'établir la méthode des tranches classique, sans interactions entre tranches.

La résolution du cas général indique que la prise en compte des interactions entre tranches se traduit par une convolution longitudinale entre les solutions bidimensionnelles de tranches et un noyau oscillant représentant les ondes tridimensionnelles engendrées par chaque tranche, sans équation intégrale supplémentaire à résoudre.

SUMMARY

The linearised problem of slender ships motions is considered. The multiple scales method is shown to provide a consistent perturbation procedure for deriving the strip method.

The special case of hulls with small longitudinal slopes leads to the classical strip theory, without strips mutual influence.

In the general case, strips interference is accounted for by means of a convolution between the local two-dimensional strips solutions and an oscillating kernel associated to the three-dimensional waves generated by each strip, without any complementary integral equation to be solved.

1. INTRODUCTION.

La complexité du problème du calcul des mouvements sur houle d'un navire, à vitesse d'avance non négligeable, est à l'origine du succés des méthodes de calcul approché qu'on peut englober sous la dénomination de "méthodes des tranches". Ces méthodes ont en commun l'hypothèse d'élancement du navire, auquel on associe le petit paramètre principal du problème. Les méthodes des tranches doivent beaucoup aux intuitions de Korvin-Kroukovski((1)). Mais la première tentative pour justifier rigoureusement cette approche est due à Ogilvie et Tuck ((2)) qui ont invoqué la méthode des développements asymptotiques raccordés pour traiter le problème des mouvements forcés de tangage et de pilonnement. Dans le même esprit, Faltinsen ((3)) s'est attaqué au problème de la houle diffractée. Ces tentatives sont d'ailleurs restées isolées, bien qu'aient été présentées d'autres variantes de la méthode dont la plus célèbre est celle de Salvesen, Tuck et Faltinsen ((4)). Toutes ces variantes utilisent l'hypothèse que la fréquence du mouvement (fréquence de rencontre) est grande et elles donnent des résultats peu satisfaisants à fréquence moyenne. Récemment, Newman et Sclavounos ((5)) ont développé une nouvelle variante, dite "théorie unifiée", valable sur toute la gamme de fréquences, depuis les basses valeurs, antérieurement couvertes par la théorie ordinaire des corps élancés, jusqu'aux hautes fréquences du domaine de la méthode des tranches "classique". Le trait caractéristique de la théorie unifiée, qui fait son efficacité, est la prise en compte des interactions entre tranches. Ceci se paie d'ailleurs par la résolution d'une équation intégrale supplémentaire sur la longueur du navire.

Le but de cette communication est de proposer un cadre théorique nouveau qui doit permettre une approche asymptotique cohérente. Elle commence par une critique théorique succincte des théories antérieures puis expose le principe de l'approche proposée en se laissant guider par la démarche mise au point en acoustique sur un problème analogue ((6)).

2. RAPPELS ET COMMENTAIRES SUR LES METHODES DES TRANCHES.

Toute l'originalité et la difficulté du problème de la tenue à la mer tiennent à la présence de la surface libre. Aussi, pour discuter la méthode des tranches, il est particulièrement instructif d'examiner la condition de surface libre pour le potentiel Φ de l'écoulement. Dans un repère $Oxyz$ avançant à vitesse uniforme U avec le navire et tel que Oxy est le plan moyen de la surface libre, O est au milieu du navire, Ox vers l'avant, Oy vers tribord, Oz vers le bas, voir figure 1, en supposant une dépendance temporelle en $e^{i\omega t}$ de Φ , la condition de surface libre prend la forme linéarisée bien connue:

$$\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi - g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

où ω est la pulsation de rencontre et g l'accélération de la pesanteur. Dans cette équation, comme cela est couramment pratiqué, on a négligé les termes d'interaction entre Φ et le potentiel de perturbation stationnaire moyen. Pour le but qu'on poursuit dans ce paragraphe, cela n'aura pas de conséquence. En réalité, pour effectuer un raisonnement complètement rigoureux, il faudrait utiliser la forme non linéaire exacte des conditions de surface libre. On se contentera ici d'utiliser l'équation (1), tout en sachant que certaines des dégénérescences qu'on obtiendra ne correspondront à aucune réalité physique. Comme on ne s'intéresse pas ici aux phénomènes fortement non linéaires se produisant à très grande vitesse, on prendra cette liberté.

Dans ce paragraphe, l'équation (1) sera donc notre "équation complète" dimensionnelle. Pour la discuter utilement du point de vue asymptotique, il est indispensable de la mettre sous forme adimensionnelle. Dans un premier temps, on réfère les coordonnées à la longueur L du navire et le potentiel à UL :

$$x = L\bar{x} \quad , \quad z = L\bar{z} \quad , \quad \Phi = UL\bar{\Phi}$$

Dans l'optique de la méthode des développements asymptotiques raccordés, ces variables sont aptes à décrire le domaine extérieur de l'écoulement. L'équation (1) prend alors la forme <u>complète adimensionnelle extérieure:</u>

$$\left(i\frac{\tau}{F_L} + F_L\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\right)^2\bar{\Phi} - \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}} = 0 \qquad (2)$$

où l'on a classiquement posé:

$$\tau = \frac{\omega U}{g} \quad , \quad F_L = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

On sait que le voisinage du navire forme une zone intérieure dans laquelle on doit utiliser les variables suivantes:

$$\tilde{z} = \frac{1}{T}z \quad , \quad \tilde{x} = \bar{x} \quad , \quad \tilde{\Phi} = \bar{\Phi}$$

où T est le tirant d'eau du navire, supposé du même ordre de grandeur que sa largeur. Dire que le navire est élancé revient alors à supposer que le paramètre:

$$\varepsilon = \frac{T}{L}$$

est petit.

En reportant ce changement de variables dans l'équation (1), on obtient l'équation <u>complète adimensionnelle intérieure</u>:

$$\varepsilon\left(i\frac{\tau}{F_L} + F_L\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right)^2\tilde{\Phi} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{z}} = 0 \qquad (3)$$

On peut noter que, pour le moment, (2) et (3) sont chacune équivalentes à l'équation (1). On va maintenant chercher quelles formes approchées ces conditions prennent en fonction des paramètres de fréquence τ et de vitesse F_L, en ne conservant que le(s) terme(s) d'ordre dominant.

Le tableau 1 donne toutes les dégénérescences de (2) et (3) pour toutes les combinaisons d'ordres de grandeur de τ et de F_L par rapport à ε .

On constate que la condition de surface libre caractéristique de la zone intérieure de la méthode des tranches, à savoir:

$$\left(\frac{\varepsilon\tau^2}{F_L^2}\right)\tilde{\Phi} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{z}} = 0 \qquad (4)$$

n'apparait qu'une fois dans le tableau, pour:

$$\frac{F_L}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \tau \gg F_L^2 \qquad (5)$$

configuration paramétrique ° qui implique d'ailleurs $F_L \ll 1/\sqrt{\varepsilon}$. Si l'on adopte l'hypothèse (5), on doit nécessairement avoir comme condition de surface libre dans le domaine extérieur:

$$\bar{\Phi} = 0 \tag{6}$$

Mais alors, citant Tuck et Ogilvie ((2, p.74)): "nous trouvons une situation insatifaisante: il ne peut pas y avoir d'ondes de gravité (...) Nous contournons cet obstacle de la façon suivante: nous conservons (de façon inconsistante) tous les termes qui pourraient éventuellement être importants dans le champ lointain et nous obtenons la solution de ce problème plus général". Ainsi, ces auteurs ont parfaitement vu la difficulté et s'en sont sortis en utilisant, en zone extérieure, la condition complète valide, en principe, d'apprès le tableau 1 si et seulement si:

$$\tau \sim F_L^2 \sim 1 \tag{7}$$

hypothèse incompatible avec la précédente (5). Néanmoins, ils obtiennent effectivement une solution du problème plus général, en déduisent une approximation valable à des distances d'ordre unité, puis cherchent le comportement intérieur de cette approximation et trouvent que celui-ci se raccorde à la solution intérieure! Le fait que "ça marche" ne doit pas faire oublier qu'il existe une incohérence fondamentale dans le raisonnement.

D'ailleurs, c'est sans doute cette incohérence qui rend possible l'existence de variantes de la méthode, avec un résultat dépendant de l'auteur de la variante.

Pour mieux comprendre l'origine de la difficulté, il est utile de considérer le comportement extérieur de la solution intérieure. En rendant adimensionnelle la forme donnée par Tuck et Ogilvie, on obtient, en variables extérieures, pour le terme dominant:

$$\tilde{\Phi} \sim A(\bar{x})\left(\bar{z} + i|\bar{y}|\right) e^{-\frac{\tau^2}{F_L^2}\bar{z}}\, e^{i\frac{\tau^2}{F_L^2}|\bar{y}|}$$

où $A(\bar{x})$ est une fonction dont le détail est ici superflu. Or:

$$\frac{\tau^2}{F_L^2} = \frac{\beta}{\varepsilon}$$

avec β d'ordre unité d'après (5).

En conséquence:

$$\tilde{\Phi} \sim A(\bar{x})\left(\bar{z} + i|\bar{y}|\right) e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}\bar{z}}\, e^{i\frac{\beta}{\varepsilon}|\bar{y}|} \tag{8}$$

Par suite, on voit que le comportement lointain de la solution intérieure est constitué d'une fonction très rapidement oscillante (non développable par rapport à ε) dont l'amplitude croît indéfiniment. Il est bien connu que la méthode des développements asymptotiques raccordés n'est pas bien adaptée à ce type de comportement. Ce dernier appelle plutôt une méthode d'échelles multiples. C'est pourquoi, dans la suite, on examine ce que pourrait être une théorie fondée sur l'application de cette

---

° Pour que la condition (4) soit vraie, il est donc nécessaire que le rapport $\tau/F_L = \omega\sqrt{L/g}$ soit grand en $1/\sqrt{\varepsilon}$, indépendamment de la vitesse.

méthode.

Naturellement, l'objectif de la présente communication n'est pas d'ouvrir une querelle de méthode mais plutôt de tenter de trouver une approche assez systématique pour réduire la part d'arbitraire qui subsiste dans la méthode des tranches.

3. LE PROBLEME TRAITE.

Avec les notations déjà introduites, on sait ((6)) que le problème linéarisé à résoudre prend la forme suivante, où les équations sont écrites avec dimensions:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 & \text{dans le domaine fluide} & (9) \\ \left(i\omega + U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi - g\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{en} \quad z = 0 & (10) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = \underline{W} \cdot \underline{n} & \text{sur la carène} & (11) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \to 0 \,, \; z \to +\infty & \text{vers le fond} & (12) \\ \text{condition de rayonnement à l'infini} & & (13) \end{array}\right.$$

En réalité, on ne sait pas bien exprimer une condition de rayonnement (13) explicite valable dans le cas d'une vitesse d'avance non nulle. D'ailleurs, la prise en compte d'une telle condition dans le cadre du formalisme présenté plus bas ne serait pas évidente. L'argument qui tiendra lieu de condition de rayonnement dans la suite, c'est-à-dire qui assurera l'unicité de la solution, sera examiné en temps opportun.

Dans l'équation (11), $\underline{W}$ est un champ de vecteurs donné sur la carène, de composantes (W_x, W_y, W_z). Cette forme du système différentiel est commune au problème de diffraction et aux problèmes de rayonnement:

- dans le cas de la diffraction, $\underline{W}$ est l'opposé du gradient du potentiel Φ_I de la houle incidente, supposée oblique, se propageant dans la direction faisant l'angle H avec l'axe du navire; en notant Φ_a l'amplitude:

$$\Phi_I = \Phi_a \, e^{ik(x\cos H + y\sin H) - kz} \qquad (14)$$

d'où

$$\underline{W}_{dif} = -k\Phi_a \begin{bmatrix} i\cos H \\ i\sin H \\ -1 \end{bmatrix} e^{ik(x\cos H + y\sin H) - kz} \qquad (15)$$

- dans le cas des problèmes de rayonnement, $\underline{W}$ est simplement la vitesse d'un point matériel de la carène. Dans la suite, on ne détaillera complètement le raisonnement que pour les mouvements symétriques de tangage-pilonnement-cavalement. Alors, si on note ξ_1, ξ_3, ξ_5 respectivement les amplitudes complexes du cavalement, du pilonnement et du tangage, on a:

$$\underline{W}_{rad} = -i\omega\left[\xi_1 \underline{e}_x + \xi_3 \underline{e}_z + \xi_5 \underline{e}_y \wedge \underline{GM}\right] \qquad (16)$$

où $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ sont les vecteurs unitaires des trois axes, G est le centre de gravité du navire et M le point courant de la carène.

Le problème (9)-(13) est approché, puisqu'il est linéarisé et qu'il ne prend pas en compte l'interaction entre ϕ et le potentiel de la perturbation de l'écoulement moyen. Néanmoins, il est couramment accepté sous cette forme. Dans le cadre de cette communication, il constituera le problème complet dans la mesure où il ne suppose pas le navire élancé. C'est à partir de cette forme qu'on va chercher les simplifications qu'on peut effectuer en exploitant cette hypothèse.

Mais auparavant, pour appliquer la méthode des échelles multiples, on va mettre le problème sous forme adimensionnelle et, du même coup, introduire, pour chaque coordonnée d'espace, deux échelles indépendantes (méthode de Cole-Kervorkian).

On définit les échelles courtes, qui servent à décrire les oscillations locales des champs, par:

$$\tilde{x} = \frac{x}{X(\varepsilon) L} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{\varepsilon L} \quad , \quad \tilde{z} = \frac{z}{\varepsilon L} \tag{17}$$

En effet, l'ordre de grandeur de $\tilde{y}$ et de $\tilde{z}$ est évident, en raison de la géométrie du problème. Au contraire, $X(\varepsilon)$ est une inconnue; on peut seulement anticiper que $X(\varepsilon) \ll 1$, pour décrire des oscillations de longueurs d'onde inférieures à la longueur du navire.

Par ailleurs, l'évolution spatiale des caractéristiques de ces oscillations est décrite à l'aide d'échelles longues définies par:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y}{Y(\varepsilon) L} \quad , \quad \bar{z} = \frac{z}{Z(\varepsilon) L} \tag{18}$$

Cette fois, c'est l'ordre de grandeur en x qui est évident, de par la géométrie du problème, mais $Y(\varepsilon)$ et $Z(\varepsilon)$ restent à déterminer. Cependant, par définition, l'échelle longue est plus longue que l'échelle courte donc on a: $Y(\varepsilon) \gg \varepsilon$ et $Z(\varepsilon) \gg \varepsilon$.

Pour le potentiel, on pose:

$$\phi(x, y, z) = UL\,\Phi'\,\bar{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \,;\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \tag{19}$$

Les six échelles spatiales étant supposées indépendantes, il faut reformuler les opérateurs de dérivation partielle. Par exemple:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{X(\varepsilon) L} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$$

Quant au navire, pour expliciter l'hypothèse d'élancement, on peut se donner l'équation du corps en coordonnées cylindriques:

$$r = \varepsilon L\, g(x, \theta) \tag{20}$$

avec: $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ et en prenant pour origine des angles polaires l'axe des z : $\theta = -\mathrm{Arctg}(y/z) \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

En vue d'appliquer la méthode des échelles multiples, on suppose, en toute généralité, que la forme du corps dépend des deux échelles longitudinales:

$$g(x, \theta) = g(\tilde{x}, \bar{x}, \theta) \tag{21}$$

et l'on introduit $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}$. L'équation de la carène est alors, en posant $F = \tilde{r} - g(\tilde{x}, \bar{x}, \theta)$:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \,;\, \bar{x}) = 0 \tag{22}$$

On voit que supposer que F ne dépend pas de $\tilde{y}$ ni de $\tilde{z}$ exprime l'hypothèse d'élancement. Un vecteur normal à la carène est:

$$\nabla F = \frac{1}{\varepsilon L}\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{X}\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

L'hypothèse faite sur la carène signifie, par exemple, qu'on exclut des formes à très forte pente longitudinale (forme 1 figure 2) mais qu'on accepte des carènes présentant des oscillations d'amplitude du même ordre de grandeur que la largeur du navire pourvu que leur longueur d'onde soit grande devant la largeur, même si elle est petite devant la longueur du navire (forme 2 figure 2).

Quant à la donnée sur la carène,
- dans le cas des mouvements forcés, l'inclinaison en ε / X de la normale par rapport à Ox entraîne que le cavalement est petit d'un ordre de grandeur ε / X devant les autres mouvements; on peut donc poser:

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon}{X} L \bar{\xi}_1 \;, \quad \xi_3 = L \bar{\xi}_3 \;, \quad \xi_5 = L \bar{\xi}_5 \tag{24}$$

où $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_3$, $\bar{\xi}_5$ sont d'ordre unité par rapport à ε. Utilisant également:

$$\underline{GM} = L(\bar{x} - \bar{x}_G)\underline{e}_x + \varepsilon L\left[(\tilde{y} - \tilde{y}_G)\underline{e}_y + (\tilde{z} - \tilde{z}_G)\underline{e}_z\right]$$

on obtient:

$$\underline{W}_{rad} = \omega L\left\{-i\left[\left(\bar{\xi}_3 - [\bar{x} - \bar{x}_G]\bar{\xi}_5\right)\underline{e}_z + \frac{\varepsilon}{X}\left(\bar{\xi}_1 \underline{e}_x\right) + \varepsilon \bar{\xi}_5 \left(\tilde{z} - \tilde{z}_G\right)\underline{e}_z\right]\right\} \tag{25}$$

- pour le cas de la diffraction, par définition, l'oscillation locale du champ se fait à l'échelle courte $\tilde{x}$ et on doit supposer que $\tilde{k} = XkL$ est d'ordre unité. On a donc:

$$\underline{W}_{dif} = -k\Phi_a \begin{bmatrix} i\cos H \\ i\sin H \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\tilde{k}\tilde{x}\cos H}\left[1 + \frac{\varepsilon}{X}\left(i\tilde{k}\tilde{y}\sin H - \tilde{k}\tilde{z}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(i\tilde{k}\tilde{y}\sin H - \tilde{k}\tilde{z}\right)^2 + \ldots\right] \tag{26}$$

Dans les deux cas, $\underline{W}$ se présente naturellement sous la forme d'un développement asymptotique:

$$\underline{W} = W'\left[\underline{\bar{W}}_0 + \frac{\varepsilon}{X}\underline{\bar{W}}_1 + \left(\frac{\varepsilon}{X}\right)^2 \underline{\bar{W}}_2 + o\left(\frac{\varepsilon^2}{X^2}\right)\right] \tag{27}$$

$$\text{où: } W' = \begin{cases} -k\Phi_a & \text{pour la diffraction} \\ \omega L & \text{pour le rayonnement} \end{cases}$$

avec les notations évidentes pour $\underline{\bar{W}}_0$, $\underline{\bar{W}}_1$, $\underline{\bar{W}}_2$.

Dans ces conditions, le problème complet prend la forme suivante:

* équation de Laplace:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{y}^2}+\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{\zeta}^2}+2\,\dfrac{\varepsilon^2}{X}\,\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{x}\,\partial\bar{x}}+2\,\dfrac{\varepsilon}{Y}\,\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{y}\,\partial\bar{y}}+2\,\dfrac{\varepsilon}{Z}\,\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{\zeta}\,\partial\bar{\zeta}}\\ +\left(\dfrac{\varepsilon}{X}\right)^2\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{x}^2}+\left(\dfrac{\varepsilon}{Y}\right)^2\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}^2}+\left(\dfrac{\varepsilon}{Z}\right)^2\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}^2}+\varepsilon^2\,\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}^2}\end{array}\right\}=0 \qquad (28)$$

* condition de surface libre, avec $\Omega=\omega\sqrt{L/g}$ et $F_L=U/\sqrt{gL}$:

$$\left.\begin{array}{l}-\varepsilon^2\Omega^2\bar{\Phi}+2i\,\Omega F_L\,\varepsilon\left[\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}+\dfrac{1}{X}\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{x}}\right]-\left[\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{\zeta}}+\dfrac{\varepsilon}{Z}\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}}\right]\\ +\varepsilon F_L^2\left[\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}^2}+\dfrac{2}{X}\cdot\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}\,\partial\tilde{x}}+\dfrac{1}{X^2}\cdot\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\tilde{x}^2}\right]\end{array}\right\}=0 \qquad (29)$$

* condition de glissement:

$$\Phi'U\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\varepsilon}{Y}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\right)+\frac{\partial F}{\partial\tilde{\zeta}}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{\zeta}}+\frac{\varepsilon}{Z}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial F}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{X}\frac{\partial F}{\partial\tilde{x}}\right)\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{X}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{x}}\right)\right.$$

$$\left.=\varepsilon W'\left[\bar{W}_y\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}+\bar{W}_\zeta\frac{\partial F}{\partial\tilde{\zeta}}+\bar{W}_x\left(\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\bar{x}}+\frac{\varepsilon}{X}\frac{\partial F}{\partial\tilde{x}}\right)\right]\right. \qquad (30)$$

* condition de fond:

$$\lim_{\tilde{\zeta},\bar{\zeta}\to+\infty}\left[\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tilde{\zeta}}+\frac{\varepsilon}{Z}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}}\right]=0 \qquad (31)$$

* condition de rayonnement (pour mémoire). (32)

L'ensemble des équations et conditions (28) à (32) constitue le problème "complet" dans la mesure où l'on n'a pas encore effectué de simplifications par rapport au problème initial (9) à (13).

REMARQUE: Il s'agit maintenant de résoudre ce système aux dérivées partielles de la façon la plus générale possible au sens des développements asymptotiques. Or on note que, dans l'expression formelle du problème mathématique, la fréquence adimensionnelle Ω et le nombre d'onde adimensionnel $\tilde{k}$ apparaissent comme deux paramètres indépendants. Il sera donc licite de relaxer la relation de dispersion des ondes incidentes, qui ne fait pas partie du problème à résoudre, si cela permet d'obtenir une meilleure dégénérescence du système, c'est-à-dire une solution plus générale du problème. Ainsi, dans tous les cas, la situation réelle, qui vérifie la relation de dispersion, sera incluse dans la solution que l'on obtiendra.

4. APPLICATION DU FORMALISME ASYMPTOTIQUE

On se propose de chercher une solution de ce problème par un développement asymptotique:

$$\bar{\Phi}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta};\bar{x},\bar{y},\bar{\zeta};\varepsilon)=\bar{\Phi}_0(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta};\bar{x},\bar{y},\bar{\zeta})$$
$$+\varphi_1(\varepsilon)\bar{\Phi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta};\bar{x},\bar{y},\bar{\zeta})+\varphi_2(\varepsilon)\bar{\Phi}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta};\bar{x},\bar{y},\bar{\zeta})+\cdots \qquad (33)$$

Pour déterminer $X(\varepsilon)$, $Y(\varepsilon)$, $Z(\varepsilon)$, $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$ on applique classiquement le principe de moindre dégénérescence en exprimant le problème aux différents ordres successifs. L'application de ce principe, simple lorsqu'on raisonne sur une seule équation, demande plus de précaution lorsqu'on considère globalement un système à plusieurs équations. On adopte ici la position consistant à privilégier les équations qui contrôlent la physique du phénomène (équation de Laplace et condition de surface libre) plutôt que la condition de glissement, plus "conjoncturelle".

4.1. Equation de Laplace.

Dès que $X \gg \varepsilon$, l'équation de Laplace dégénère à l'ordre zéro en une équation bidimensionnelle. Cette condition revient à dire que les longueurs d'onde longitudinales sont plus grandes que les dimensions transversales du navire. Pour continuer, on fait donc cette hypothèse:

H1: $\quad X(\varepsilon) \gg \varepsilon$

et l'équation (28) se réduit alors à:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \tag{34}$$

A l'ordre suivant, le principe de moindre dégénérescence suggère simplement:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon}{Y} = \frac{\varepsilon}{Z} = \left(\frac{\varepsilon}{X}\right)^2 \tag{35}$$

L'équation de Laplace donne, pour l'ordre un:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}^2} = -\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{y}\,\partial \bar{y}} - 2\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}\,\partial \bar{z}} \tag{36}$$

A l'ordre deux, l'équation de Laplace fournit les relations suivantes:

$$\varphi_2 \sim \frac{\varepsilon^2}{X} \sim \frac{\varepsilon}{Y}\varphi_1 \sim \left(\frac{\varepsilon}{X}\right)^2\varphi_1 \sim \left(\frac{\varepsilon}{Y}\right)^2$$

Comme on n'a pas l'intention de résoudre l'ordre deux, on ne précise pas les équations a cet ordre. Avec les relations obtenues, on peut déterminer:

$$\left[\begin{array}{ll} X = \varepsilon^{2/3} & \varphi_1 = \varepsilon^{2/3} \\ Y = \varepsilon^{1/3} & \\ Z = \varepsilon^{1/3} & \varphi_2 = \varepsilon^{4/3} \end{array}\right. \tag{37}$$

4.2. Condition de surface libre.

Les termes dominants du membre de gauche de (29) sont les suivants:

$$-\varepsilon\Omega^2\bar{\Phi}_0 + 2i\,\frac{\Omega F_L \varepsilon}{X}\cdot\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\varepsilon F_L^2}{X^2}\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}}$$

On va pouvoir préciser les ordres de grandeur de Ω et de F_L qu'il faut choisir pour construire une méthode des tranches. Le principe de moindre dégénérescence incite d'abord à choisir:

$$\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \qquad \tilde{\Omega} \text{ d'ordre unité} \tag{38}$$

Ensuite, si l'on désire conserver, en première approximation, un problème local bidimensionnel, on est tenu de faire l'hypothèse:

$$\text{H2:} \qquad F_L \ll \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Dès lors, la condition de surface libre à l'ordre zéro est:

$$\tilde{\Omega}^2 \bar{\Phi}_0 + \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}} = 0 \tag{39}$$

Compte tenu de l'hypothèse H2, la moindre dégénérescence à l'ordre un requiert: $\varphi_1 \sim \frac{\Omega F_L \varepsilon}{X} \sim \frac{\varepsilon}{Z}$

Ceci est compatible avec le résultat (35) et entraîne une seule condition nouvelle par rapport à (37):

$$F_L = \frac{X\sqrt{\varepsilon}}{Z} \tilde{F}_L = \varepsilon^{5/6} \tilde{F}_L , \qquad \tilde{F}_L \text{ d'ordre unité} \tag{40}$$

La condition de surface libre devient alors, à l'ordre un:

$$\tilde{\Omega}^2 \bar{\Phi}_1 + \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} = 2 i \tilde{\Omega} \tilde{F}_L \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}} \tag{41}$$

A l'ordre deux, elle n'apporte aucune nouvelle contrainte.

4.3. Condition de glissement.

D'après (30), on doit avoir $\phi' = \varepsilon W'/U$. Compte tenu des résultats déjà obtenus, on peut expliciter la condition de glissement sous la forme suivante:

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{y}} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{y}}\right) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}}\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{z}}\right) + \varepsilon^{2/3}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\right)\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{x}}\right)$$

$$= \left[\bar{W}_{0y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{0z}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}}\right] + \varepsilon^{1/3}\left[\bar{W}_{1y}\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{1z}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} + \bar{W}_{0x}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\right] \tag{42}$$

$$+ \varepsilon^{2/3}\left[\bar{W}_{2y}\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{2z}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} + \bar{W}_{1x}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\right] + O(\varepsilon)$$

A l'ordre zéro, elle dégénère en une condition bidimensionnelle:

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}} = \bar{W}_{0y}\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{0z}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} \tag{43}$$

Ensuite, l'équation (42) montre que la séquence asymptotique précédemment déterminée pour $\bar{\Phi}$, voir (33),(37), est incomplète. On doit compléter le développement (33) par des termes intercalaires d'ordres $\varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon^{3/2}$,.... auxquels on affecte par convention un indice demi-entier:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 + \varepsilon^{1/3}\bar{\Phi}_{1/2} + \varepsilon^{2/3}\bar{\Phi}_1 + \varepsilon \bar{\Phi}_{3/2} + \varepsilon^{4/3}\bar{\Phi}_2 + o\left(\varepsilon^{4/3}\right) \tag{44}$$

Alors, aux ordres 1/2 et 1, la condition sur la carène conduit à:

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \bar{\Phi}_{1/2}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_{1/2}}{\partial \tilde{z}} = \bar{W}_{1y}\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{1z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} + \bar{W}_{0x}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} \tag{45}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} = \bar{W}_{2y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{2z}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}} + \bar{W}_{1x}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}} \tag{46}$$

4.4. Condition de fond.

Pour $\tilde{\zeta}, \bar{\zeta} \to +\infty$, on obtient évidemment pour les ordres successifs:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \tilde{\zeta}} \to 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_{1/2}}{\partial \tilde{\zeta}} \to 0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{\zeta}} \to - \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\zeta}} \tag{49}$$

4.5. Récapitulation.

De façon classique dans les situations de séquences incomplètes, les termes supplémentaires introduits pour satisfaire la condition sur la carène n'interfèrent pas, dans les autres équations, avec les termes d'indices entiers. Ainsi, $\bar{\Phi}_0$ et $\bar{\Phi}_{1/2}$ sont solutions du même type de problème bidimensionnel:

$$\left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}^2} = 0 & \text{dans le fluide} & (50) \\ \tilde{\Omega}^2 \bar{\Phi}_j + \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}} = 0 & \text{à la surface} & (51) \\ \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{n}} = \Gamma_j & \text{sur la carène} & (52) \\ \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}} \to 0 & \text{au fond} & (53) \end{array}\right.$$

où $\tilde{n}$ est le vecteur normal unitaire dans la tranche:

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial F/\partial \tilde{y} \\ \partial F/\partial \tilde{\zeta} \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{(\partial F/\partial \tilde{y})^2 + (\partial F/\partial \tilde{\zeta})^2}$$

et

$$\Gamma_j = \gamma_j \Big/ \sqrt{(\partial F/\partial \tilde{y})^2 + (\partial F/\partial \tilde{\zeta})^2}$$

avec simplement:

$$\gamma_j = \begin{cases} \bar{W}_{0y} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{0\zeta} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\zeta}} & \text{pour } j = 0 \\ \bar{W}_{1y} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{y}} + \bar{W}_{1\zeta} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\zeta}} + \bar{W}_{0x} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{x}} & \text{pour } j = \frac{1}{2} \end{cases}$$

De même, $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_{3/2}$ satisfont le problème suivant:

$$\left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}^2} = - \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \tilde{x}^2} - 2 \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \tilde{y}\, \partial \bar{y}} - 2 \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \tilde{\zeta}\, \partial \bar{\zeta}} & \text{dans le fluide} & (54) \\ \tilde{\Omega}^2 \bar{\Phi}_j + \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}} = 2 i \tilde{\Omega} \tilde{F}_L \dfrac{\partial \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \tilde{x}} - \dfrac{\partial \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \bar{\zeta}} & \text{en } \tilde{\zeta} = \bar{\zeta} = 0 & (55) \\ \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{n}} = \Gamma_j & \text{sur la carène} & (56) \\ \dfrac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \tilde{\zeta}} \to - \dfrac{\partial \bar{\Phi}_{(j-1)}}{\partial \bar{\zeta}} & \text{au fond} & (57) \end{array}\right.$$

où, avec les mêmes définitions que précédemment, γ_1 est le second membre de (46) et il ne sera pas nécessaire de préciser $\gamma_{3/2}$.

L'indépendance des séquences d'indices entiers et demi-entiers entraîne que le raisonnement effectué ci-dessous en considérant $\bar{\Phi}_0$ et $\bar{\Phi}_1$ sera immédiatement applicable à $\bar{\Phi}_{1/2}$ et $\bar{\Phi}_{3/2}$.

En définitive, sous les hypothèses H1 et H2, on a obtenu pour les deux termes dominants le problème constitué des équations (50), (51), (52) et (53) qui s'interprète comme un problème bidimensionnel local par rapport aux variables $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$. On reconnait le problème classique de champ proche de la méthode des tranches.

Ensuite, on a déterminé les ordres de grandeurs récapitulés ci-dessous:

$$X = \varepsilon^{2/3} \quad , \quad Y = \varepsilon^{1/3} \quad , \quad Z = \varepsilon^{1/3}$$
$$\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad , \quad F_L = \varepsilon^{5/6}\, \tilde{F}_L \qquad (58)$$

On peut vérifier que ce résultat est compatible avec les hypothèses H1 et H2.

Par ailleurs, on trouve que les jauges pour $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont égales. Ceci permet de définir de nouvelles variables qui trouveront leur utilité plus loin, en distinguant, dans la direction transversale:

- à l'échelle courte, $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}$ et $\tilde{\theta} = -\mathrm{Arctg}\,(\tilde{y}/\tilde{z})$,
- à l'échelle longue, $\bar{r} = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$ et $\bar{\theta} = -\mathrm{Arctg}\,(\bar{y}/\bar{z})$.

En outre, on remarque que la fréquence adimensionnelle est grande en $1/\sqrt{\varepsilon}$, comme pour la zone intérieure de la théorie des tranches classique; au contraire, le nombre de Froude est petit en $\varepsilon^{5/6}$, tandis que, pour les théories de tranches antérieures, on serait plutôt tenté de le voir d'ordre unité.

Pour les deux termes suivants, $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_{3/2}$, on remarque que les seconds membres font apparaitre les effets tridimensionnels du fait de la présence des opérateurs de dérivation par rapport à $\tilde{x}$.

5. RESOLUTION.

5.1. Résolution à l'ordre zéro.

Les équations (50), (51), (52), (53) constituent un problème bidimensionnel bien connu dont la solution peut être exprimée à l'aide de la fonction de Green bidimensionnelle , qu'on ne rappelle pas ici ((8)). On sait ((5)) que la solution générale du problème constitué des équations de Laplace (50), de surface libre (51) et de fond (53) est donnée par la représentation intégrale suivante:

$$\bar{\Phi}_0 = \int_{S(\tilde{x},\bar{x})} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}^{(+)}(\tilde{x},\tilde{y}_p,\tilde{z}_p;\bar{x},\bar{y},\bar{z})\; \bar{G}^{2D}\,(\tilde{y}-\tilde{y}_p,\tilde{z}-\tilde{z}_p) \\ +\bar{\sigma}^{(-)}(\tilde{x},\tilde{y}_p,\tilde{z}_p;\bar{x},\bar{y},\bar{z})\; \bar{G}^{2D*}(\tilde{y}-\tilde{y}_p,\tilde{z}-\tilde{z}_p) \end{bmatrix} d\tilde{s}(P) \qquad (59)$$

où $S(\tilde{x},\bar{x})$ est le contour de la section droite du navire par un plan normal à son axe et $\bar{G}^{2D*}$ est le complexe conjugué de $\bar{G}^{2D}$.

Dans le problème à l'ordre zéro pour $\bar{\Phi}_0$, les coordonnées $\tilde{x}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ jouent le rôle de paramètres; en conséquence, dans la représentation (59), elles n'apparaissent que dans les densités de sources $\bar{\sigma}^{(+)}$ et $\bar{\sigma}^{(-)}$.

La solution générale (59) à un comportement, lorsque $|\tilde{y}| \to +\infty$, qui contient des ondes entrantes associées à $\bar{G}^{2D*}$ et des ondes sortantes associées à $\bar{G}^{2D}$. En principe, à ce stade du raisonnement, comme on résout un problème en champ proche, on ne peut pas éliminer a priori les ondes entrantes. Cependant, dans la suite du texte, on s'intéressera au comportement en champ lointain de la solution, qui fera intervenir le comportement de $\bar{\sigma}^{(+)}$ et de $\bar{\sigma}^{(-)}$ par rapport aux échelles longues. Par définition de ces échelles longues, on obtiendra ainsi une modulation de l'amplitude complexe des ondes mais cela ne changera pas leur nature. Or, à grande distance, la condition de rayonnement permet d'éliminer les ondes entrantes. Il semble donc licite de supprimer dès à présent le terme en $\bar{G}^{2D*}$ dans (59) et donc de prendre:

$$\bar{\sigma}^{(-)} \equiv 0 \tag{60}$$

Pour déterminer $\bar{\sigma}^{(+)}$, il reste à exploiter la condition de glissement (52). On sait que cela conduit à une équation intégrale. On ne reviendra pas sur la résolution de cette équation intégrale, parfaitement classique ((8)). On va simplement rappeler que, pour l'établir, on fait tendre le point d'observation vers un point fixe de la carène et on écrit que la limite de $\partial\bar{\Phi}_o/\partial\tilde{n}$ en ce point est égale à la donnée de Neuman. Dans le cas du raisonnement appliqué ici, on fait tendre le point d'observation $M(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ vers un point fixe $P_o(\tilde{x}_{Po},\tilde{y}_{Po},\tilde{z}_{Po};\bar{x}_{Po},\varepsilon^{2/3}\tilde{y}_{Po},\varepsilon^{2/3}\tilde{z}_{Po})$. Sous le signe d'intégration, par développement de Taylor, on a:

$$\bar{\sigma}^{(+)}(M) \to \bar{\sigma}^{(+)}(\tilde{x}_{P_o},\tilde{y}_{P_o},\tilde{z}_{P_o};\bar{x}_{P_o},0,0) + O(\varepsilon^{2/3})$$

La résolution de l'équation bidimensionnelle locale donne donc la valeur en $\bar{y}=\bar{z}=0$ de $\bar{\sigma}^{(+)}$.

On peut ainsi dorénavant considérer, en ne notant plus l'indice (+), que:

$$\bar{\Phi}_o(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \int_{S(\tilde{x},\bar{x})} \bar{\sigma}(\tilde{x},\tilde{y}_P,\tilde{z}_P;\bar{x},\bar{y},\bar{z})\, \bar{G}^{2D}(\tilde{y}-\tilde{y}_P,\tilde{z}-\tilde{z}_P)\, d\tilde{s}(P) \tag{61}$$

avec $\bar{\sigma}^{2D}_{num}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x}) = \bar{\sigma}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x},0,0)$ connue par résolution numérique de l'équation intégrale:

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{2D}_{num}(\tilde{x},\tilde{y}_{Po},\tilde{z}_{Po};\bar{x}) + \mathrm{VP}\int_{S(\tilde{x},\bar{x})} \bar{\sigma}^{2D}_{num}(\tilde{x},\tilde{y}_P,\tilde{z}_P;\bar{x})\,\bar{G}^{2D}(\tilde{y}-\tilde{y}_P,\tilde{z}-\tilde{z}_P)\,d\tilde{s}(P) = \Gamma_o \tag{62}$$

Si l'on arrêtait la théorie à ce stade, une première approximation du résultat s'obtiendrait en remplaçant, dans (61), $\bar{\sigma}$ par la solution numérique locale $\bar{\sigma}^{2D}_{num}$.

Le raisonnement qui vient d'être fait s'applique intégralement à l'ordre 1/2 et l'on passe donc directement à l'ordre un.

5.2. Examen de l'ordre un.

A partir de l'expression (61) de $\bar{\Phi}_o$, on peut reformuler le problème pour $\bar{\Phi}_1$. Le domaine d'intégration dépendant de la variable $\bar{x}$, pour effectuer la dérivation par rapport à cette variable, on remarque que

$$\bar{\Phi}_o = \int_{S(\tilde{x},\bar{x})} \bar{\sigma}\ \bar{G}^{2D}\ d\tilde{s}\,(P) = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\sigma}\ \bar{G}^{2D} \sqrt{g^2+\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2}\ d\theta(P) \qquad (63)$$

Ceci permet de permuter l'intégration en θ et la dérivation par rapport à $\tilde{x}$. Par commodité, on introduit:

$$\bar{\sigma}_{aux} = \bar{\sigma}\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)\sqrt{g(\tilde{x},\bar{x},\theta)^2+\left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(\tilde{x},\bar{x},\theta)\right]^2} \qquad (64)$$

En conséquence, le problème à l'ordre un prend la forme suivante, encore bidimensionnelle mais inhomogène:

- équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2\bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}^2} = -\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{\partial^2\bar{\sigma}_{aux}}{\partial \tilde{x}^2}\,\bar{G}^{2D} + 2\,\frac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{G}^{2D}}{\partial \tilde{y}} + 2\,\frac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial \bar{G}^{2D}}{\partial \tilde{z}}\right\} d\theta_P \qquad (65)$$

- condition de surface libre:

$$\tilde{\Omega}^2\bar{\Phi}_1+\frac{\partial\bar{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{2i\Re\tilde{F}_L\cdot\frac{\partial\bar{\sigma}_{aux}}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial\bar{\sigma}_{aux}}{\partial\bar{z}}\right\}\bar{G}^{2D}\ d\theta_P \qquad (66)$$

On peut facilement se convaincre que les conditions de glissement, de fond et de rayonnement ne peuvent pas amener de termes séculaires et on ne les détaille pas ici. Au contraire, la présence des seconds membres de (65) et de (66), qui s'interprètent d'ailleurs comme des répartitions de sources dans le volume et à la surface, entrainerait une croissance indéfinie de la solution $\bar{\Phi}_1$ dans la direction transversale. On doit annuler les termes séculaires correspondants en appliquant la condition de Lighthill.

5.3. Condition de Lighthill.

Dans les problèmes qu'on résout usuellement par la méthode des échelles multiples, on applique un traitement radical qui consiste à annuler exactement les seconds membres génants. Ici, cela est impossible. Néanmoins, la condition de Lighthill est en réalité une condition asymptotique vis-à-vis des variables courtes et il est suffisant que les seconds membres tendent vers zéro lorsque $|\tilde{y}| \to +\infty$. Or on sait que, en notant g^{2D} le comportement de $\bar{G}^{2D}$ quand $|\tilde{y}| \to \infty$, on a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{G}^{2D}}{\partial\tilde{y}} &\sim i\,\tilde{\Omega}^2\ sgn(\tilde{y})\ g^{2D} \\ \frac{\partial\bar{G}^{2D}}{\partial\tilde{z}} &\sim -\,\tilde{\Omega}^2\ g^{2D} \end{aligned}\right] \qquad (67)$$

g^{2D} se met alors en facteur dans l'intégrand et, compte tenu de $sgn(\tilde{y}) = sgn(\bar{y})$, une condition suffisante pour annuler les termes séculaires est:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \tilde{x}^2} + 2i\tilde{\Omega}^2 \operatorname{sgn}(\bar{y}) \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \bar{y}} - 2\tilde{\Omega}^2 \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \bar{z}} = 0 \ , \ \bar{z} > 0 & (68) \\ 2i\tilde{\Omega}\tilde{F}_L \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \tilde{x}} - \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{aux}}{\partial \bar{z}} = 0 \ , \ \bar{z} = 0 & (69) \end{cases}$$

A ce problème s'ajoute la condition limite supplémentaire:

$$\bar{\sigma}_{aux}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; \bar{x}, 0, 0) = \bar{\sigma}^{2D}_{num}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; \bar{x})\ R(\tilde{x}, \bar{x}, \theta) \tag{70}$$

où l'on a posé: $R(\tilde{x}, \bar{x}, \theta) = \sqrt{g(\tilde{x}, \bar{x}, \theta)^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(\tilde{x}, \bar{x}, \theta)\right]^2}$

La résolution de ce système aux dérivées partielles

- permet de trouver le comportement de la solution lorsqu'on s'éloigne de la carène, plus précisément à des distances transversales de l'ordre de $\varepsilon^{1/3} L$,
- montre que, à ces distances, l'aspect tridimensionnel de la solution commence à apparaitre, par le biais de la dépendance en $\tilde{x}$.

5.4. Résolution des équations (68), (69).

D'une façon générale, $\bar{\sigma}_{aux}$ peut se décomposer en la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique, qu'on peut chercher séparément. Cependant, dans cette communication, on ne considère que les mouvements symétriques. On cherche donc la solution de (68), (69) sous la forme:

$$\bar{\sigma}_{aux} = H(\bar{y})\ \Sigma(\tilde{x}, \bar{y}, \bar{z}) + H(-\bar{y})\ \Sigma(\tilde{x}, -\bar{y}, \bar{z}) \tag{71}$$

en notant H la fonction de Heaviside.

On est ainsi ramené à un problème aux dérivées partielles à coefficients constants:

$$\left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial \tilde{x}^2} + 2i\tilde{\Omega}^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \bar{y}} - 2\tilde{\Omega}^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \bar{z}} = 0 & \text{dans} & \bar{z} \geq 0 \quad (72) \\ 2i\tilde{\Omega}\tilde{F}_L \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{x}} - \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \bar{z}} = 0 & \text{en} & \bar{z} = 0 \quad (73) \end{array}\right.$$

qui se résout par transformation de Fourier par rapport à $\tilde{x}$. On montre que, en notant $\tilde{\xi}$ la variable de Fourier conjuguée de $\tilde{x}$, la solution générale de (72), (73) s'exprime dans le domaine de Fourier par:

$$\hat{\Sigma}(\tilde{\xi}, \bar{y}, \bar{z}) = \hat{B}(\tilde{\xi})\ \exp\left\{-2i\pi^2 \frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}(\bar{z} - i\bar{y})\right\} \tag{74}$$

où $\hat{B}(\tilde{\xi})$ est une fonction à déterminer en utilisant la condition (70).

5.5. Utilisation de la condition sur la carène (70).

Quand $\bar{y} \to 0$ et $\bar{z} \to 0$, $\bar{\sigma}_{aux}(\tilde{x}, \bar{y}, \bar{z}) \to \Sigma(\tilde{x}, 0, 0)$; par conséquent, la transformée de Fourier de la condition (70) s'écrit aussi:

$$\hat{\Sigma}(\tilde{\xi}, 0, 0) = \widehat{\bar{\sigma}^{2D}_{num}\ R} \tag{75}$$

Par comparaison avec (74), on voit que cette condition donne $\hat{B}(\tilde{\xi})$. En définitive:

$$\hat{\Sigma}(\tilde{\xi},\bar{y},\bar{z}) = \widehat{\bar{\sigma}^{2D}_{num}\,R}\;\exp\left\{-2i\pi^2\frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}(\bar{z}-i\bar{y})\right\} \tag{76}$$

Pour pouvoir appliquer la transformation de Fourier inverse, on va supposer que la transfouriée de $\bar{\sigma}^{2D}_{num}\cdot R$ est à support compact, inclus dans l'intervalle $[-\tilde{\xi}_2, +\tilde{\xi}_2]$. Une telle hypothèse n'est en réalité pas très restrictive et s'apparente étroitement à une technique d'homogénéisation dans laquelle la dépendance en $\bar{x}$ traduit une modulation d'amplitude tandis que l'échelle en $\tilde{x}$ prend en compte les caractéristiques locales de la carène, étendues jusqu'à l'infini en $\tilde{x}$ à $\bar{x}$ fixé. On peut alors réécrire (76) comme suit:

$$\hat{\Sigma}(\tilde{\xi},\bar{y},\bar{z}) = \widehat{\bar{\sigma}^{2D}_{num}\,R}\cdot \mathbb{1}_{[-\tilde{\xi}_2,+\tilde{\xi}_2]}\exp\left\{-2i\pi^2\frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}(\bar{z}-i\bar{y})\right\} \tag{77}$$

soit, par transformation de Fourier inverse:

$$\Sigma(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) = \bar{\sigma}^{2D}_{num}\sqrt{g^2+(\partial g/\partial\theta)^2}\;\overset{\tilde{x}}{*}\;N(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) \tag{78}$$

où N désigne la transformée inverse de:

$$\hat{N}(\tilde{\xi},\bar{y},\bar{z}) = \mathbb{1}_{[-\tilde{\xi}_2,+\tilde{\xi}_2]}\exp\left\{-2i\pi^2\frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}(\bar{z}-i\bar{y})\right\} \tag{79}$$

On montre que:

$$N(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{\tilde{\Omega}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2\pi\bar{y}}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\tilde{\Omega}^2}{2\bar{y}}(\tilde{x}-u)^2}\cdot\frac{\sin 2\pi\tilde{\xi}_2\{u+2i\tilde{\Omega}\tilde{F}_L(\bar{z}-i\bar{y})\}}{u+2i\tilde{\Omega}\tilde{F}_L(\bar{z}-i\bar{y})}\,du \tag{80}$$

Pour remonter à la solution complète, on pose:

$$K(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) = H(\bar{y})\,N(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) + H(-\bar{y})\,N(\tilde{x},-\bar{y},\bar{z}) \tag{81}$$

d'où

$$\bar{\sigma}_{aux} = \left[\bar{\sigma}^{2D}_{num}\sqrt{g^2+(\partial g/\partial\theta)^2}\right]\overset{\tilde{x}}{*}\;K(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) \tag{82}$$

et, en utilisant (63):

$$\bar{\Phi}_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\bar{\sigma}^{2D}_{num}\sqrt{g^2+(\partial g/\partial\theta)^2}\right]\overset{\tilde{x}}{*}K(\tilde{x},\bar{y},\bar{z})\;\bar{G}^{2D}\,d\tilde{\theta} \tag{83}$$

c'est-à-dire finalement:

$$\boxed{\bar{\Phi}_0 = K(\tilde{x},\bar{y},\bar{z})\overset{\tilde{x}}{*}\bar{\Phi}_0^{2D}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z};\bar{x})} \tag{84}$$

où l'on a posé:

$$\bar{\Phi}_0^{2D} = \int_{s(\tilde{x},\bar{x})}\bar{\sigma}^{2D}_{num}(\tilde{x},\tilde{y}_P,\tilde{z}_P;\bar{x})\;\bar{G}^{2D}(\tilde{y}-\tilde{y}_P,\tilde{z}-\tilde{z}_P)\,d\tilde{s}(\ell) \tag{85}$$

Le résultat (84) exprime que la solution tridimensionnelle totale s'obtient comme le produit de convolution de la solution bidimensionnelle locale avec un noyau représentant des ondes tridimensionnelles engendrées par chaque tranche. La convolution permet de prendre en compte l'influence que chaque tranche exerce sur ses voisines.

On peut en outre noter que, si l'on utilise le résultat (84), on doit, pour être cohérent dans les ordres d'approximation, calculer $\bar{\Phi}_1$ et en tenir compte. On remarque que, bien que satisfaisant une condition de rayonnement à l'infini, $\bar{\Phi}_1$ contient, au voisinage du navire, des ondes qui s'approchent de la carène puisqu'il résulte en partie d'une distribution de sources dans le volume fluide.

5.6. Cas particulier d'une carène à pente faible.

Lorsqu'on considère une carène élancée au sens le plus courant du terme, c'est-à-dire telle que son inclinaison par rapport à l'axe longitudinal soit d'ordre ε , le problème se simplifie. En effet, cette hypothèse revient à admettre que g ne dépend pas de $\tilde{x}$ et, dans ce cas, la transformée de Fourier de $\bar{\sigma}^{2D}_{num}\sqrt{g^2+g_{,0}^2}$ est simplement une distribution de Dirac. La convolution dégénère alors et on obtient le résultat suivant, donné ici sans démonstration:

$$\bar{\Phi}_0 = E(\bar{y},\bar{z}) \quad \bar{\Phi}_0^{2D} \left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\,;\,\tilde{x}\right) \tag{86}$$

où

$$E(\bar{y},\bar{z}) = \begin{cases} H(\bar{y})\exp\left\{-2i\pi^2 \dfrac{\tilde{\xi}_0^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}_0\left(\bar{z}-i\bar{y}\right)\right\} \\ +H(-\bar{y})\exp\left\{2i\pi^2 \dfrac{\tilde{\xi}_0^2}{\tilde{\Omega}^2}\bar{y} - 4\pi\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\tilde{\xi}_0\left(\bar{z}+i\bar{y}\right)\right\} \end{cases} \tag{87}$$

avec

$$\tilde{\xi}_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\,\tilde{k}\cos H & \text{pour la diffraction} \\ 0 & \text{pour le rayonnement} \end{cases} \tag{88}$$

Dans les deux cas, on a $E(0,0) = 1$. Le champ sur la carène est donc le champ bidimensionnel non modifié et on retrouve ainsi le cadre de la théorie des tranches "classique", sans interactions entre tranches.

6. INTERPRETATION PHYSIQUE DU RESULTAT.

Pour interpréter le résultat obtenu, il est intéressant de caractériser les phénomènes qui se produisent dans la couche d'eau superficielle, sur une épaisseur de l'ordre de grandeur du tirant d'eau du navire. Dans cette couche, $\bar{z}$ est d'ordre $\varepsilon^{1/3}$, donc par développement de Taylor:

$$N(\tilde{x},\bar{y},\bar{z}) = N(\tilde{x},\bar{y},0) + O(\varepsilon^{1/3})$$

Le résultat ne dépendant pas de $\tilde{\xi}_2$, on peut faire $\tilde{\xi}_2 \to \infty$ et on montre alors que:

$$N(\tilde{x},\bar{y},0) \to \frac{\tilde{\Omega}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\bar{y}}}\; e^{i\frac{\tilde{\Omega}^2}{2\bar{y}}\left(\tilde{x}+2\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\bar{y}\right)^2}$$

En conséquence, dans la couche d'eau superficielle, on a:

$$\bar{\Phi}_0 = K_0(\tilde{x},\bar{y}) \overset{\tilde{x}}{\ast} \bar{\Phi}_0^{2D}\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\,;\,\tilde{x}\right) \tag{89}$$

où

$$K_0(\tilde{x},\bar{y}) = H(\bar{y})\exp\left\{i\frac{\tilde{\Omega}^2}{2\bar{y}}\left(\tilde{x}+2\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\bar{y}\right)^2\right\} + H(-\bar{y})\exp\left\{i\frac{\tilde{\Omega}^2}{-2\bar{y}}\left(\tilde{x}-2\tilde{\Omega}\tilde{F}_L\bar{y}\right)^2\right\}$$

Il est satisfaisant de remarquer qu'on généralise des notions connues de longue date en optique. En effet, à Froude nul, la convolution (89) exprime que l'on passe de $\bar{\Phi}_0^{2D}$ à $\bar{\Phi}_0$ par une transformation de Fresnel ((9)).

Pour aboutir à une interprétation plus explicite, on peut revenir aux variables dimensionnées. Le noyau est alors défini par:

$$\mathcal{N}_0(x,y) = \frac{\omega\,e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi g y}}\; e^{i\frac{\omega^2}{2gy}\left(x+2\frac{\omega U}{g}y\right)^2} \tag{90}$$

et symétrisé:

$$\mathcal{K}_o(x,y) = H(y)\,\mathcal{N}_o(x,y) + H(-y)\,\mathcal{N}_o(x,-y) \tag{91}$$

$\mathcal{K}_o$ a la dimension de l'inverse d'une longueur.

Le potentiel total est ensuite donné par:

$$\Phi_o = \Phi_o^{2D}(x,y,z) \overset{x}{*} \mathcal{K}_o(x,y) \tag{92}$$

où $\Phi_o^{2D}(x,y,z)$ est le potentiel bidimensionnel classique calculé dans la tranche d'abscisse x.

Pour visualiser le champ total produit par une tranche, on considère maintenant le cas où une seule tranche, située à l'abscisse x_T, est "active"; ceci se traduit par un potentiel bidimensionnel de la forme:

$$\Phi_o^{2D}(x,y,z) = \psi_o^{2D}(x_T,y,z)\ \delta(x-x_T) \tag{93}$$

Dès qu'on s'éloigne un peu de la carène, le potentiel dans la tranche représente une onde bidimensionnelle sortante soit, du coté des $y>0$, avec $\nu = \omega^2/g$:

$$\psi_o^{2D} \sim e^{-\nu z}\, e^{i\nu y}$$

L'application de (92) conduit alors à:

$$\Phi_o \sim e^{-\nu z}\, e^{i\nu y}\ \delta(x-x_T) \overset{x}{*} \mathcal{N}_o(x,y)$$

soit, avec $\tau = \omega U/g$:

$$\Phi_o(x,y,z) \sim e^{-\nu z}\, \frac{\omega e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi g y}}\, e^{i\nu\left[\frac{1}{2y}(x-x_T+2\tau y)^2 + y\right]} \tag{94}$$

Ce champ d'ondes a une amplitude décroissante en $1/\sqrt{y}$ latéralement. En réintroduisant la dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$, on voit que les iso-phases sont caractérisées par:

$$\nu\left[\frac{1}{2y}(x-x_T+2\tau y)^2 + y\right] - \omega t = \text{constante} = \alpha$$

soit:

$$\frac{(x-x_T+2\tau y)^2}{2} + \left(y - \frac{\alpha+\omega t}{2\nu}\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\omega t}{2\nu}\right)^2 \tag{95}$$

La tranche située en x_T engendre donc un champ d'ondes tridimensionnelles de fronts elliptiques qui divergent à partir de la tranche dans une direction d'autant plus inclinée vers l'arrière que τ est grand, comme cela est montré par la figure 3.

8. CONCLUSION.

Dans cette communication, on examine le problème linéarisé de la tenue à la mer des navires élancés. On montre que la méthode des échelles multiples fournit naturellement un cadre asymptotique cohérent pour justifier la méthode des tranches, en introduisant quatre échelles de distance: εL, $\varepsilon^{\frac{2}{3}} L$, $\varepsilon^{\frac{1}{3}} L$, L . Cette méthode permet de proposer une approche générale, dans laquelle la condition de Lighthill conduit à la prise en compte de l'influence de la nature tridimensionnelle du champ de vagues sur l'écoulement bidimensionnel engendré par chaque tranche.

L'examen du cas particulier des carènes à pente faible permet d'établir rigoureusement la théorie des tranches classique sans interactions entre tranches et d'en préciser les conditions de validité.

L'interprétation du cas général indique que la prise en compte des interactions entre tranches se traduit par une convolution longitudinale entre les solutions locales bidimensionnelles de tranches et un noyau oscillant associé aux ondes tridimensionnelles engendrées par chaque tranche. Un résultat nouveau à souligner est qu'il s'agit d'une convolution entre des quantités connues et qu'il n'y a donc pas d'équation intégrale supplémentaire à résoudre sur la longueur du navire.

Alors, la tenue à la mer des navires élancés est-elle une affaire d'échelles multiples? A l'heure actuelle, aucune application numérique reposant sur les idées présentées n'est encore effectuée. Néanmoins, du point de vue théorique, on peut conclure que les échelles multiples permettent, de façon satisfaisante, de construire une méthode des tranches généralisée.

-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

REFERENCES

((1)) KORVIN-KROUKOVSKY B.V., Investigation of ship motion in regular waves, SNAME Trans., vol. 63, 1955, pp. 386-435.

((2)) OGILVIE T.F., TUCK E.O., A rational strip theory of ship motions: part I, Dept. of Nav. Arch. and Mar. Eng., Univ. of Michigan, Rep. n° 013, 1969.

((3)) FALTINSEN O., A rational strip theory of ship motions: part II, Dept. of Nav. Arch. and Mar. Eng., Univ. of Michigan, Rep. n° 113, 1971.

((4)) SALVESEN N., TUCK E.O., FALTINSEN O., Ship motions and sea loads, SNAME Trans., vol. 78, 1970, pp.250-287.

((5)) NEWMAN J.N., SCLAVOUNOS P., The unified theory of ship motions, 13th symp. on Naval Hydrodynamics, IV-1, Tokyo, 1980.

((6)) FERNANDEZ G., Une nouvelle façon d'aborder le problème de la diffusion d'ondes par un corps élancé en moyennes fréquences, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série II, n°4, 1986.

((7)) EUVRARD D., JAMI A., MORICE C., OUSSET Y., Calcul numérique des oscillations d'un navire engendrées par la houle, I. Le problème tridimensionnel et l'approximation des tranches, J. de Mécanique, vol. 16, n°2, 1977.

((8)) LENOIR M., Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance de vagues bidimensionnelle, Thèse Paris VI, Rapport ENSTA n°164, 1982.

((9)) GOODMAN J.W., Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie, Masson, Paris, 1972.

<table>
<tr><th colspan="2">Paramètres</th><th>Domaine intérieur</th><th>Domaine extérieur</th><th>Observations</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$\tau \ll F_L^2$</td><td>$F_L^2 \ll 1$</td><td rowspan="3">$\dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\zeta}} = 0$</td><td>$\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \sim 1$</td><td>$F_L^2 \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} - \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{\varepsilon} \gg F_L^2 \gg 1$</td><td rowspan="3">$\dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} = 0$</td><td rowspan="3">Linéarisation de validité douteuse</td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \sim \dfrac{1}{\varepsilon}$</td><td>$(F_L^2 \varepsilon) \dfrac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\zeta}} = 0$</td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \gg \dfrac{1}{\varepsilon}$</td><td>$\dfrac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}^2} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\tau \sim F_L^2$</td><td>$F_L^2 \ll 1$</td><td rowspan="3">$\dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\zeta}} = 0$</td><td>$\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \sim 1$</td><td>COMPLETE</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{\varepsilon} \gg F_L^2 \gg 1$</td><td rowspan="3">$\left(i \dfrac{\tau}{F_L} + F_L \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)^2 \bar{\Phi} = 0$</td><td rowspan="3">Linéarisation de validité douteuse</td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \sim \dfrac{1}{\varepsilon}$</td><td>COMPLETE</td></tr>
<tr><td>$F_L^2 \gg \dfrac{1}{\varepsilon}$</td><td>$\left(i \dfrac{\tau}{F_L} + F_L \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^2 \tilde{\Phi} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\tau \gg F_L^2$</td><td>$\tau \ll F_L$</td><td rowspan="3">$\dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\zeta}} = 0$</td><td>$\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$</td><td rowspan="2">$F_L \ll 1$</td></tr>
<tr><td>$\tau \sim F_L$</td><td>$\dfrac{\tau^2}{F_L^2} \bar{\Phi} - \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$</td></tr>
<tr><td>$F_L \ll \tau \ll \dfrac{F_L}{\sqrt{\varepsilon}}$</td><td rowspan="3">$\bar{\Phi} = 0$</td><td rowspan="2">$F_L \ll \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$</td></tr>
<tr><td>$\tau \sim \dfrac{F_L}{\sqrt{\varepsilon}}$</td><td>$\left(\dfrac{\varepsilon \tau^2}{F_L^2}\right) \tilde{\Phi} - \dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\zeta}} = 0$</td></tr>
<tr><td>$\tau \gg \dfrac{F_L}{\sqrt{\varepsilon}}$</td><td>$\tilde{\Phi} = 0$</td><td></td></tr>
</table>

TABLEAU 1: dégénérescences de la condition de surface libre.

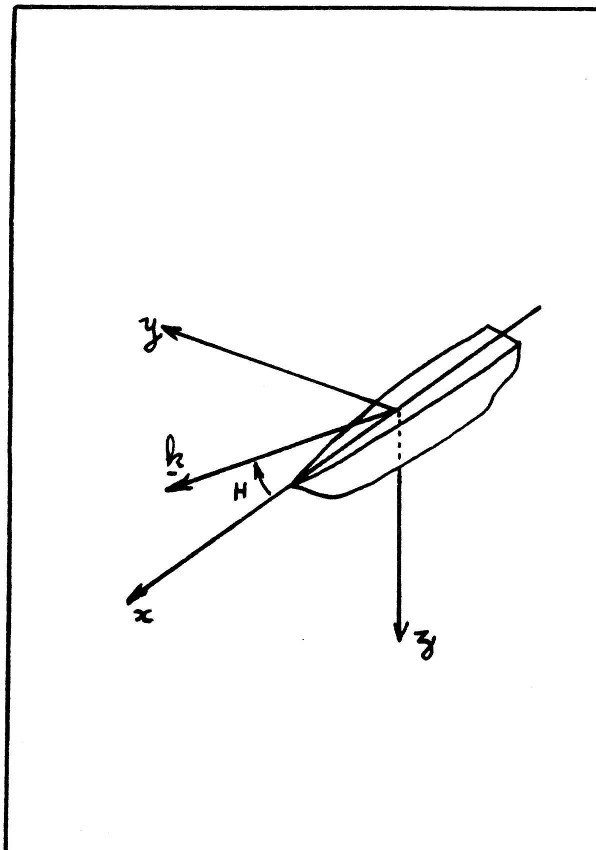

Figure 1: définitions, notations

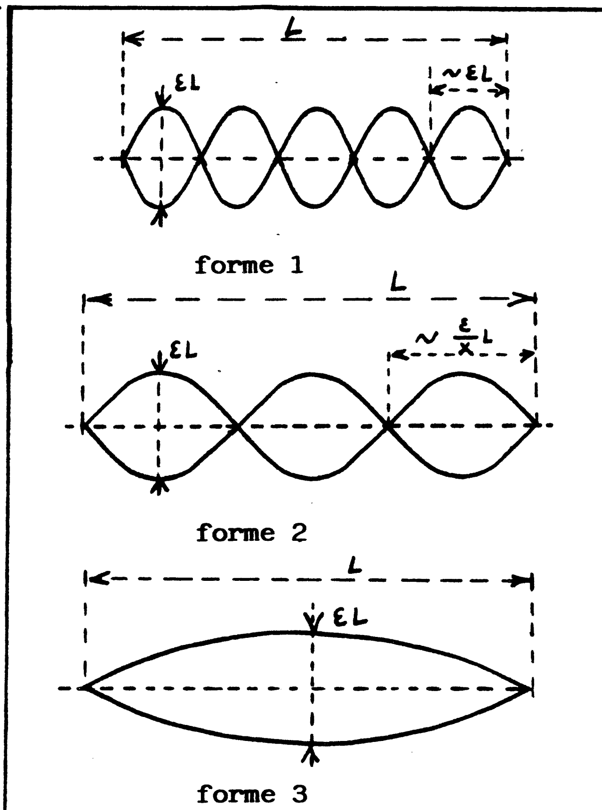

Figure 2: formes de carènes

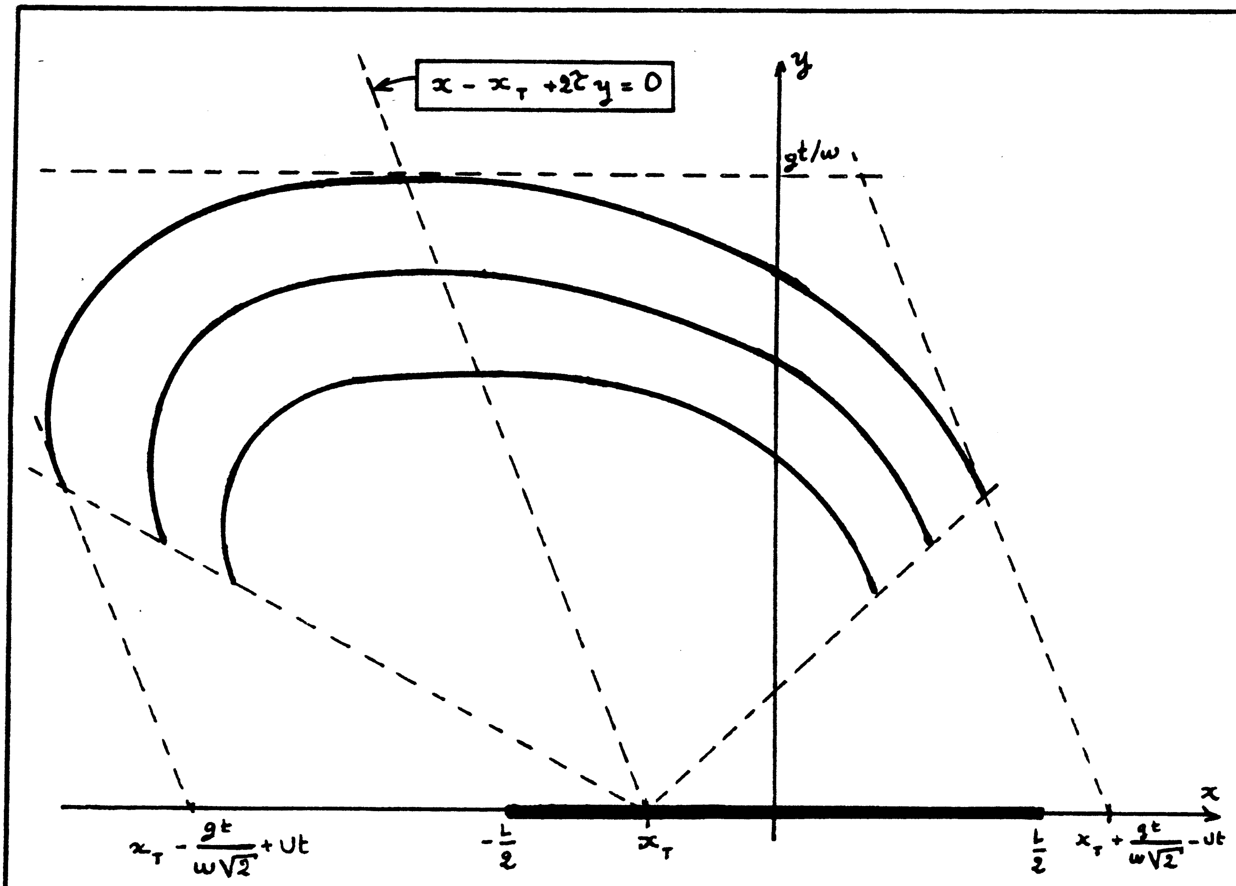

Figure 3: Ondes tridimensionnelles engendrées par la tranche x_T; $\tau = \omega U/g$