

1ères JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

16 au 18 Février 1987 - Nantes

ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME LINEARISE DE LA FORMATION ET DE LA PROPAGATION DES ONDES DE GRAVITE

par

M. LENOIR et M. VERRIERE

E.N.S.T.A. - Centre de l'Yvette, Chemin de la Hunière
91120 PALAISEAU
Tél. 60.10.03.18

Résumé :

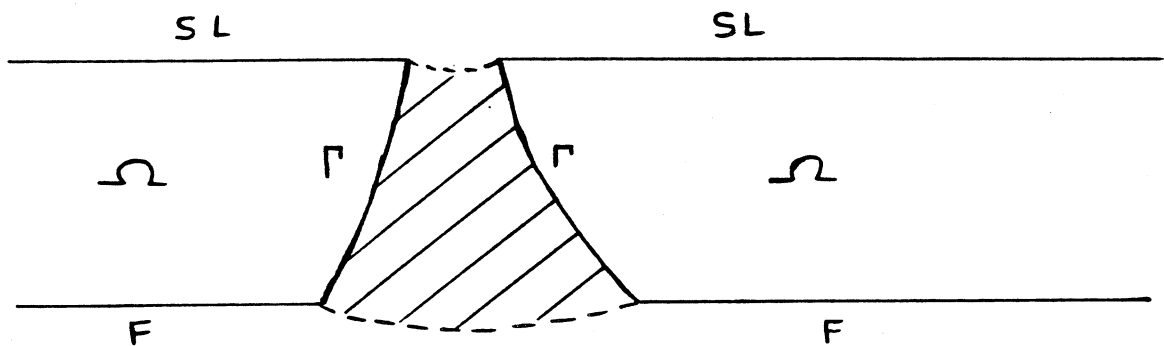
On résout les équations de l'hydrodynamique transitoire linéarisée par une méthode de semi-discrétisation en temps.

Summary:

A numerical solution of the linearized transient hydrodynamics equations by means of a time-discretisation method.

I - Modélisation du phénomène physique.

On s'intéresse au train de vagues généré dans un milieu marin par un glissement de terrain. On a donc un fluide assujéti aux actions de la pesanteur et au repos à l'instant initial. L'interface océan-atmosphère est réalisée par une surface libre à pression constante. Plus précisément, on note :



- . Ω un domaine fluide tridimensionnel et non borné,
- . F un fond fixe et imperméable,
- . SL la surface libre à pression constante,
- . Γ le support du glissement de terrain.

On a adopté les hypothèses simplificatrices suivantes :

- . fluide parfait, incompressible et irrotationnel,
- . absence de déferlement,
- . F est plat,
- . Γ est immobile et constitue le support d'une perturbation de vitesse normale supposée connue.

. L'amplitude du phénomène est suffisamment faible par rapport aux dimensions caractéristiques du problème pour que l'on puisse se situer dans le cadre de l'hydrodynamique linéarisée.

. En particulier, on a effectué les calculs de surface libre en négligeant la déformation de celle-ci au cours du temps.

Dans ces conditions, on résout classiquement un problème pour le potentiel des vitesses :

Trouver $\phi(x,y,z,t)$ vérifiant :

(P) $\Delta\phi = 0$ dans Ω ,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ sur SL } (z = 0),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur F,}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = h(t) \text{ sur } \Gamma,$$

$$\phi|_{\substack{\text{SL} \\ t=0}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t}|_{\substack{\text{SL} \\ t=0}} = 0.$$

En ce qui concerne l'obtention de ces équations, on pourra consulter par exemple [1].

II - Quelques références.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (P) sont démontrées par Garipov dans [2], pour le cas où la frontière Γ ne rencontre pas la surface libre.

En ce qui concerne la résolution numérique, il faut citer la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale, due à Jami et Lenoir et exposée dans [3] et [1].

Le principe en est le suivant :

- 1) - Connaissance de la fonction de Green associée au problème (P) ;
soit $H_M(P,t)$ vérifiant :

(DP)
$$\Delta H_M(P,t) = \delta_M(P) \otimes \delta(t), \quad -1 < z < 0$$

$$\frac{\partial H_M(P,t)}{\partial z} = 0, \quad z = -1$$

$$\frac{\partial^2 H_M(P,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial H_M(P,t)}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$H_M|_{\substack{\text{SL} \\ t=0}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_M}{\partial t}|_{\substack{\text{SL} \\ t=0}} = 0$$

où le point M est tel que $-1 < z_M < 0$

2) - Validité de la représentation intégrale suivante :

$$(RI) \quad \left[\begin{aligned} \phi(M,t) &= \int_{\Gamma} (\phi(P,t) \frac{\partial G_M}{\partial n}(P) - h(P,t) G_M(P)) ds(P) \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma} (\phi(P,t-\tau) \frac{\partial F_M}{\partial n}(P,\tau) - h(P,t-\tau) F_M(P,\tau)) ds(P) d\tau \end{aligned} \right.$$

avec :

(i) $M \in \Omega$,

(ii) ϕ solution de (P),

(iii) $H_M(P,\tau) = G_M(P) \delta(\tau) + Y(\tau) F_M(P,\tau)$,

où G_M et F_M sont précisées dans [1].

3) - Introduction d'une surface arbitraire Σ dite de couplage ;
on se ramène ainsi à un calcul en domaine borné en écrivant
que la représentation intégrale est vérifiée sur Σ .

Soit le problème équivalent :

Trouver $\phi(x,y,z,t)$ tel que :

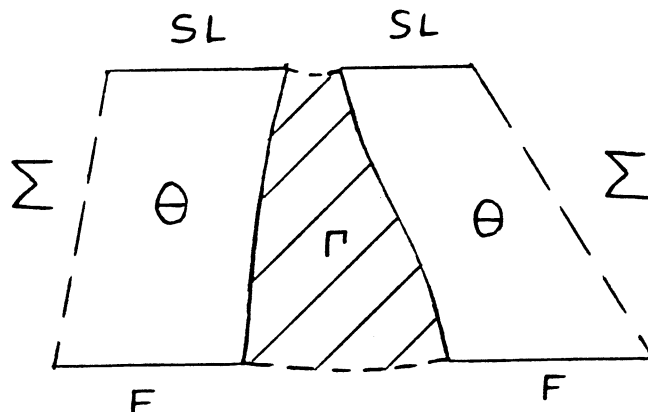
$$\Delta \phi = 0 \text{ dans } \theta,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } F,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = h(t) \text{ sur } \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } SL,$$

θ conditions initiales et écriture de (RI) sur Σ .



4) - Enfin, on résout le problème (Q) à l'aide d'une discrétisation par éléments finis.

Dans cette méthode, la prise en compte du caractère non borné du domaine Ω s'effectue par l'intermédiaire d'une convolution qui garde en mémoire toute l'histoire du phénomène. Pour le problème (P) le calcul de la fonction de Green s'avère extrêmement délicat : dans le cas bidimensionnel il a été réalisé par Cohen [4], tandis que le cas tridimensionnel fait actuellement l'objet d'un travail de Guer [5].

Afin de pallier ces difficultés, on a mis en oeuvre une méthode numérique alternative à la méthode de couplage.

III - Méthode numérique proposée.

Après avoir introduit un schéma aux différences finies en temps dans l'équation de surface libre, on s'est intéressé à une grandeur liée à la semi-discrétisation en temps. Pour cette variable intermédiaire, on a traité séparément les deux aspects suivants du problème : d'une part la perturbation locale au voisinage de la frontière Γ , et d'autre part la propagation à l'infini sur la surface libre.

a) Semi-discrétisation en temps sur SL.

Notant $u^n(.) = u(., n\Delta t)$, on écrit l'approximation :

$$\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi^n}{\partial n} \approx \frac{a\phi^{n+1} + b\phi^n + c\phi^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{\partial}{\partial n} (\alpha\phi^{n+1} + \beta\phi^n + \gamma\phi^{n-1}),$$

et on choisit comme inconnue auxiliaire la grandeur définie par :

$\chi^{n+1} = \alpha \phi^{n+1} + \beta \phi^n + \gamma \phi^{n-1}$. Etant donné la linéarité du problème, on obtient aussitôt les équations vérifiées par χ^{n+1} ; soit :

$$(P') \quad \left[\begin{array}{l} \Delta \chi^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ sur } F, \\ \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial n} = g^{n+1} \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial n} + \mu \chi^{n+1} = f^n \text{ sur } SL. \end{array} \right. \quad \text{avec :} \quad \left[\begin{array}{l} g^{n+1} = \alpha h^{n+1} + \beta h^n + \gamma h^{n-1}, \\ f^n = v_1 \phi^n + v_2 \phi^{n-1}, \\ \mu = \frac{a}{\alpha} \frac{1}{\Delta t^2}, \\ v_1 = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\frac{a\beta}{\alpha} - b \right), \\ v_2 = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\frac{a\gamma}{\alpha} - c \right). \end{array} \right.$$

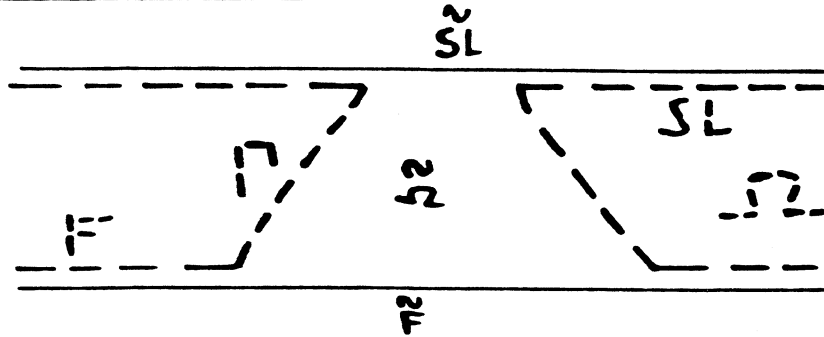
(P') ne dépend du temps que par l'intermédiaire de son second membre, dont il faut distinguer les deux composantes :

- 1) g^{n+1} : représente la perturbation donnée initialement pour (P) et est à support borné en espace et en temps.

- 2) f^n : provient des instants passés et se propage à priori sur toute la surface libre.

Chacun de ces deux termes a fait l'objet d'un traitement approprié.

- b) Résolution du problème (P').



Le symbole \tilde{F} signifie qu'on a étendu l'ensemble F en oubliant Γ ; de même, une grandeur u définie sur F se prolonge régulièrement en une grandeur \tilde{u} définie sur \tilde{F} .

Le calcul de la solution de (P') s'effectue à l'aide d'un relèvement harmonique de la donnée f^n , suivi d'une résolution en domaine borné autour de Γ . On a les deux formulations suivantes :

$$(F_0) \quad \left[\begin{array}{l} \Delta \chi_0^{n+1} = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \\ \partial_n \chi_0^{n+1} + \mu \chi_0^{n+1} = \tilde{f}^n \text{ sur } \tilde{SL} \quad (P_1), \\ \partial_n \chi_0^{n+1} = 0 \text{ sur } \tilde{F}. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \Delta \chi_1^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n \chi_1^{n+1} + \mu \chi_1^{n+1} = 0 \text{ sur } SL, \\ \partial_n \chi_1^{n+1} = 0 \text{ sur } F, \\ \partial_n \chi_1^{n+1} = \varepsilon^{n+1} - \partial_n \chi_0^{n+1} \\ \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

après quoi $\chi^{n+1} = \chi_0^{n+1} + \chi_1^{n+1}$.

(F_0) peut se résoudre simplement dans le plan de Fourier (cf. Annexe 1). En ce qui concerne (F_1), il est nécessaire d'employer une technique de résolution d'un problème variationnel posé en domaine non borné : couplage éléments finis-représentation intégrale ou encore éléments finis localisés (cf. Annexe 2).

IV - Conclusion.

En commençant par une semi-discrétisation en temps on a évité d'avoir à considérer la fonction de Green du problème instationnaire. Le terme de convolution qui apparaissait dans la formule (RI) est remplacé par une intégrale portant sur SL et servant au calcul de $\partial_n \chi_0|_{\Gamma}$. Des

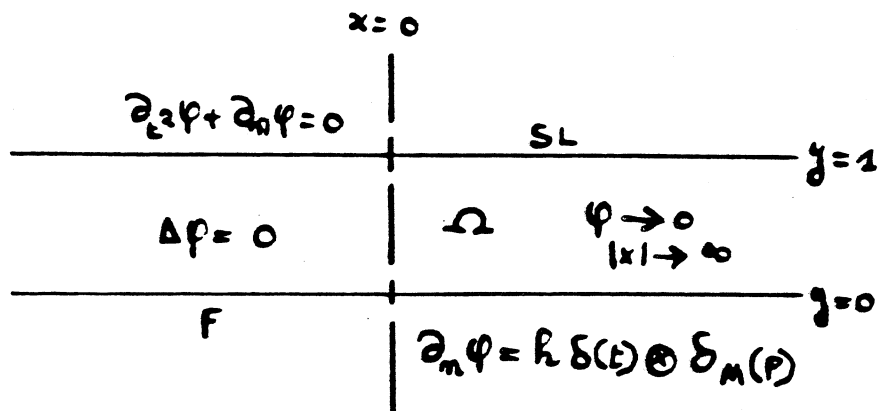
essais numériques et quelques considérations analytiques développées dans [6], ont permis de s'assurer de la bonne stabilité de la méthode.

V - BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. JANI : *"Etude théorique et numérique de phénomènes transitoires en hydrodynamique navale"* ; thèse de doctorat es sciences, rapport ENSTA 154 ; 1982.
- [2] RM. GARIPPOV : *"On the linear theory of gravity waves : the theorem of existence and uniqueness"* ; arch. of rat. Mech. ; 1967.
- [3] A. JANI ; M. LENOIR : *A variational formulation for exterior problems in unbounded domains in linear hydrodynamics*. Comp. meth. in applied Mech. and Eng. Vol. 16 pp. 341-359(1978).
- [4] G. COHEN ; P. JOLY : *Propagation de vagues linéaires en milieu bidimensionnel de profondeur finie*. Rapport INFLA 1985.
- [5] M. CUER : à paraître.
- [6] G. COHEN ; P. JOLY ; A. BAMBERGER ; M. LENOIR ; M. VERRIERE : Rapport ENSTA - INFLA. à paraître.
- [7] M. LENOIR : *"Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance de vagues bidimensionnelle"*. Rapport de Recherche ENSTA N° 164 mai 1982.

RESULTATS NUMERIQUES

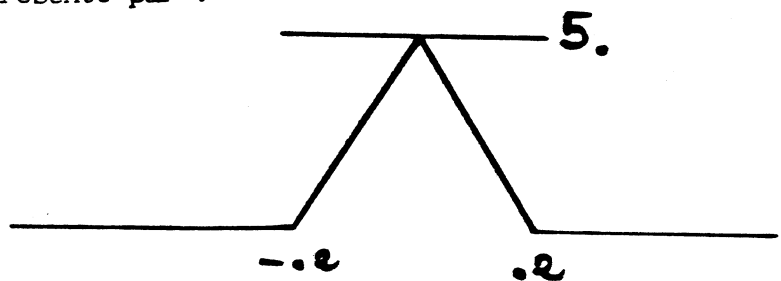
On a testé le problème suivant :



$P \in F$

(i) $P \neq M, \forall t \in \mathbb{R}, \partial_n \phi(p) = 0$

(ii) $\partial_n \phi(M)$ est représenté par :



Choix des paramètres :

$$\begin{aligned} a &= .25 \\ a &= .25 \\ \Delta t &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= .5 \\ b &= -.5 \end{aligned}$$

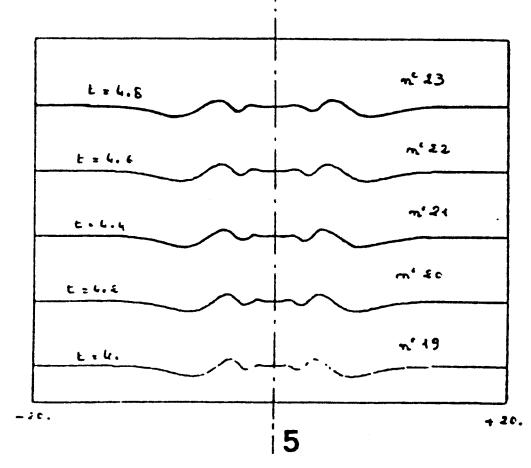
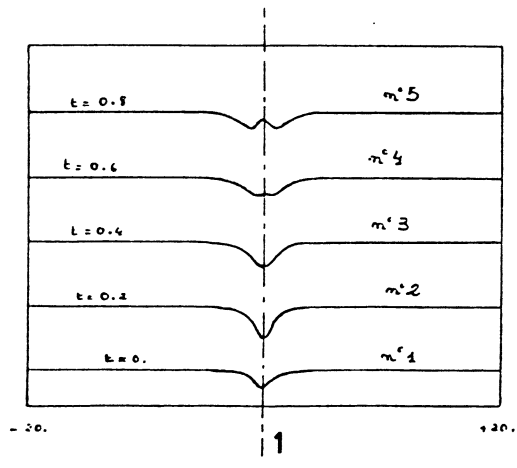
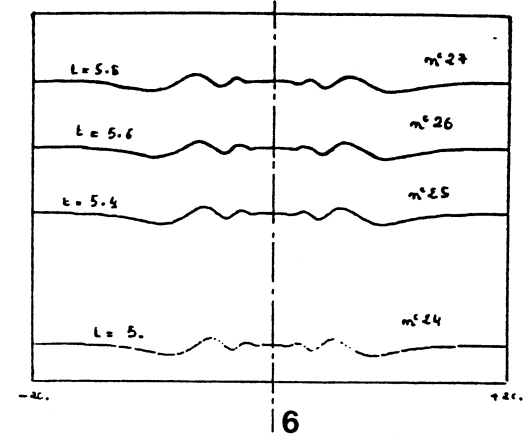
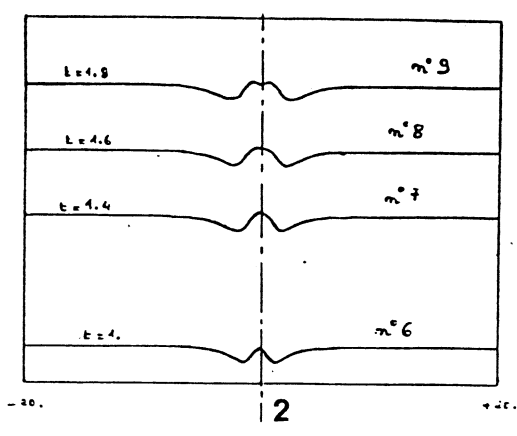
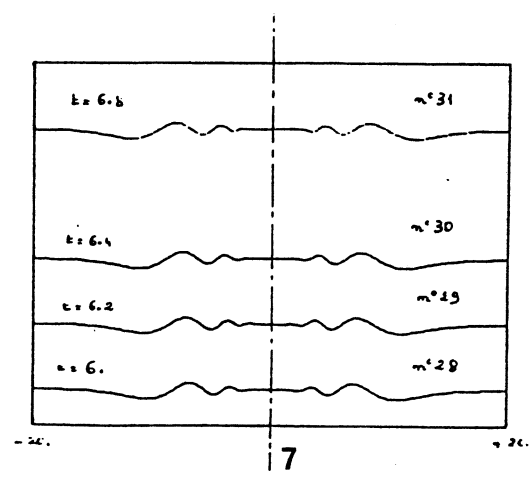
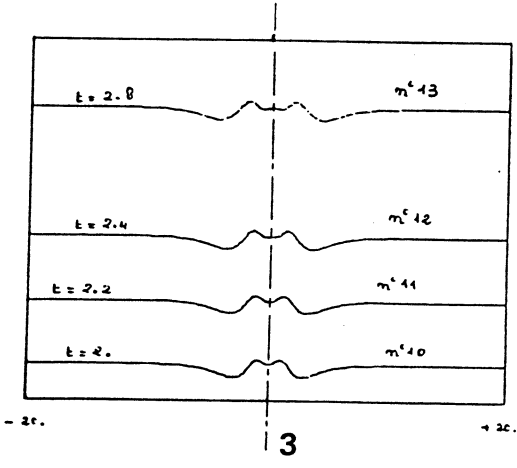
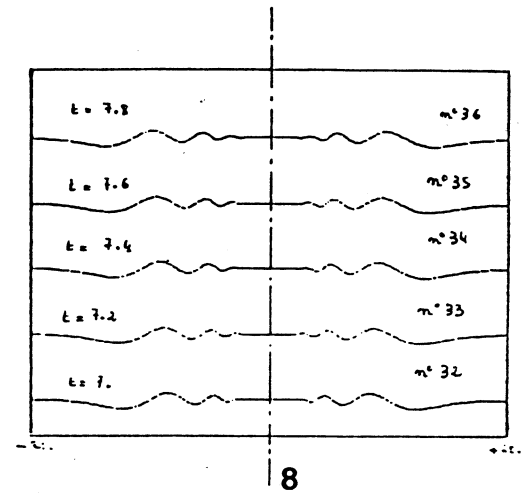
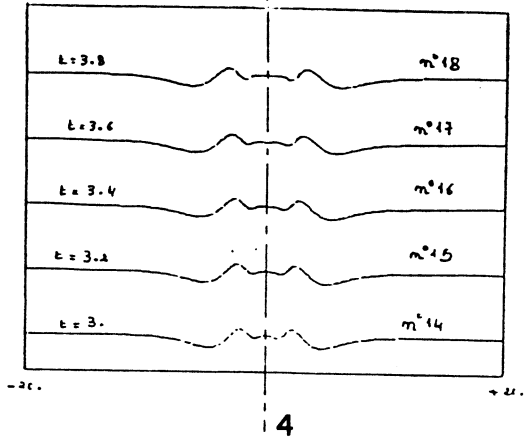
$$\begin{aligned} \gamma &= .25 \\ c &= .25 \end{aligned}$$

instant initial : $t_0 = -0.2$

taille de la surface libre prise en compte :

$$X_{\min} = -20.$$

$$X_{\max} = 20.$$



n°	ordonnée maximum	abscisse de ordonnée	n°	ordonnée maximum	abscisse de ordonnée	n°	ordonnée maximum	abscisse de ordonnée
1	0.	20.	13	.035	2.	25	.036	5.7
2	0.	20.	14	.036	2.2	26	.036	6.
3	0.	20.	15	.037	2.5	27	.035	6.4
4	0.	20.	16	.037	2.7	28	.035	6.7
5	0.	20.	17	.038	3.	29	.035	7.
6	0.	20.	18	.038	3.3	30	.035	7.3
7	.024	0.	19	.038	3.6	31	.034	8.
8	.019	0.	20	.037	3.9	32	.034	8.3
9	.022	.8	21	.037	4.2	33	.034	8.7
10	.025	1.	22	.037	4.5	34	.034	9.
11	.028	1.2	23	.037	4.8	35	.033	9.3
12	.030	1.5	24	.036	5.1	36	.033	9.7

Tableau 1 : Ordonnées maximum des différentes courbes présentées.

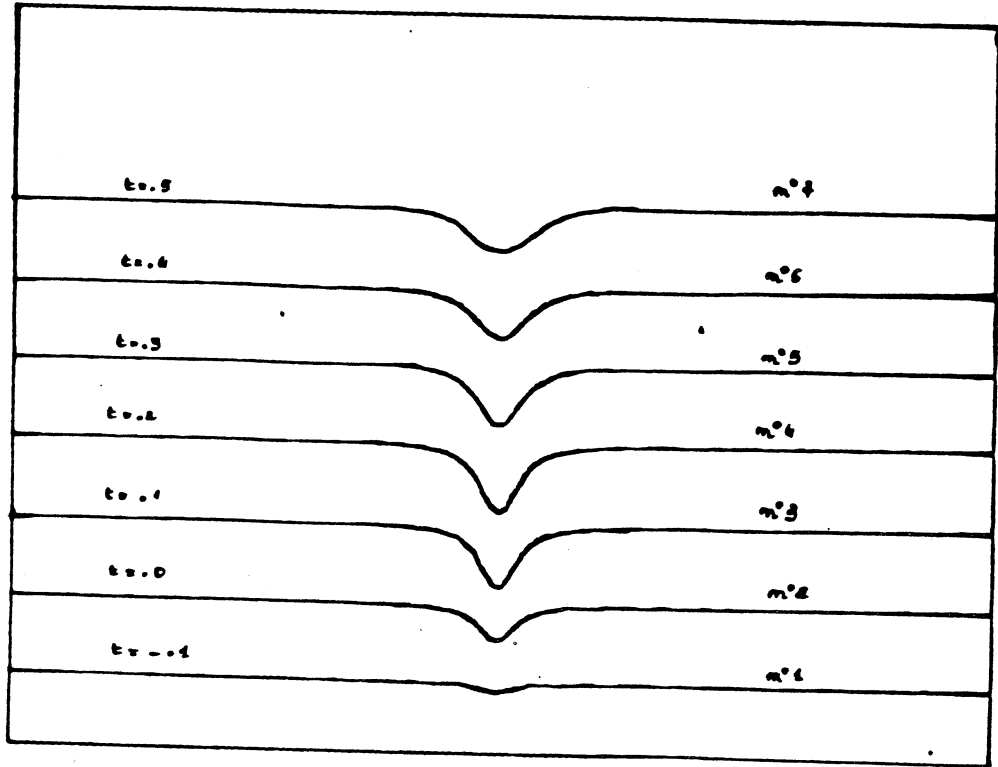
n°	Ordonnée minimum	abscisse de ordonnée	n°	Ordonnée minimum	abscisse de ordonnée	n°	Ordonnée minimum	abscisse de ordonnée
1	-.095	0.	13	-.065	4.4	25	-.054	9.2
2	-.177	0.	14	-.063	4.7	26	-.054	9.6
3	-.141	0.	15	-.062	5.1	27	-.053	10.
4	-.099	0.6	16	-.061	5.5	28	-.052	10.4
5	-.090	1.1	17	-.060	5.8	29	-.052	10.7
6	-.085	1.3	18	-.060	6.2	30	-.052	11.1
7	-.078	1.9	19	-.059	6.6	31	-.051	11.9
8	-.075	2.1	20	-.058	7.1	32	-.050	12.3
9	-.073	2.6	21	-.057	7.3	33	-.050	12.6
10	-.071	2.9	22	-.057	7.7	34	-.049	13.
11	-.069	3.3	23	-.056	8.1	35	-.049	13.4
12	-.067	3.6	24	-.055	8.5	36	-.049	13.8

Tableau 2 : Ordonnées des différentes courbes présentées.

Essai avec $\Delta t = 0.1$

La convergence de la méthode paraît confirmée ; on a les résultats :

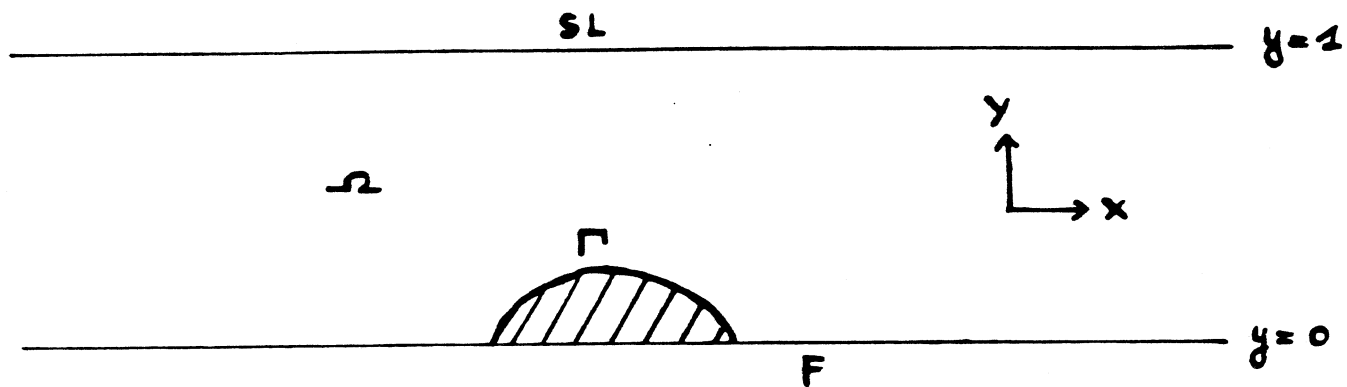
N°	Ordonnée en 0
1	- . 0 2 4
2	- . 0 9 6
3	- . 1 6 5
4	- . 1 7 9
5	- . 1 6 3
6	- . 1 4 1
7	- . 1 1 6



Annexes

PRESENTATION DU CAS BIDIMENSIONNEL

Dans le but d'opérer une première mise en oeuvre informatique de la méthode exposée précédemment, on s'est intéressé au cas bidimensionnel qui suit :



Γ délimite une bosse fixe (ou éventuellement un creux) posé sur le fond de la mer, qui est plat. Le domaine Ω s'étend sur tout F dans la direction des x .

Rappelons les équations du problème continu :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur SL} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur F} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = h(t) \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

D'autre part, le fluide est supposé au repos à l'instant initial t_0 .

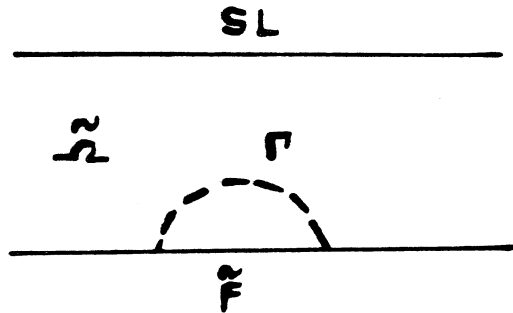
La connaissance à chaque instant du potentiel à la surface libre est suffisante pour déterminer la propagation du train de vagues, en vertu de la relation : $\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\phi}{\partial t}$

On s'efforcera donc, autant que possible, de se limiter à des calculs sur la surface libre.

Annexe 1
 RESOLUTION DU PROBLEME (P₀)
 EN BIDIMENSIONNEL

Rappel des équations. Les inconnues utiles.

$$(P_0) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \chi_0}{\partial y} + \mu \chi_0 = f \text{ sur } SL \\ \Delta \chi_0 = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi_0}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$



Le véritable problème n'est pas, en réalité, la détermination complète de χ_0 , mais peut plutôt se formuler ainsi : connaissant f sur SL , trouver $\frac{\partial \chi_0}{\partial n}$ sur Γ .

On va utiliser à cet effet une représentation intégrale

Transformée de Fourier du problème.

Pour toute grandeur $\psi(x,y)$, $\hat{\psi}(\xi,y)$ désigne la transformée de Fourier de ψ dans la direction des x . Appliquant cette transformation aux équations relatives au problème (P₀), on obtient :

$$-4\pi^2 \xi^2 \hat{\chi}_0(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{\chi}_0(\xi, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{\partial \hat{\chi}_0}{\partial y}(\xi, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\chi}_0}{\partial y}(\xi, 1) + \nu \hat{\chi}_0(\xi, 1) = \hat{f}(\xi)$$

Si l'on fixe maintenant ξ , il reste une équation différentielle en y avec conditions aux limites, à résoudre sur $[0, 1]$. On trouve aussitôt

$$\hat{\chi}_0(\xi, y) = A(\xi) e^{2\pi\xi y} + B(\xi) e^{-2\pi\xi y}$$

$$\frac{\partial \hat{\chi}_0}{\partial y}(\xi, y) = 2\pi\xi(A(\xi) e^{2\pi\xi y} - B(\xi) e^{-2\pi\xi y})$$

Les conditions aux limites se traduisent par :

en $y = 0$

$$A(\xi) = B(\xi)$$

en $y = 1$

$$2\pi\xi A(\xi)(e^{2\pi\xi} - e^{-2\pi\xi}) + \nu A(\xi)(e^{2\pi\xi} + e^{-2\pi\xi}) = \hat{f}(\xi)$$

On a donc les deux relations suivantes :

$$\hat{\chi}_0(\xi, 1) = 2 A(\xi) \text{ch} 2\pi\xi$$

$$\hat{f}(\xi) = 2 A(\xi)(2\pi\xi \text{sh} 2\pi\xi + \nu \text{ch} 2\pi\xi)$$

d'où :

$$\hat{\chi}_0(\xi, 1) = \frac{\hat{f}(\xi)}{2\pi\xi \text{th} 2\pi\xi + \nu}$$

Représentation intégrale :

Notant $G_M(p)$ la fonction de Green vérifiant :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_p G_M(p) = \delta_M(p) \text{ dans } \tilde{\Omega} \\ \frac{\partial G_M(p)}{\partial y_p} = 0 \quad \text{sur } F \\ \frac{\partial G_M(p)}{\partial y_p} + \mu G_M(p) = 0 \text{ sur } SL, \end{array} \right.$$

où M est un point intérieur à $\tilde{\Omega}$;

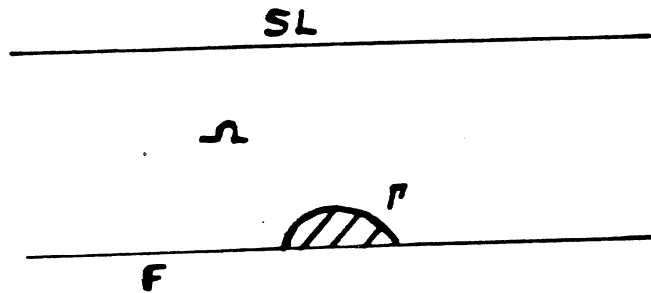
Une formule de Green classique permet d'écrire :

$$x_0(M) = - \int_{-\infty}^{+\infty} G_M(x_p, 1_p) f(x_p) dx_p.$$

$\frac{\partial x_0(M)}{\partial r_M} \Big|_{\Gamma}$ s'obtient alors en dérivant sous le signe somme.

Annexe 2
 RESOLUTION DU PROBLEME (P₁)
 EN BIDIMENSIONNEL : ELEMENTS
 FINIS LOCALISES

Rappel de la formulation.

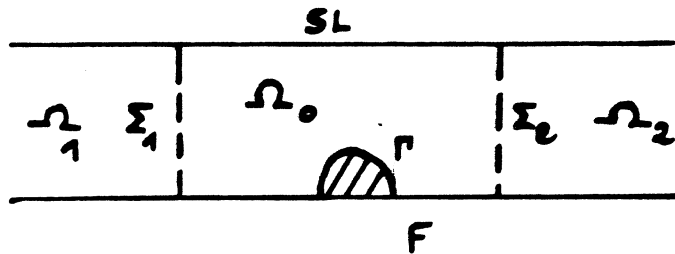


On a les équations suivantes :

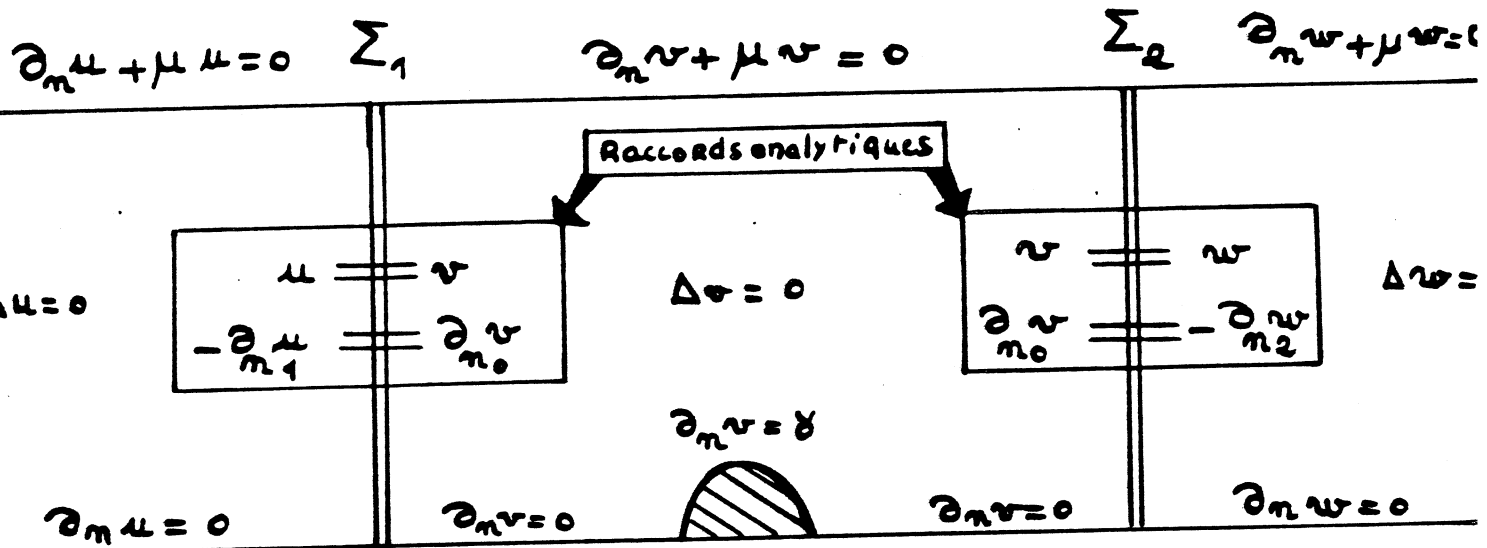
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial n} \chi_1 + \mu \chi_1 = 0 \text{ sur } SL \\ \Delta \chi_1 = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \chi_1 = 0 \text{ sur } F \\ \frac{\partial}{\partial n} \chi_1 = \gamma \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Méthode des éléments finis localisés. Introduction.

Le domaine Ω est infini dans une direction, et ne peut donc faire l'objet d'un calcul par éléments finis. Afin de parer à cette difficulté, on introduit deux frontières fictives Σ_1 et Σ_2 à distance finie du bord Γ . On délimite ainsi un nouveau domaine Ω_0 , qui pourra constituer le support d'une approximation numérique.



La question est maintenant de déterminer les conditions à imposer sur Σ_1 et Σ_2 . On a en fait un couplage entre trois problèmes distincts :



Considérons par exemple, le cas de la frontière Σ_1 ; n_i étant la normale extérieur à Ω_i :

$$(1) \quad \begin{cases} u = v \\ -\partial_{n_1} u = \partial_{n_0} v \end{cases}$$

Il s'agit donc de remplacer ces deux relations de raccord entre u et v , par une condition unique portant seulement sur v ; ceci revient, en quelque sorte, à éliminer u dans les équations du système (1).

L'opérateur de raccordement.

a/ définition

Nous définissons le problème (E X T 1) $_{\alpha}$ par :

$$\begin{array}{c}
 \Sigma_1 / \\
 \hline
 \partial_n u + \mu u = 0 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc}
 \mu \rightarrow 0 & \Omega_1 / & \Delta u = 0 \\
 x \rightarrow -\infty & & \mu = \alpha
 \end{array} \\
 \hline
 \partial_n u = 0 \\
 \hline
 F /
 \end{array}$$

On note u_α la solution du problème (E X T 1) en admettant que celui-ci est bien posé. On définit alors l'opérateur de α raccordement T_1 par :

$$\begin{array}{l}
 \parallel \\
 T_1 : H^{1/2}(\Sigma_1) \longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma_1) \\
 \alpha \longrightarrow T_1 \alpha = \partial_{n_1} u_\alpha
 \end{array}$$

On vérifie aisément que le raccord analytique entre u et v est équivalent à la relation :

$$\partial_{n_0} v|_{\Sigma_1} + T_1(v|_{\Sigma_1}) = 0$$

b/ expression analytique.

La simplicité du domaine extérieur Ω_1 permet d'expliciter T_1 sous la forme d'une série. On démontre (cf. par exemple [7]) :

$$\begin{array}{l}
 v_\alpha \in L^2(\Sigma_1), \quad \alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \alpha \varepsilon_k dy \right) \varepsilon_k \\
 \text{et} \quad T_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \left(\int_0^1 \alpha \varepsilon_k dy \right) \varepsilon_k
 \end{array}$$

avec : (i) v_k solutions de l'équation $\operatorname{tg} n = \frac{u}{x}$, $x > 0$

$$(ii) g_k(y) = \left(\int_0^1 \cos^2 v_k y \, dy \right)^{-1/2} \cos v_k y$$

Remarque :

On dispose également d'un opérateur T_2 , défini de façon tout à fait analogue.

Couplage avec des éléments finis.

Les deux opérateurs T_1 et T_2 interviennent naturellement dans la formulation variationnelle ¹ du problème posé sur le domaine borné Ω_0 , et ceci par l'intermédiaire des dérivées normales intervenant dans la ⁰ formule de Green.