

ANALYSE DES CHAMPS VECTORIELS ET SCALAIRES DANS DES ÉCOULEMENTS POTENTIELS À SURFACE LIBRE

VECTORIAL AND SCALAR FIELDS ANALYSIS IN POTENTIAL FREE SURFACE FLOWS

Y.-M. SCOLAN⁽¹⁾

yves-marie.scolan@ensta-bretagne.fr

H.B. BINGHAM⁽²⁾

hbbs@dtu.dk

⁽¹⁾ ENSTA Bretagne, IRDL UMR 6027, Brest, France

⁽²⁾ Danmarks Tekniske Universitet, 2800 Lyngby, Denmark

Résumé

Peu d'études portent sur une analyse fine des propriétés cinématiques et dynamiques du fluide pour des écoulements à surface libre fortement non-linéaires. Ainsi depuis peu, on est capable de capturer numériquement des phénomènes critiques dont l'apparition n'est pas complètement comprise. On se propose ici de faire le point sur les mécanismes qui précèdent leur apparition grâce notamment à l'exploitation des propriétés du champ de pression, de son gradient et de sa courbure spatiale.

Summary

Few studies focus on a detailed analysis of the kinematic and dynamic properties of the fluid for strongly non-linear free surface flows. Recently, it has become possible to numerically capture critical phenomena whose emergence is not fully understood. Here, we propose to review the mechanisms that precede their appearance, particularly by exploiting the properties of the pressure field, its gradient, and its spatial curvature.

1 Introduction

L'analyse des écoulements potentiels à surface libre a ouvert et continue d'ouvrir la porte sur de nombreux phénomènes inattendus. Dans ce domaine Longuet-Higgins (voir [1] et [2] en particulier) a contribué d'une manière particulièrement significative à expliquer les raisons et à démontrer les mécanismes qui engendrent certains de ces phénomènes dès lors que les équations à résoudre sont non-linéaires. C'est en s'inspirant de sa démarche que l'on procède ici à l'analyse des propriétés de champs scalaires ou vectoriels sous la surface libre. Cela permet de décrire et commenter des phénomènes inattendus comme des excroissances locales voire des jets critiques en démontant les mécanismes qui les font apparaître.

Pour des houles de Stokes (voir [3]) on est capable de décrire avec précision les champs de vitesse, pression et accélération jusqu'à des cambrures importantes, voire la cambrure limite (voir [4]). Lors du déferlement d'une vague (voir [5]) on sait aussi dire où se trouvent les maxima de vitesse ou d'accélération. Les maxima de pression, s'ils existent, se trouvent souvent au fond d'un réservoir là où la pression hydrostatique l'emporte sur la pression dynamique. Pister les maxima de pression est essentiel pour la compréhension des jets critiques qui émanent de la surface libre, c'est le cas du *flip-through* (voir [6]) ou des jets décrits dans [7].

Les stades ultérieurs de l'écoulement dès lors qu'un maximum de pression a été identifié, a fait l'objet d'analyse poussée. Par exemple dans les travaux de [8] ou [9], on force l'apparition d'un maximum de pression au moyen d'une singularité. Cela permet de simuler des accélérations à la surface libre particulièrement importantes. Dans le même esprit on montre dans [10] quel est le comportement asymptotique du jet. En dépit de ces avancées, il reste la question essentielle relative au mécanisme d'apparition d'un maximum de pression. En effet cela revient à identifier les régions où le gradient de pression s'annule dans le fluide. Alternativement cela correspond aux régions où l'accélération Lagrangienne s'annule ; mais cela ne signifie pas nécessairement que les deux termes qui la constituent (transport convectif et accélération Eulérienne) soient faibles. Clairement il faut examiner plus en détail les champs scalaires et vectoriels dans le fluide. C'est précisément l'objet d'analyses récentes présentées dans [7]. Notamment on met en évidence une ligne particulière (dans un écoulement bidimensionnel) porteuse de beaucoup d'information. Cette ligne est formée de tous les points où le gradient de pression est colinéaire à un des deux vecteurs propres de la matrice Hessienne de la pression. Elle est notamment le support des points où le gradient de la pression s'annule. En outre plusieurs lignes de ce type peuvent coexister dans le fluide. De par leur connexité, elles relient des régions aux dynamiques très différentes, notamment il en existe toujours une qui se termine au bout d'une crête de vague y compris jusqu'à son retournement. On peut donc suivre de manière continue l'évolution de tous types de train d'onde.

C'est dans ce sens que l'on revisite ici des simulations qui ont déjà été décrites dans [11] et [12]. La génération d'une vague fortement non linéaire est classique. On met en mouvement un bassin rectangulaire selon un mouvement cyclique horizontal. Le mouvement n'est pas purement sinusoïdal pour éviter des accélérations et vitesses trop importantes au début de la simulation. Le code de génération du mouvement a été mis au point par Brosset de GTT et est utilisé dans [13] et [14].

Le modèle numérique qui fournit les résultats est détaillé dans [15]. Il s'agit du code FSID qui met en œuvre une méthode désingularisée combinée à une transformation conforme du domaine fluide, conduisant aussi à une optimisation significative de l'effort de

calcul. La solution numérique à tout instant est complètement déterminée par quelques caractéristiques de la surface libre. En stockant un minimum de données relatives à un profil instantané de la seule surface libre, on peut reconstruire, a posteriori, n'importe quel champ scalaire ou vectoriel dans le fluide. C'est le cas de la pression et de ses dérivées en espace. Ces aspects numériques sont détaillés en annexe.

2 Résultats illustratifs

On procède à l'analyse d'un écoulement produit dans un bassin rectangulaire de longueur $L = 1m$ et rempli jusqu'à la hauteur $h = 0.25m$. La mise en mouvement forcé (horizontal et cyclique) du réservoir va provoquer une forte dénivellation de la surface fluide. La figure (1 gauche) montre les profils successifs de la surface libre. Alors qu'un

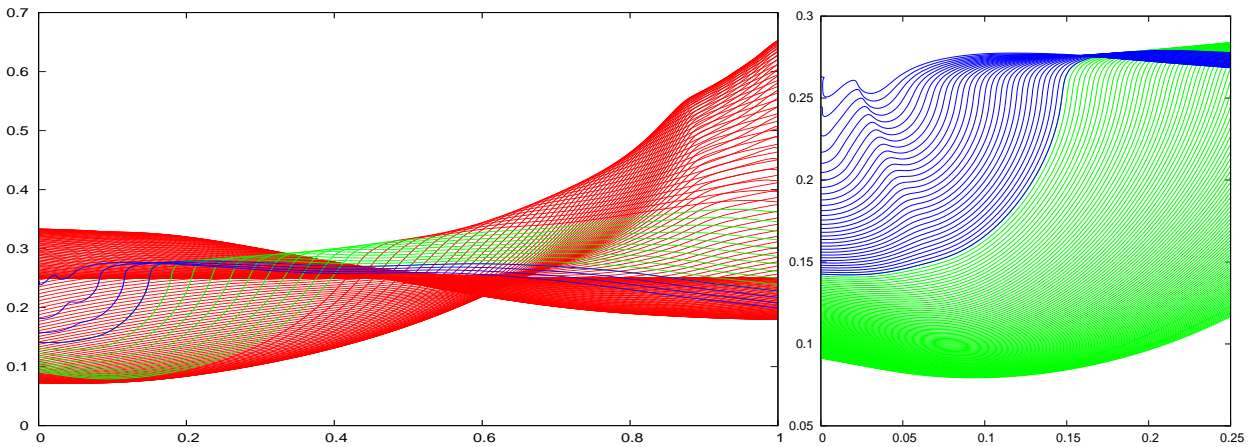


FIGURE 1 – Profils successifs de la surface libre. Intervalle en temps entre chaque profil : à gauche $\delta t = 0.01s$ à droite $\delta t = 0.001s$. A droite : profils durant les derniers instants de la simulation (voir les détails de l'écoulement lors du Flip-through sur la figure 7).

front de vague vertical se produit (transition entre les profils verts et bleus), on s'attend à l'apparition d'un déferlement plongeant. En fait on constate qu'une excroissance apparaît à la surface libre en dessous du front vertical. Cette excroissance grossit rapidement semblant ainsi empêcher le front vertical de se transformer en un déferlement plongeant. Alors que la vitesse du front ne dépasse pas $2.5m/s$, la vitesse de l'excroissance culmine à $8m/s$. Néanmoins, cette crête secondaire ne se développe pas de manière singulière et c'est finalement un flip-through qui se produit le long du mur gauche du réservoir. A ce moment les vitesse et accélération deviennent particulièrement importantes. Le figure (1 droit) zoome sur les derniers instants de la simulation alors que la surface libre présente un profil parabolique. On sait que c'est une caractéristique typique qui préside au déclenchement du flip-through (voir [16]).

2.1 Excroissance locale conduisant à un jet

On s'intéresse tout d'abord à la formation de l'excroissance. Dans les instants qui précèdent son apparition, on analyse les variations spatiales de la pression. La figure (2) montre dix profils de surface libre au moment où son contour devient très plat (dans la

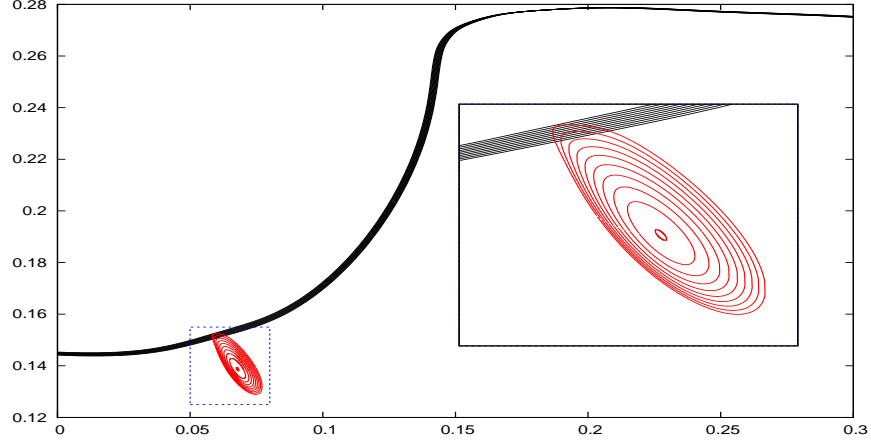


FIGURE 2 – Dix profils de surface libre à des instants compris dans l'intervalle $t \in [1.702205s, 1.703105s]$ par pas de $\delta t = 0.0001s$ juste avant l'apparition de l'excroissance locale de la surface libre. Courbes fermées en rouge : régions de courbure de Gauss positive. Instant du contour le plus petit : $t = 1.702205s$. Instant du contour le plus grand : $t = 1.703105s$.

région du cadre bleu). Ultérieurement deux points d'inflexion entourent une excroissance. Concomitamment une région de courbure de Gauss (déterminant de la matrice Hessienne introduite par l'équation 11) positive naît dans le fluide. Ce sont les contours fermés rouges qui se forment à partir d'un point et qui grossissent jusqu'à intersecter la surface libre. Ce phénomène précède l'apparition de l'excroissance. Il faut noter qu'à l'endroit où la courbure de Gauss s'annule et devient (faiblement) positive, alors la surface représentant la pression dans le plan de l'écoulement est très plate; elle peut être approchée par un plan parallèle au gradient de pression.

On peut analyser plus précisément la chronologie des faits en comparant la variation spatio-temporelle des changements de signe de la courbure de Gauss et du changement de signe du rayon de courbure de la surface libre. Pour cela on suppose que la pression peut être représentée par l'équation $\ell(p) + f(X, Y) = 0$. C'est une paramétrisation possible de la surface formée par la pression p définie dans un plan quelconque de coordonnées cartésiennes (X, Y) . Les fonctions h et f sont algébriques au sens où elles peuvent se développer sous forme polynômiale de p et (X, Y) respectivement. La position des points d'inflexion le long de la surface libre (où $f(X, Y)$ est une constante) est définie par les zéros de

$$Y_{,X^2} = -\frac{(f_{,Y})^2 f_{,X^2} - 2f_{,X}f_{,Y}f_{,XY} + (f_{,X})^2 f_{,Y^2}}{(f_{,Y})^3} \quad (1)$$

La courbure de Gauss de la pression s'écrit

$$\Omega = \frac{f_{,X^2}f_{,Y^2} - (f_{,XY})^2}{\ell^2} - \frac{\ddot{\ell}}{\ell^4} [(f_{,Y})^2 f_{,X^2} - 2f_{,X}f_{,Y}f_{,XY} + (f_{,X})^2 f_{,Y^2}] \quad (2)$$

Si on suppose qu'une excroissance locale de la surface libre va apparaître à l'origine du système de coordonnées (X, Y) . En ce point la surface libre sera très plate puisque le rayon de courbure y est infini. On peut alors approcher localement la fonction f par $f(X, Y) = Y - \alpha X^{2n}$ où l'exposant est strictement supérieur à 2 (donc $n > 1$) et $\alpha > 0$. En ce point, il est facile de vérifier qu'à la fois Ω et $Y_{,X^2}$ s'annulent. Ultérieurement, deux points

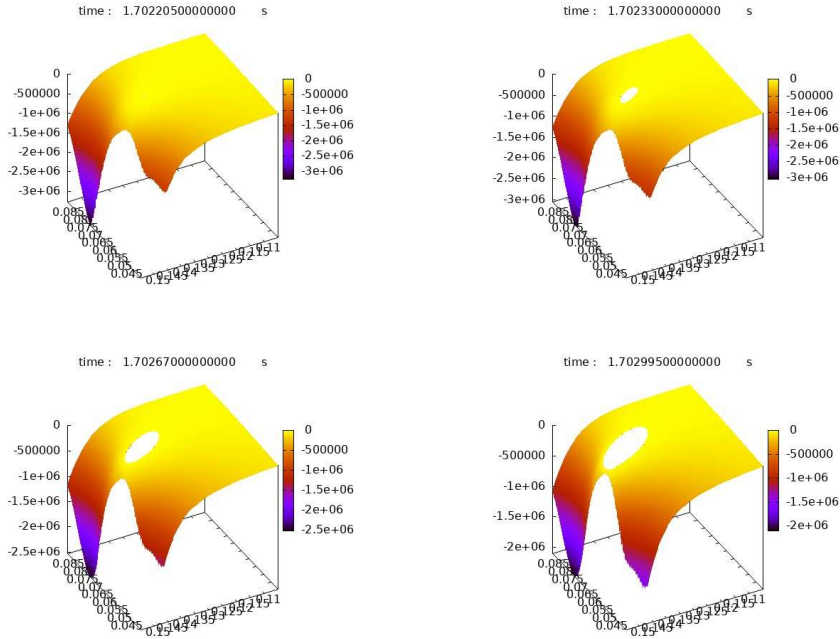


FIGURE 3 – Isocontour de la courbure de Gauss $\Omega(x, y, t)$ négative à 4 instants dans l'intervalle $t \in [1.702205s, 1.703105s]$. La courbure de Gauss positive est située dans les "trous blancs".

d'inflexion encadrent l'excroissance. Si on centre le système de coordonnées (X, Y) en un de ces points, alors on peut approcher localement la fonction f par $f(X, Y) = Y - \alpha X^{2n+1}$. A nouveau on vérifie que Ω et $Y_{,X^2}$ s'annulent en ce point si $n > 1$. En pratique, il peut exister un léger décalage dans l'apparition des zéros, contrairement à d'autres résultats présentés dans [12]. Dans le cas présent la figure (4) montre que l'apparition de points

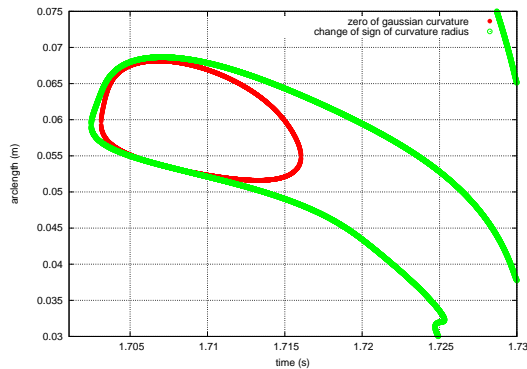


FIGURE 4 – Variation spatio-temporelle des zéros de la courbure de Gauss et du rayon de courbure de la surface libre.

d'inflexion à la surface libre n'implique pas que la courbure de Gauss y change de signe. Les résultats plus haut semblent montrer que l'inverse est vrai.

2.2 Flip-through (FT) le long du mur

L'excroissance locale grossit de manière continue formant une crête secondaire qui semble sur le point d'atteindre le mur. Cependant, un deuxième évènement se produit et tout semble se figer alors qu'il se développe. Cela est annoncé par la forme parabolique typique de la surface libre; c'est le signe prémonitoire du FT.

La dynamique du fluide dans le jet et son voisinage est très importante, sans comparaison avec celle qui prévalait. On peut dresser la chronologie des différentes étapes. Cela est récapitulé dans le tableau suivant

instant	commentaire
$t = 1.720005s$ $t = 1.72872s$ $t = 1.72926s$	distribution de pression standard bien avant le déclenchement du FT, point d'inflexion ($p_{,y} = p_{,y^2} = 0$) à la hauteur $y/h \approx 0.5$, la pression le long du mur dépasse la pression au fond, distribution de pression tracée sur la figure (5),
$t = 1.729795s$	surface libre perpendiculaire au mur, rayon de courbure infini,
$t = 1.72993s$	maximum d'accélération le long du mur,
$t = 1.730745s$	maximum d'accélération au pied du jet ascendant,
$t = 1.73141s$	maximum de la distribution de pression le long du mur.

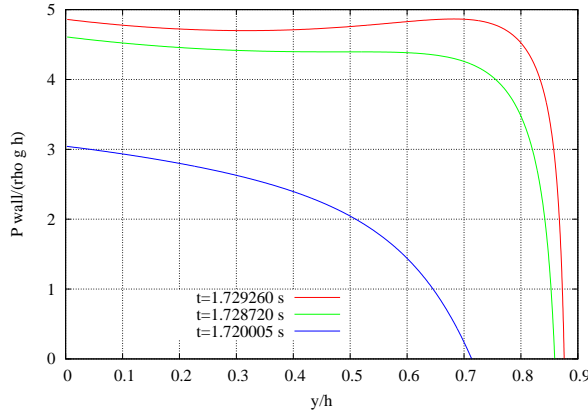


FIGURE 5 – Distributions de pression le long du mur à 3 instants caractéristiques. Instant $t = 1.720005s$: bien avant le déclenchement du FT. Instant $t = 1.72872s$: apparition d'un point d'inflexion ($p_{,y} = p_{,y^2} = 0$) à une hauteur intermédiaire ($y/h \approx 0.5$). Instant $t = 1.72926s$: maximum de pression local $p_{,y} = 0$ à $y/h \approx 0.7$ aussi élevé que la pression au fond.

Bien avant le déclenchement du FT, la distribution de pression est tout à fait standard. Un exemple typique est tracé sur la figure (5) à l'instant $t = 1.720005s$. La pression est monotone décroissante du fond vers la surface libre; le gradient vertical de la pression est donc négatif sur tout le mur. Sa valeur adimensionnelle varie dans l'intervalle $p_{,y}/(\rho g) \in [-18.5, -1]$, ce qui signifie que l'accélération Lagrangienne (en moyenne) est déjà bien plus grande que la gravité et de plus dirigée vers le haut.

Plus tard, à $t = 1.72872s$, la distribution de pression est telle que $p_{,y} = p_{,y^2} = 0$ en un point du mur $y/h \approx 0.5$. Cela indique une transition vers une distribution de pression présentant un maximum unique qui va devenir de plus en plus prononcé. On sait qu'un maximum de pression dans le fluide est susceptible de provoquer une excroissance locale

(cusp) de la surface libre si ce maximum se produit dans son proche voisinage. Un exemple de cette distribution de pression est tracée sur la figure (5) à l'instant $t = 1.72926s$.

Effectivement l'évènement suivant est le changement de signe de la courbure de la surface libre à l'endroit où elle intersecte le mur. Cela se produit précisément à l'instant $t = 1.729795s$, instant où la surface libre est aussi perpendiculaire au mur. Le FT est donc déclenché et concomitamment le maximum d'accélération est atteint à l'instant $t = 1.72993s$ *i.e.* $135\mu s$ plus tard. Ces trois étapes sont illustrées sur la figure (6gauche). Le zoom de la figure (6droite) montre le profil de la surface libre pour lequel le rayon de courbure est infini.

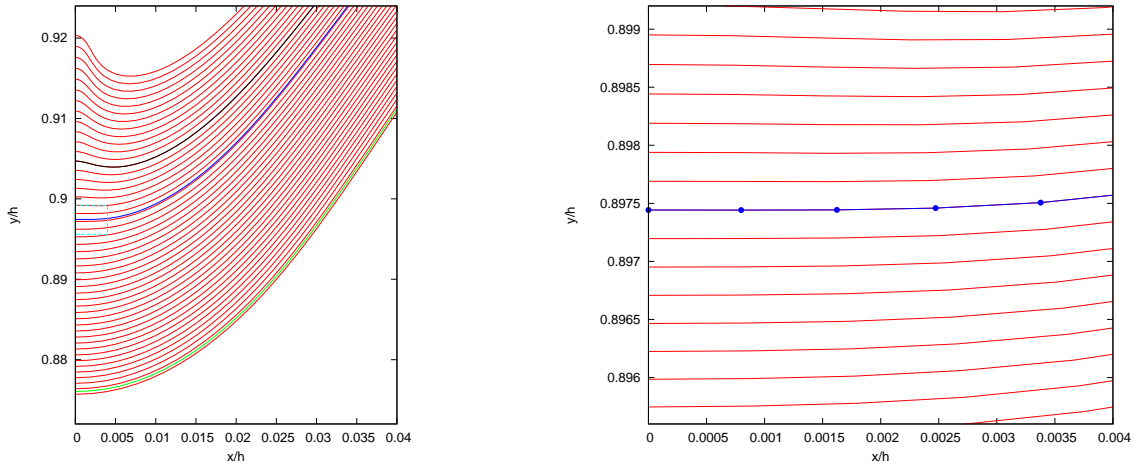


FIGURE 6 – A gauche : profils de la surface libre pendant le déclenchement du FT. Instants identifiés : $t = 1.72926s$ (vert) apparition d'une distribution de pression avec un unique maximum. $t = 1.729795s$ (bleu) surface libre perpendiculaire au mur avec un rayon de courbure infini. $t = 1.72993s$ (noir) maximum d'accélération le long du mur. A droite : zoom sur la région où la surface libre est perpendiculaire au mur (rectangle bleu clair de la figure de gauche). ● : marqueurs de la surface libre.

La figure (7gauche) montre les variations temporelles de plusieurs quantités aux différentes étapes identifiées plus haut. En particulier on identifie deux maxima de l'accélération. L'un se produit à l'intersection avec le mur vertical. L'autre se produit le long de la surface libre. Leurs variations temporelles sont identiques pendant une durée significative jusqu'à ce que la courbure de la surface libre change de signe (la surface "flippe"). A cet instant leurs variations en temps divergent. Ainsi jusqu'à $t = 1.72993s$ le maximum d'accélération du fluide se produit au bout du jet ascendant et atteint un maximum de $1930g$. Puis cette accélération au bout du jet chute rapidement vers un seuil beaucoup plus faible mais quand même de l'ordre de 40 fois la gravité.

En fait le maximum de l'accélération continue d'augmenter mais à un autre endroit. Plus précisément au pied du jet vertical ascendant là où la surface libre présente son rayon de courbure le plus petit. A cet endroit l'accélération culmine à $5700g$ et ce maximum y persiste sur une longue durée tandis que le jet continue de monter.

La figure (7droite) montre les profils successifs de la surface libre sur une durée significative démarrant au déclenchement du FT (à l'instant $t = 1.72969s$), couvrant le développement du jet ascendant et jusqu'à la fin de la simulation (instant $t = 1.73229s$) avant que des difficultés numériques mettent péril la précision, la stabilité et la qualité

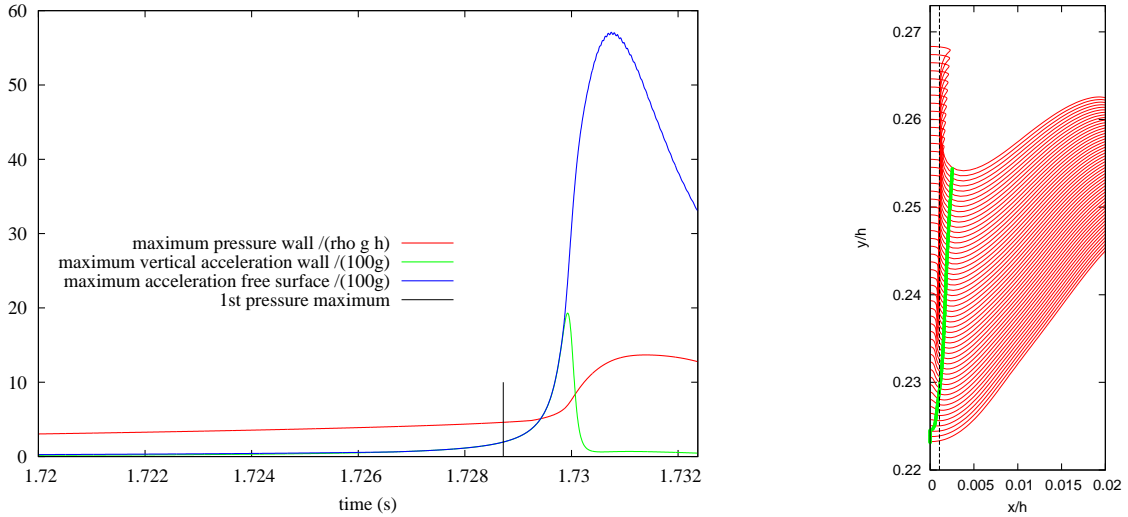


FIGURE 7 – A gauche : variations temporelles de la pression et accélération en des points caractéristiques. Vert : accélération au point d’intersection du mur et de la surface libre. Bleu : maximum de accélération Lagrangienne calculée à la surface libre. Rouge : maximum de la pression calculée le long du mur vertical. Noir : instant ($t = 1.72872s$) auquel la distribution de pression a un point d’inflexion ($p_{,y} = p_{,y^2} = 0$). A droite : Profils de surface libre dans l’intervalle de temps $t \in [1.72969s, 1.73229s]$ avec un pas en temps de $\delta t = 5 \cdot 10^{-5}s$. ● : positions des maxima d’accélération Lagrangienne (calculée à la surface libre). Ligne verticale : épaisseur moyenne du jet.

de la solution. La position des maxima de l’accélération Lagrangienne à la surface libre est soulignée par des points verts. Il convient de noter que dans la configuration présente, le mur vertical force la symétrie du phénomène. Une alternative serait de rajouter un domaine fluide symétrique de l’autre côté de l’axe vertical $x = 0$. Dans ce cas la moindre différence d’accélération au pied du jet (par accumulation d’erreurs d’arrondi par exemple) pourrait faire tourner le jet d’un côté ou de l’autre. Des expériences numériques semblent montrer que le jet se tournera du côté où l’accélération est maximum. C’est là une conjecture à vérifier.

La figure (7droite) montre également une ligne qui indique que l’épaisseur du jet est quasiment constante. Il conviendrait de corrélérer cette épaisseur à l’accélération du jet.

La figure (8) récapitule les variations spatio-temporelles de la pression le long du mur avant le déclenchement du FT et jusqu’à la dfn de la simulation. Cela montre clairement une transition avant et après le FT. Le FT est effectivement déclenché par un maximum de pression qui se produit le long du mur au voisinage de la surface libre. Quand cela se produit la pression au fond s’accroît également de manière significative. Puis la distribution de pression présente un maximum qui reste proche de la surface libre. Apparemment le maximum de cette distribution continue d’augmenter jusqu’à une valeur palier atteinte approximativement au même instant où le maximum d’accélération Lagrangienne est atteint au pied du jet. La figure (9) montre justement les variations temporelles des positions verticales de plusieurs quantités caractéristiques. Cela montre que la position verticale du maximum de pression au mur suit exactement la position verticale du maximum d’accélération Lagrangienne. Ces trois points semblent évoluer à vitesse constante dès que le FT est déclenché.

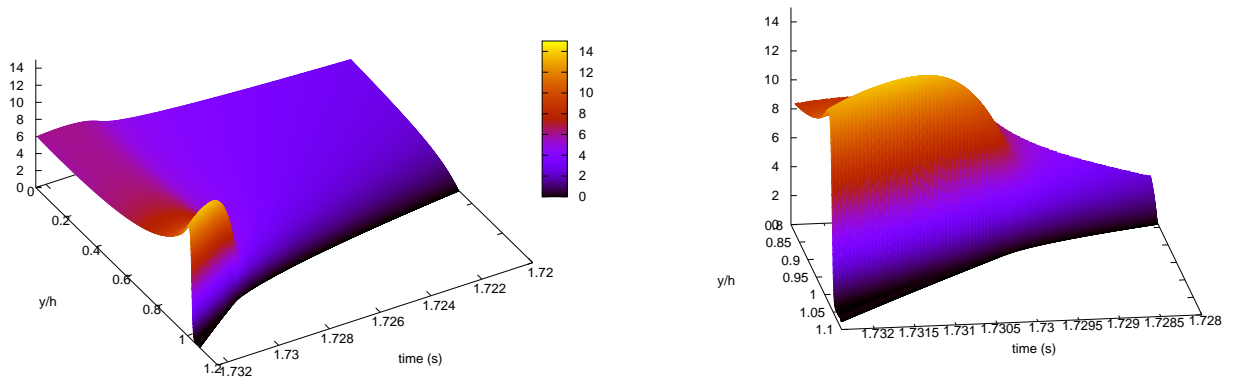


FIGURE 8 – Variations spatio-temporelles de la pression le long du mur avant le déclenchement du FT. La figure de droite est un zoom de la figure de gauche.

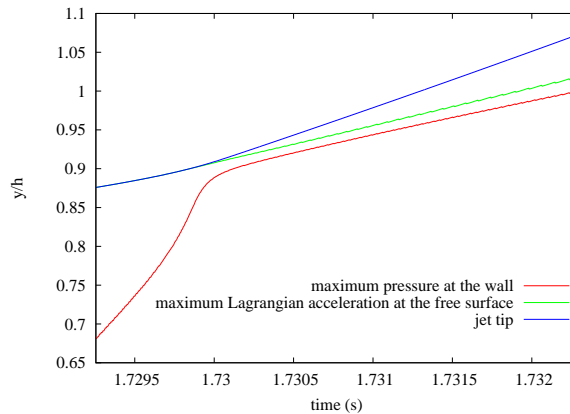


FIGURE 9 – Variation temporelle de 3 points caractéristiques le long du mur. rouge : maximum distribution de pression sur le mur. vert : maximum de l'accélération Lagrangienne à la surface libre (correspondant aux marques ● sur la figure 7). bleu : bout du jet.

3 Conclusion

Les résultats exposés ici ne sont pas réellement nouveaux. Effectivement concernant le Flip-through beaucoup a été dit depuis les travaux pionniers de [6]. Par contre on sait moins que l'accélération Lagrangienne au pied du jet peut être bien plus grande que celle atteinte par le jet le long du mur.

On montre aussi que l'apparition de points d'inflexion le long de la surface libre, présidant au déclenchement d'une excroissance de la surface libre, est précédée par l'apparition d'une région où la distribution de pression est très plate; cela est caractérisée par une courbure de Gauss légèrement positive. Par conséquent le changement de signe de la courbure de Gauss est fortement corrélé aux changements de signe de la courbure de la surface libre également.

Références

- [1] PAGE WIKIPEDIA DE M.S. LONGUET-HIGGINS,
https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_S._Longuet-Higgins
- [2] LONGUET-HIGGINS, M.S. 1980, A Technique for Time-Dependent Free-Surface Flows. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **371**, 441-451. <http://www.jstor.org/stable/2990252>
- [3] CLAMOND D. 2012, Note on the velocity and related fields of steady irrotational two-dimensional surface gravity waves. *Phil. Trans. R. Soc. A.3701572-1586*, <http://doi.org/10.1098/rsta.2011.0470>
- [4] CLAMOND D. AND DUTYKH, D. 2018, Accurate fast computation of steady two-dimensional surface gravity waves in arbitrary depth. *J. Fluid Mech.*, **844**, 491-518. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.208>
- [5] YASUDA T., MUTSUDA H., MIZUTANI N. 1997, Kinematics of overturning solitary waves and their relations to breaker types *Coastal Engineering*, **29**, Issues 3-4, 317-346. [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(96\)00032-4](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(96)00032-4)
- [6] COOKER, M.J. & PEREGRINE, D.H., 1990, Computations of violent motion due to waves breaking against a wall, *Proc. 22nd Intl. Conf. Coastal Eng.*, Delft, ASCE, 1, pp.164-176.
- [7] SCOLAN Y.-M., 2024, On some properties of the pressure in nonlinear two-dimensional potential flow with a free surface. *Applied Ocean Research*, Vol 150, 104123, <https://doi.org/10.1016/j.apor.2024.104123>
- [8] COOKER, M.J., 2001, Unsteady pressure fields which precede the launch of free-surface liquid jets. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **458**, 473-488. <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0886>
- [9] PEREGRINE, D. H., PRENTICE, P. R., 1994, Jet formation at a free surface. In *Bubble Dynamics and Interface Phenomena : IUTAM Symp. Birmingham, UK, 1993*, (ed. J. R. Blake, J. M. Boulton-Stone & N. H. Thomas), pp. 397-404. Dordrecht : Kluwer.
- [10] OCKENDON J.R. AND OCKENDON H. 2024, Inviscid jets driven by pressure maxima. *J. Fluid Mech.*, **996**, <https://doi.org/10.1017/jfm.2024.625>
- [11] SCOLAN Y.-M. AND S. ETIENNE, 2018, Critical jets in a breaking wave (in french), *Proceedings of the 16th Journées de l'Hydrodynamique*, Marseille, France.
- [12] SCOLAN Y.-M. 2023, Some aspects of the pressure field preceding the onset of critical jets in a breaking wave *J Eng Math*,138, 1, <https://doi.org/10.1007/s10665-022-10246-3>
- [13] KARIMI R. AND BROSSET L., 2016, Global and local effects of gas-liquid density ratio on shape and kinematics of sloshing waves and scaling considerations. *29th Proc. International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Osaka, Japan. <http://www.iwwwfb.org/Workshops/29.htm>
- [14] FRIHAT M., 2018, Contributions à l'étude phénoménologique des impacts de vagues lors du ballottement de liquide dans une cuve modèle : physique associée à la variabilité de l'écoulement et effets d'échelle induits *PhD Thesis, Paris-Saclay University*.

- [15] SCOLAN, Y.-M., 2010, Some aspects of the flip-through phenomenon : A numerical study based on the desingularized technique *J. Fluid Struct.*, **26**, Issue 6, 918-953. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.06.002>
- [16] COOKER, M.J., 2010, The flip-through of a plane inviscid jet with a free surface. *J. Eng. Math*, 67, 137-152. <https://doi.org/10.1007/s10665-009-9302-2>
- [17] CAO, Y., SCHULTZ, W.W., BECK, R.F., 1991, A three-dimensional desingularized boundary integral method for potential problems, *International Journal Numerical Method in Fluids*, 11, 785-803. <https://doi.org/10.1002/flid.1650120807>
- [18] FALTINSEN O.M., ROGNEBAKKE, O., LUKOWSKY I, AND TIMOKHA A., 2000, Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth, *J. Fluid Mech.* , -. **407**, Issue 3, 201-234. <https://doi.org/10.1017/S0022112099007569>
- [19] SCOLAN Y.-M., 2015, Some aspects of the eigenfrequency computation in a two-dimensional tank filled with two non miscible fluids. *30th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Bristol, UK, April 2015*, 189-192. <http://www.iwwwfb.org/Workshops/30.htm>
- [20] FENTON J.D., 1988, The numerical solution of steady water wave problems, *Computers & Geosciences* , **14**, Issue 3, 357-368. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(88\)90066-0](https://doi.org/10.1016/0098-3004(88)90066-0)

A Le modèle numérique

On trouve dans [15] les principales caractéristiques du code potentiel utilisé. Dans les développements qui suivent, sont présentés quelques spécificités du calcul de la pression dans le cadre des techniques désingularisées appliquées aux écoulements à surface libre.

Le potentiel de l'écoulement rend compte de l'influence de N sources de Rankine placées en dehors du domaine fluide, à une courte distance des N marqueurs qui parcourent la surface libre. La distance entre marqueurs et sources (voir [17]) est fixée sur des critères de conservation de masse et d'énergie, vérifiés a posteriori. On peut ajouter au potentiel de l'écoulement, les potentiels de Stokes-Joukowski (voir [18]) afin de tenir compte du mouvement forcé du réservoir dans lequel se produit l'écoulement.

Les conditions non linéaires de surface libre (surface matérielle et isobare) forment un système différentielle en temps. Leur résolution met à jour le potentiel des vitesses et la position des marqueurs à la surface libre. Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 permet d'atteindre des précisions raisonnables dans la plupart des applications réalisées. Il est difficile d'établir des théorèmes de convergence de la méthode désingularisée hormis si on se restreint à des problèmes aux limites linéaires (voir [19]). Néanmoins on peut envisager de faire des tests de convergence à la cambrure limite de Stokes d'une houle régulière ; on sait effectivement calculer cette solution pratiquement à la précision machine (voir [20] ou [4]).

La pression en tout point du fluide se déduit de l'équation de Bernoulli écrite sous forme complexe comme suit

$$\frac{p}{\rho} = -\Re \left(F_{,t} + \frac{1}{2} |F_{,z}|^2 - igz + \dot{U}z + c(t) \right) \quad (3)$$

où $c(t)$ est une fonction arbitraire du temps, g représente l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide (fixée à l'unité dans la suite), \dot{U} désigne l'accélération

horizontale forcée du réservoir. Le potentiel complexe de l'écoulement F décrit le seul mouvement du fluide dans un système de coordonnées cartésien (O, x, y) attaché au réservoir ; l'origine est centrée au coin bas gauche du réservoir de forme rectangulaire. L'emploi de la coordonnée complexe $z = x + iy$ (avec $i^2 = -1$) simplifie les notations. Le potentiel complexe s'exprime comme

$$F(z, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) G(z, Z_j(t)) \quad (4)$$

où G est la fonction de Green de Rankine qui doit donc vérifier la condition d'imperméabilité sur les parois du réservoir. Dans ce but on emploie une transformation conforme du domaine intérieur au réservoir. Pour un bassin rectangulaire de longueur L , la transformation conforme $w = C(z) = -\cos \frac{\pi z}{L}$ relie l'affixe z du plan physique à l'affixe w du plan transformé. L'image des parois du réservoir correspondent à l'axe réel du plan w . Dans (4), $q_j(t)$ désignent les intensités des N sources placées aux affixes $Z_j(t)$ et $W_j(t)$ respectivement dans les plans physique et transformé.

Afin de rester aussi consistant que possible lors de l'intégration numérique du système différentiel, notamment pour s'assurer que la pression est effectivement nulle à la surface libre à l'issue d'un pas de temps, on met en œuvre l'algorithme¹ suivant :

- en fin de pas de temps on dispose du potentiel à la surface libre (noté $\varphi_j = \Re F(z_j)$) ainsi que de la position des marqueurs (noté $z_j = x_j + iy_j$), en outre on dispose d'une approximation de la dérivée temporelle des affixes des sources \dot{Z}_j , cette dernière quantité est peu différente de la vitesse des marqueurs de la surface libre $\vec{\nabla} \varphi_j$,
- on déduit de z_j la position des sources Z_j selon les critères de [17] et par conséquent on peut mettre à jour la matrice \mathbf{G} de coefficient G_{ij}

$$G_{ij} = \log(w_i - W_j) + \log(w_i - \overline{W_j}), \quad w_i = C(z_i), \quad W_j = C(Z_j), \quad (5)$$

et de sa matrice dérivée en temps $\mathbf{G}_{,t}$

$$G_{ij,t} = - \left(\frac{\dot{Z}_j}{J_j[w_i - W_j]} + \frac{\overline{\dot{Z}_j}}{\overline{J_j[w_i - W_j]}} \right), \quad J_j = \frac{dz}{dw}(Z_j) \quad (6)$$

où le dot désigne la dérivée en temps et l'overline est le complexe conjugué.

- l'intensité des sources est obtenue par inversion de la matrice \mathbf{G} , soit vectoriellement $\mathbf{q} = \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\varphi}$,
- on calcule la vitesse aux marqueurs de la surface libre selon $\vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \mathbf{G} \mathbf{q}$,
- à partir de Bernoulli (3) à la surface libre, on calcule la dérivée partielle en temps de φ

$$\varphi_{j,t} = -\frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi_j \right)^2 - \dot{U} x_j - g y_j \quad (7)$$

- dérivée partielle en temps $\varphi_{,t}$ est aussi la partie réelle de $F_{,t}$ obtenue par différentiation de (4)

$$\varphi_{i,t} = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \Re G_{ij} + q_j \Re G_{ij,t}, \quad (8)$$

1. Dans la suite, une variable en gras désigne un vecteur ou une matrice.

– on en déduit \dot{q}_j selon

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}^{-1} (\boldsymbol{\varphi}_{,t} - \mathbf{G}_{,t} \mathbf{q}) \quad (9)$$

A l'issue de ce calcul on dispose des variables $(x, y, \varphi, \vec{\nabla}\varphi, q, \dot{q}, Z, \dot{Z})$ aux marqueurs de la surface libre où la pression est dorénavant nulle au zéro machine. Cela suffit pour recalculer avec précision tous les champs scalaires et vectoriels partout dans le fluide.

Le gradient de pression se déduit de l'équation d'Euler écrite ici sous forme complexe

$$p_{,z} = p_{,x} - ip_{,y} = -\rho \left(F_{,zt} + F_{,zz} \overline{F}_{,z} - ig + \dot{U} \right) \quad (10)$$

où les dérivées secondes $F_{,zt}$ et $F_{,zz}$ se calculent comme dans (8). Il en est de même des coefficients de la matrice Hessienne \mathbf{H} de la pression dans le fluide, qui nécessite d'évaluer les dérivées troisièmes de F

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} p_{,xx} & p_{,xy} \\ p_{,xy} & p_{,yy} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} p_{,xx} &= -\rho (|F_{,zz}|^2) - \rho \Re (F_{,zzz} \overline{F}_{,z} + F_{,zzt}) \\ p_{,yy} &= -\rho (|F_{,zz}|^2) + \rho \Re (F_{,zzz} \overline{F}_{,z} + F_{,zzt}) \\ p_{,xy} &= \rho \Im (F_{,zzz} \overline{F}_{,z} + F_{,zzt}) \end{cases} \quad (11)$$

Le déterminant de \mathbf{H} constitue la courbure de Gauss, notée Ω .