

ACCÉLÉRATION D'UN PROGRAMME DE SIMULATION D'INTERACTIONS VAGUE-STRUCTURE PAR LA MÉTHODE PARAREAL

ACCELERATION OF A WAVE-STRUCTURE INTERACTION SOLVER BY THE PARAREAL METHOD

Y. POIRIER⁽¹⁾, J. SALOMON^(2,3), A. BABARIT⁽¹⁾
P. FERRANT⁽¹⁾, G. DUCROZET⁽¹⁾

*yohan.poirier@ac-poitiers.fr ; julien.salomon@inria.fr ; aurelien.babarit@ec-nantes.fr
pierre.ferrant@ec-nantes.fr ; guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr*

⁽¹⁾Laboratoire de Mécanique des Fluides, École Centrale de Nantes, Nantes

⁽²⁾Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, Paris

⁽³⁾ANGE, INRIA Paris, Paris

Résumé

Pour étudier les interactions entre la houle et les corps flottants, la méthode Weak-Scatterer constitue un compromis intéressant dans la mesure où cette approche n'est pas limitée en théorie par les hypothèses de petites amplitudes de vagues et de petits mouvements de corps nécessaires à l'utilisation des méthodes linéaires, et que cette approche est en pratique plus stable que les méthodes entièrement non linéaires. La méthode Parareal est un algorithme de parallélisation dans le temps d'une simulation qui permet d'accélérer la totalité des étapes de calcul. Il est montré que, dans le cas du code WS-CN, une implémentation de la méthode Weak-Scatterer, l'algorithme Parareal permet de réduire de manière significative le temps de calcul pour une houle dont la cambrure est suffisamment faible.

Summary

To study the interactions between waves and floating bodies, the Weak-Scatterer method represents an interesting compromise insofar as this approach is not limited in theory by the assumptions of small wave amplitudes and small body motions required for the use of linear methods, and this approach is more stable in practice than entirely non-linear methods. The Parareal method is an algorithm for parallelizing a simulation in time, making it possible to speed up all the calculation steps. It is shown that, in the case of the WS-CN code, an implementation of the Weak-Scatterer method, the Parareal algorithm significantly reduces the calculation time for a wave with a sufficiently small camber.

I – Introduction

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour modéliser les interactions entre les vagues et les structures. Les plus couramment utilisées dans les études d'ingénierie des corps flottants (tels que les plateformes pétrolières et gazières offshore, les éoliennes offshore ou les systèmes de récupération de l'énergie des vagues) sont celles basées sur la méthode des éléments aux frontières. Un inventaire complet de l'utilisation de ces méthodes pour la modélisation hydrodynamique des systèmes récupérateurs d'énergie des vagues a été fait par Papillon et al. [1]. Parmi ces méthodes, celles basées sur la théorie linéarisée des écoulements potentiels à surface libre sont souvent préférées parce qu'elles sont particulièrement rapides et parce qu'elles se sont avérées suffisamment précises pour de nombreuses applications pratiques. WAMIT [2], ANSYS-AQWA [3] ou NEMOH [4] sont des exemples de codes numériques populaires basés sur cette théorie.

La théorie linéarisée des écoulements potentiels à surface libre repose sur les hypothèses suivantes : le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est irrotationnel, l'amplitude de la houle est faible par rapport à la longueur d'onde et aux dimensions de la structure, et l'amplitude des mouvements est faible par rapport aux dimensions de la structure. Par conséquent, ce modèle est mal adapté en cas de mouvements de grandes amplitudes et/ou en cas de mer agitée (vagues de grande amplitude). En principe, les solveurs Navier-Stokes peuvent être utilisés pour traiter de tels problèmes. Cependant, ces solveurs sont associés à des temps de calcul élevés (parfois plusieurs heures par période de houle [5, 6]), ce qui empêche leur utilisation pour les études d'ingénierie usuelles. En outre, l'obtention et la conservation d'une discrétisation du domaine de qualité suffisante tout au long de la simulation peuvent être difficiles, en particulier dans le cas de mouvements de grande amplitude [7].

D'autres approches pour l'étude d'un corps flottant avec des mouvements de grande amplitude et/ou dans des mers fortes sont les théories potentielles totalement non linéaires et la méthode Weak-Scatterer [8]. Dans les méthodes potentielles totalement non linéaires, aucune hypothèse n'est faite sur l'amplitude de l'onde incidente ou sur l'amplitude du mouvement du corps. Guerber et al. [9] ont développé un bassin à houle numérique bidimensionnel utilisant une méthode des éléments aux frontières de haut ordre basée sur une méthode entièrement non linéaire pour étudier les interactions entre une onde incidente et un cylindre entièrement immergé. Cette méthode semble préserver le volume et l'énergie du fluide à un haut niveau de précision sans avoir à utiliser une discrétisation spatiale très fine. Ce modèle a ensuite été adapté par Dombre et al. [10] pour étudier le cas d'un corps rigide perçant la surface libre. Cependant, les méthodes BEM non linéaires ne permettent d'étudier que les écoulements potentiels et ne permettent donc pas de décrire les effets turbulents, rotationnels ou visqueux qui peuvent se produire à proximité des structures immergées. En distinguant les régions fluides proches des structures en interaction des régions suffisamment éloignées, l'utilisation couplée d'un solveur CFD et d'un solveur potentiel permet de bénéficier simultanément des avantages des deux méthodes [11, 12, 13]

Contrairement aux méthodes potentielles linéaires, la méthode Weak-Scatterer [8] suppose uniquement que l'amplitude des ondes rayonnées et diffractées par le corps est faible devant celle de l'onde incidente. Cette hypothèse permet de discrétiser la surface libre correspondant à la position de l'onde incidente au lieu de la surface libre réelle, permettant d'améliorer la robustesse du maillage par rapport aux méthodes entièrement non linéaires (en évitant par exemple d'avoir à traiter le déferlement de la houle). Cette approche peut également permettre d'utiliser des maillages plus grossiers et donc de réduire

le temps de calcul. Zhang et al. [14] ont utilisé une méthode des éléments aux frontières d'ordre supérieur basée sur la méthode Weak-Scatterer pour étudier les performances d'un récupérateur de l'énergie des vagues de type "absorbeur ponctuel". Les comparaisons entre la simulation numérique et les résultats expérimentaux ont montré une bonne concordance. La méthode a permis d'étudier les effets de la courbure de la houle ou des réglages du convertisseur d'énergie sur les performances du convertisseur. Tong et al. [15] ont utilisé une méthode polynomiale harmonique (HPC) basée sur une méthode Weak-Scatterer généralisée, dans laquelle les conditions aux limites tiennent compte du fait que la surface libre se déplace tangentiellement à la surface des corps perçant la surface libre. Un bon accord a été obtenu avec les résultats expérimentaux, les simulations entièrement non linéaires et les solutions théoriques.

Dans de précédents travaux, un outil numérique (WS-CN) a été développé à l'École Centrale de Nantes sur la base de la méthode Weak-Scatterer [16, 17, 18]. L'objectif est d'obtenir un outil d'ingénierie rapide et fiable. Avec l'implémentation actuelle, bien que plus faibles que pour les solveurs Navier-Stokes, les temps de calcul se sont avérés relativement longs (entre 10^2 et 10^3 s par période de houle pour un maillage d'environ 10^3 nœuds). Par conséquent, pour une utilisation pratique, il a été jugé nécessaire de trouver des moyens de réduire le temps de calcul.

Dans les méthodes des éléments aux frontières (BEM), la majeure partie du coût de calcul est associée à l'assemblage et à la résolution d'un système linéaire dense d'équations. Les implémentations naïves aboutissent généralement à une complexité de $O(N^3)$ avec N le nombre d'inconnues. Des méthodes ont été développées pour réduire le coût de calcul. On peut citer par exemple, la méthode multipolaire rapide [19], la méthode pFFT [20] et l'utilisation de matrices hiérarchiques [21]. La méthode du multipôle rapide (FMM) permet théoriquement d'atteindre une complexité de $O(N \log N)$ et même $O(N)$ dans certains cas. Le principe de cette méthode est d'utiliser une expansion multipolaire afin de regrouper les points sources suffisamment proches les uns des autres et de pouvoir ainsi traiter leur influence sur les points distants comme celle d'un seul point source. La méthode de la transformée de Fourier rapide précorrigée (pFFT) consiste à construire une grille uniforme pour laquelle les interactions à longue distance sont de bonnes approximations de celles du maillage initial. Cette grille uniforme permet ensuite de calculer rapidement les interactions à longue distance entre les différents points en effectuant un produit de convolution à l'aide d'une transformée de Fourier. Elle permet d'atteindre des complexités de $O(N \log(N))$. Teng et Song [22], par exemple, ont utilisé cette méthode pour accélérer un solveur BEM. Ils ont montré qu'elle permet d'économiser à la fois du temps de calcul et de l'espace mémoire. Enfin, le principe de la méthode des matrices hiérarchiques (\mathcal{H} -Matrices) est d'approximer la matrice associée au système linéaire par une matrice peu dense. Cette procédure est réalisée en identifiant des sous-matrices de rang suffisamment faible k dans la matrice d'origine. Cette méthode permet d'obtenir des complexités en $O(Nk^2 \log(N))$.

Ces méthodes permettent de diminuer le temps de calcul associé à la construction et à la résolution du système linéaire. Cependant, une simulation complète implique d'autres étapes (par exemple la gestion du maillage) dont le temps de calcul peut être significatif (ils peuvent même devenir dominants si les méthodes mentionnées ci-dessus, FMM, pFFT ou \mathcal{H} -matrices, ont été implémentées). A l'inverse, la méthode Parareal permet d'accélérer la simulation complète. En effet, cette méthode consiste à diviser l'intervalle de temps de la simulation en sous-intervalles dans lesquels la simulation est effectuée en parallèle par différents processeurs [23]. La méthode Parareal a été mise en œuvre dans divers domaines de la physique tels que la chimie quantique [24], l'hydrodynamique (simulation

d'un système décrit par l'équation de Navier-Stokes [25] [26] ou propagation des ondes sur une surface libre [27] [28]) et l'électromagnétisme (simulation de plasmas turbulents [29]).

À notre connaissance, il n'y a pas eu de tentative d'implémentation de la méthode Parareal dans un programme de simulation d'interactions vague-structure basé sur la méthode Weak-Scatterer. Ainsi, dans cette étude, nous décrivons une implémentation de la méthode Parareal dans le code WS-CN et nous étudions son effet sur la précision et le temps de calcul.

Le reste du présent document est structuré comme suit : La section II est consacrée à la description de la méthode Parareal et à sa mise en œuvre dans le code WS-CN. Nous présentons ensuite dans la section III (i) un cas test et (ii) des études sur l'influence de l'amplitude de la houle et du nombre de processeurs sur le facteur d'accélération.

II – Méthode Parareal

L'objectif de cette section est de présenter la méthode de parallélisation en temps et sa mise en œuvre dans le cas du code WS-CN.

II – 1 Description générale de la méthode

La parallélisation en temps consiste à diviser l'intervalle de temps sur lequel la simulation doit être effectuée et à exécuter la simulation en parallèle sur chacun des sous-intervalles. Chaque processeur utilise le propagateur fin sur un sous-intervalle donné. Toutefois, pour qu'un processeur puisse utiliser ce propagateur, il faut lui fournir des conditions initiales que seules les simulations sur les sous-intervalles précédents, une fois terminées, peuvent fournir. La méthode Parareal consiste à utiliser un propagateur grossier mais rapide afin d'obtenir une approximation de la solution et de fournir ainsi au propagateur fin de chaque sous-intervalle une estimation des conditions initiales. [23].

Un avantage de la méthode Parareal est qu'elle peut être mise en œuvre dans les codes existants avec relativement peu de modifications. En effet, dans cette méthode, les propagateurs grossier et fin peuvent être considérés comme des « boîtes noires » qui doivent simplement être capables de calculer l'évolution temporelle d'un système compte tenu de son état initial.

La méthode est illustrée à la figure 1. Soit N_p le nombre de sous-intervalles temporels, qui correspond également au nombre de processeurs impliqués dans la procédure de parallélisation. Les temps délimitant les différents sous-intervalles sont notés $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N_p}$.

Comme indiqué précédemment, deux propagateurs sont nécessaires :

- $G(t_1, t_2, u_1)$ est le propagateur grossier qui fournit une estimation rapide de la réponse du système au temps t_2 étant donné le temps de départ t_1 et l'état initial u_1 ,
- $F(t_1, t_2, u_1)$ est le propagateur fin qui fournit la réponse du système au temps t_2 étant donné le temps de départ t_1 et l'état initial u_1 .

La première étape de l'algorithme Parareal consiste à calculer les premières approximations de la solution aux temps t_k . Elles sont notées U_k^0 . Elles sont obtenues en utilisant le propagateur grossier de manière séquentielle.

La deuxième étape consiste à utiliser le propagateur fin en parallèle, à partir des conditions initiales U_k^0 fournies par le propagateur grossier.

Le reste de l'algorithme consiste en une approximation itérative de la solution (Figure 1). Les conditions initiales pour chaque sous-intervalle au temps t_{k+1} et à l'itération $n+1$ sont données par la relation :

$$U_{k+1}^{n+1} = C(t_k, t_{k+1}, U_k^{n+1}) + F(t_k, t_{k+1}, U_k^n) - G(t_k, t_{k+1}, U_k^n) \quad (1)$$

A l'itération $n+1$, le terme $F(t_k, t_{k+1}, U_k^n)$ utilise les états déjà calculés à l'itération n à l'aide du propagateur grossier, de sorte qu'ils peuvent être calculés en parallèle (un calcul par sous-intervalle).

Le terme $G(t_k, t_{k+1}, U_k^{n+1})$ fait intervenir le résultat de la simulation sur l'intervalle précédent. Il doit donc être obtenu de manière séquentielle. Cette caractéristique met en évidence la nécessité pour le propagateur grossier d'être aussi rapide que possible. Pour répondre à cette exigence, on peut utiliser :

- un pas de temps plus grand, comme dans la méthode originale[23],
- une discrétisation plus grossière de l'espace,
- un schéma d'intégration temporelle d'ordre inférieur,
- un autre modèle[30][31].

Dans ce travail, nous considérons cette dernière stratégie.

La méthode Parareal étant une méthode itérative, elle nécessite un test de convergence pour s'arrêter. Afin de quantifier la convergence à l'itération n , définissons la quantité suivante :

$$\alpha_n = \max(\alpha_n^k) = \max\left(\frac{\|U_k^n - U_k^{n-1}\|}{\|U_k^n\|}\right) \quad (2)$$

Dans cette étude, on considère que la convergence est atteinte dès que :

$$\alpha_n < \alpha_{min} \quad (3)$$

où $\alpha_{min} = 10^{-2}$.

Comme le montre la figure 1, $\forall k \geq n, U_k^n = U_n^n$. Par conséquent, à chaque nouvelle itération $k+1$ de l'algorithme de Parareal, la solution avec le propagateur fin est connue jusqu'au temps t_k . Bien que cette caractéristique permette de gagner du temps de calcul, elle n'a pas été exploitée dans ce travail.

II – 2 Mise en œuvre de la méthode Parareal dans le code WS-CN

Dans cette étude :

- l'état U du système à un instant donné est entièrement déterminé par la connaissance du mouvement des corps (position et vitesse), du potentiel de vitesse et de l'élévation sur les nœuds du maillage appartenant à la surface libre.
- le propagateur fin utilise la méthode Weak-Scatterer, pour laquelle le domaine est discrétisé sur la position de la houe incidente (sans perturbation) et sur la position exacte du corps. Les détails de la formulation mathématique de cette méthode et de son implémentation dans le code WS-CN sont décrits dans [32].
- le propagateur grossier utilise une approche entièrement linéarisée où le domaine est discrétisé sur la position moyenne de la surface libre et sur la position d'équilibre du corps. Le maillage est alors fixe tout au long de la simulation ce qui permet un gain de temps considérable.

Une difficulté importante dans l'application de la méthode Parareal au code WS-CN est que les deux propagateurs n'utilisent pas *a priori* les mêmes maillages :

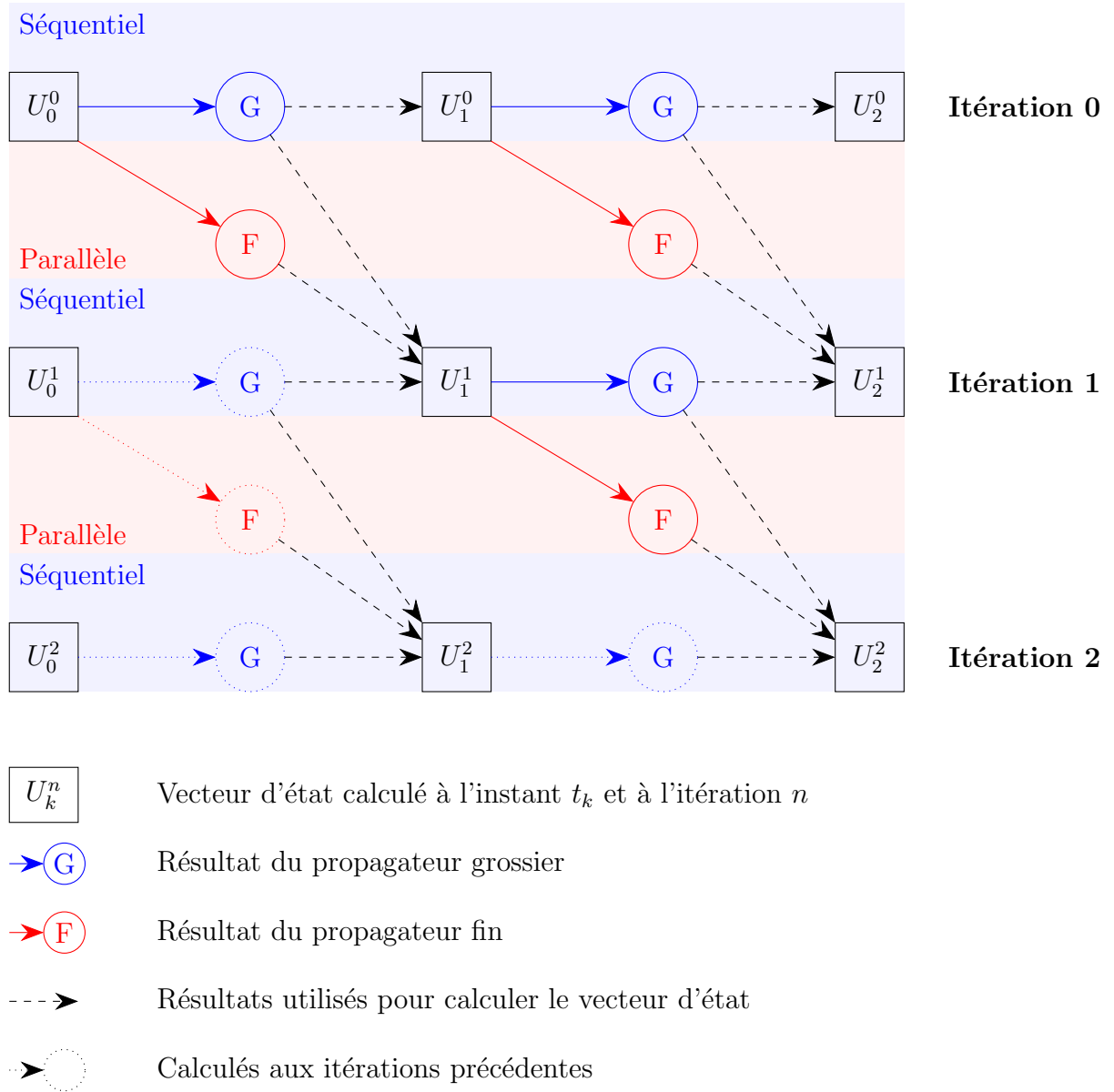


FIGURE 1 – Algorithme Parareal

- le propagateur grossier utilise un maillage M_g qui a été calculé à partir de la position moyenne à la surface libre et à la position d'équilibre du corps. Ce maillage ne change pas au cours du temps.
- le propagateur fin utilise une maille M_f qui suit l'élévation de l'onde incidente et la position instantanée du corps. Il évolue donc au cours du temps.

Afin de pouvoir mettre en relation les résultats des deux propagateurs, il est nécessaire qu'ils renvoient les valeurs du potentiel de vitesse et de l'élévation aux mêmes points. Il a donc été décidé d'interpoler le vecteur d'état renvoyé par le propagateur fin sur les nœuds du maillage utilisé par le propagateur grossier. Cette interpolation est réalisée à l'aide d'une approximation par B-spline ([33]).

Soit (x, y) les coordonnées d'un point de la surface libre appartenant au maillage M_g . Soit (x_0, y_0) les coordonnées du point du maillage M_f le plus proche de ce point et (x_i, y_i) où $1 \leq i \leq N_v$ les coordonnées de ses N_v voisins d'ordre 1 et d'ordre 2 dans le maillage M_f (Figure 2). Définissons une fonction σ telle que $\sigma(x, y)$ donne une bonne approximation

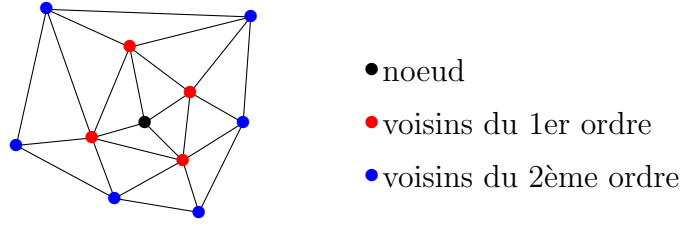


FIGURE 2 – Voisins du 1er et du 2ème ordre

de la valeur d'une quantité F (élévation de la surface libre ou potentiel de vitesse) au point (x, y) du maillage M_g à partir des valeurs F_i de cette quantité aux points (x_i, y_i) du maillage M_f . On peut par exemple utiliser des splines pseudo-polynomiales d'ordre 3 qui sont de la forme :

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^3 + P(x, y)$$

avec :

$$P(x, y) = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}xy + \alpha_{n+6}y^2 \quad (4)$$

où les valeurs de α_i sont déterminées en utilisant les contraintes $N_v + 7$ suivantes :

$$\sigma(x_i, y_i) = F_i, \forall i \in \llbracket 0, N_v \rrbracket \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i &= 0 & \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i x_i^2 &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i x_i &= 0 & \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i y_i^2 &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i y_i &= 0 & \sum_{i=0}^{N_v} \alpha_i x_i y_i &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

III – Résultats

III – 1 Cas d'étude

Le cas d'étude correspond à un cylindre fixe vertical de hauteur $h = 0.9$ m, de rayon $R = 0.2$ m et de masse $m = 65$ kg (figure 3). L'onde incidente est une onde régulière avec une période $T = 1$ s, une longueur d'onde $\lambda = 1.6$ m, une amplitude A et une cambrure $\varepsilon = \frac{2A}{\lambda}$. La profondeur de l'eau est $H = 1$ m et les limites latérales du domaine sont situées à une distance 3.0 m ($15R$) du centre. Pour les différentes simulations, un pas de temps $\delta t = 0.01$ s a été utilisé.

L'objectif est de simuler les interactions entre l'onde incidente et le cylindre au cours du temps, en particulier l'onde perturbée générée par les interactions du cylindre avec l'onde incidente et les forces s'appliquant au cylindre. Les résultats d'une simulation obtenue avec le code WS-CN sans parallélisation temporelle sont présentés dans la figure 4. La simulation a été réalisée avec 3 maillages différents avec une discrétisation variable afin d'évaluer la convergence des maillages. Dans la figure 4, les différences concernant l'élévation de la houle et la force verticale sont à peine discernables entre les trois maillages

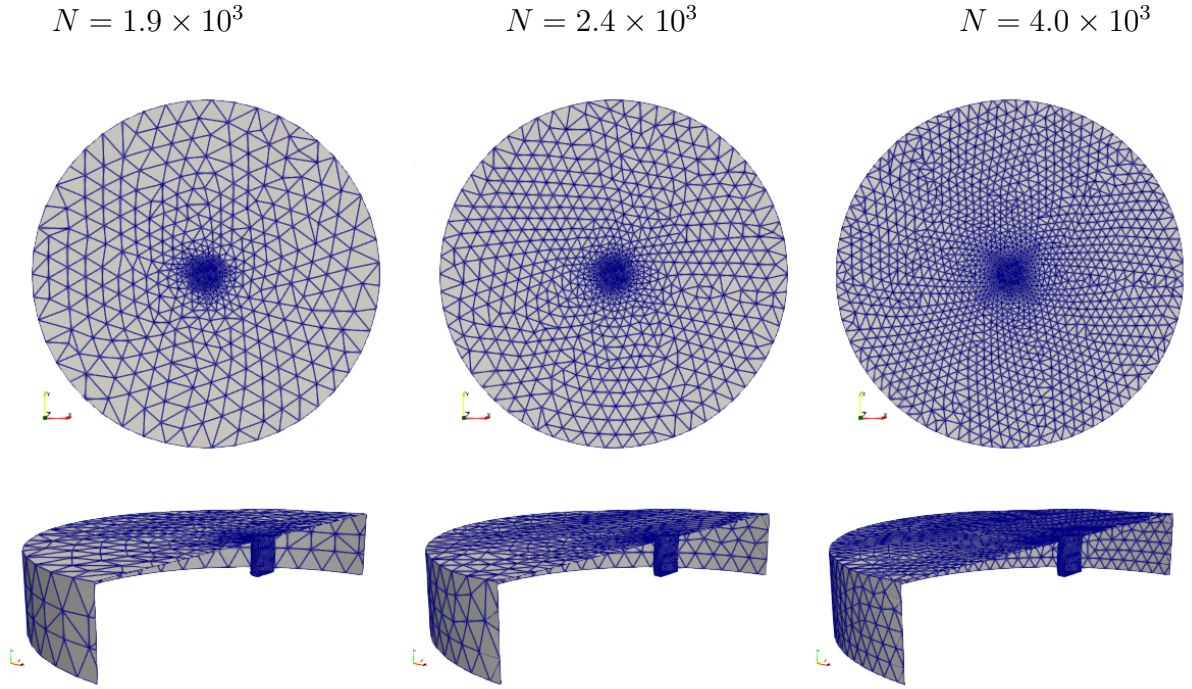


FIGURE 3 – Images des maillages utilisés dans le cas d'étude.

différents. Par conséquent, pour quantifier la précision, nous définissons E_N comme une mesure de l'erreur sur la force verticale :

$$E_N = \frac{\int_0^{N_t \delta t} |F_N(t) - F_{4000}(t)| dt}{\int_0^{N_t \delta t} |F_{4000}(t)| dt} \quad (7)$$

où $F_N(t)$ correspond à la force verticale calculée avec un maillage de N facettes (donc $F_{4000}(t)$ est la solution obtenue avec le maillage le plus fin).

Le tableau 1 montre l'erreur E_N en fonction du nombre de facettes. On voit que l'erreur est de l'ordre de 10^{-2} . Dans ce qui suit, le maillage avec $N = 1,9 \times 10^2$ facettes a été utilisé.

Nombre de facettes N	1.9×10^2	2.4×10^2	4.0×10^2
Erreur E_N	2.2×10^{-2}	1.0×10^{-2}	0

TABLE 1 – Erreur E_N en fonction du nombre de facettes.

Figure 4 montre qu'après une court régime transitoire, l'élévation de la surface libre et la force sur le cylindre sont quasi-périodiques. Les écarts à la périodicité sont dus aux réflexions de la houle sur les frontières latérales du domaine de simulation, qui ne sont pas entièrement éliminées par la plage d'absorption numérique.

Pour comparaison, la figure 4 inclut également les résultats de simulation obtenus avec le modèle linéaire (propagateur grossier). Des différences significatives avec les résultats obtenus avec le modèle non linéaire peuvent être observées. Cela montre que les effets non linéaires sont non négligeables dans cet exemple, ce qui justifie l'utilisation d'une méthode non-linéaire.

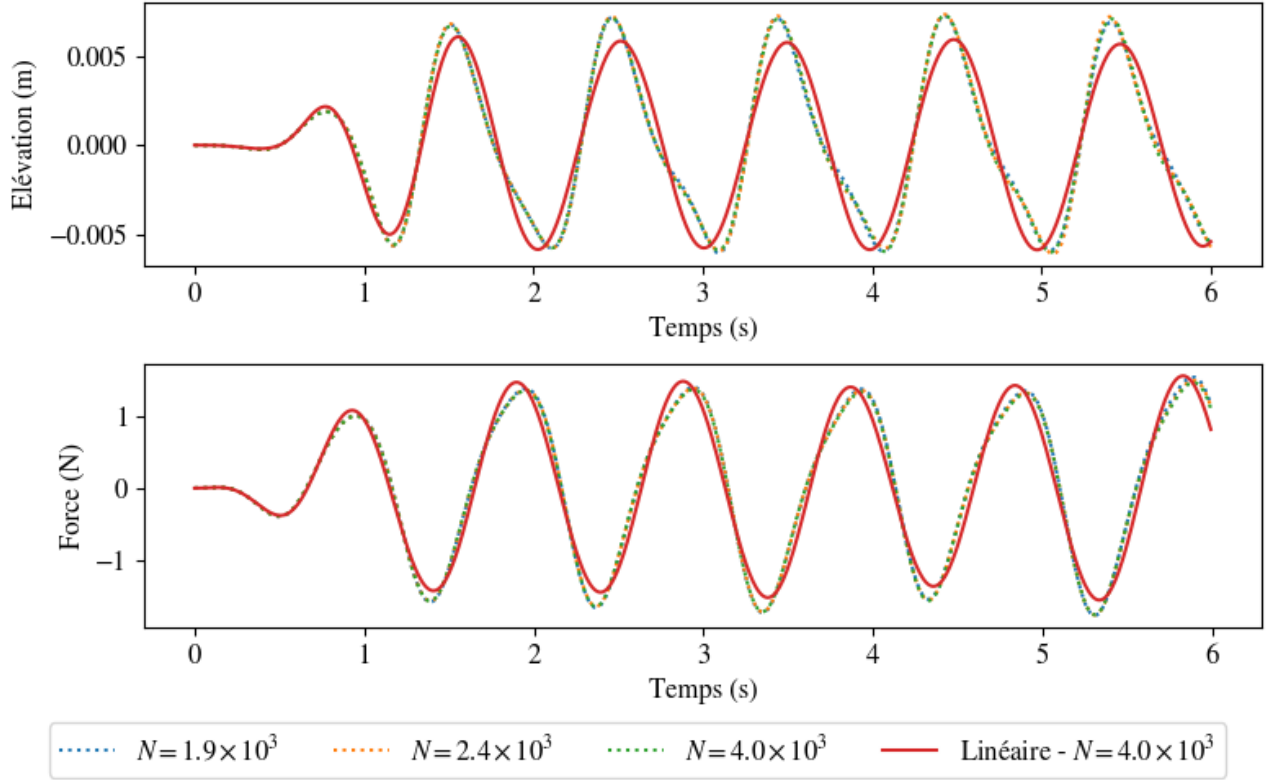


FIGURE 4 – Élévation de la houle perturbée (haut) en fonction du temps pour un point de la surface libre situé 0.2 m en aval du cylindre et forces verticales (bas) subies par le cylindre. Ces courbes ont été obtenues avec le code WS-CN sans utilisation de la parallélisation en temps ($A = 0.014$ m, $\varepsilon = 0.017$) avec trois maillages et avec une méthode linéaire avec un maillage de $N = 4,0 \times 10^2$ facettes.

III – 2 Convergence de la méthode Parareal

Les figures 5 et 6 montrent les résultats d’une simulation réalisée à l’aide du code WS-CN avec parallélisation temporelle pour une houle d’amplitude $A = 0.014$ m. Dans chaque figure, le graphique du haut montre les résultats obtenus après la première itération de la méthode Parareal. Les courbes suivantes correspondent aux résultats obtenus après la deuxième et la troisième itération respectivement. Les lignes verticales indiquent les intervalles de temps associés aux différents processeurs (20 processeurs ont été utilisés).

Sur le graphique du haut, on peut observer qu’après la première itération les résultats obtenus avec des simulations utilisant le propagateur fin sont à la fois très similaires à ceux obtenus avec une simulation utilisant uniquement le propagateur grossier (modèle entièrement linéaire) et très différents de la simulation de référence (version originale du code WS-CN). Il convient toutefois de noter les discontinuités aux moments correspondant aux limites des intervalles associés à chaque processeur (par exemple au moment $t_6 = 1.8$ s ou $t_{18} = 5.4$ s).

Après les deuxième et troisième itérations, on constate que ces discontinuités ont été fortement réduites. De plus, l’élévation de l’onde perturbée et la force verticale s’appliquant au corps sont très proches des résultats de référence. La méthode semble donc atteindre rapidement la convergence.

Pour mesurer la convergence, définissons une mesure \mathcal{E}_n de la cohérence entre la

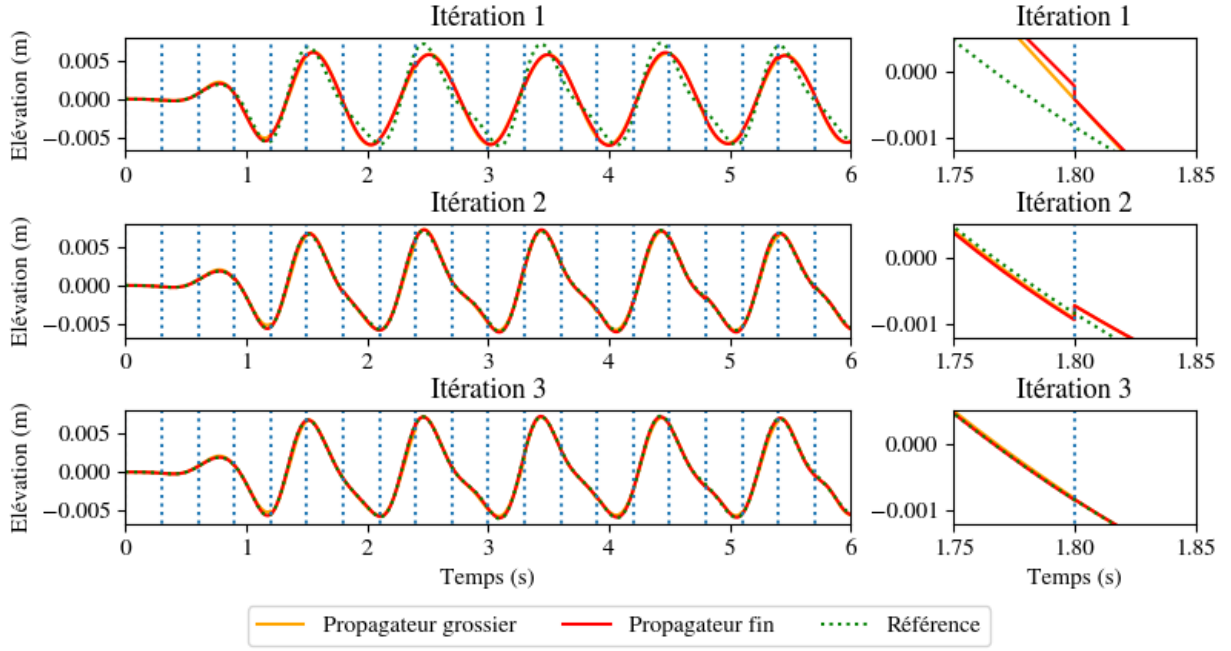


FIGURE 5 – Élévation de l’onde perturbée en fonction du temps en un point situé 0.2 m en aval du cylindre ($A = 0.014$ m, $\varepsilon = 0.017$, $T = 1$ s, $N_p = 20$, $N_t = 600$). Les lignes verticales en pointillés séparent les sous-intervalles qui sont associés aux différents processeurs. A droite, un zoom sur le temps $t_6=1.8$ s correspondant à une transition entre deux processeurs.

méthode Parareal, à l’itération n , et la version originale du code WS-CN :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\int_0^{N_t \delta t} |F_n(t) - F_{WS}(t)| dt}{\int_0^{N_t \delta t} |F_{WS}(t)| dt} \quad (8)$$

où $F_n(t)$ correspond à la force verticale obtenue à l’instant t après n itérations Parareal et $F_{WS}(t)$ correspond à la force verticale obtenue à l’instant t avec la version originale du code WS-CN.

La partie supérieure de la figure 7 montre \mathcal{E}_n en fonction du nombre d’itérations pour différentes cambrures de houle. Pour comparaison, les erreurs obtenues avec le modèle linéaire (propagateur grossier) sont également indiquées dans la figure. On constate qu’il suffit de 2 itérations pour que l’erreur sur les forces verticales soit inférieure d’un ordre de grandeur à celle obtenue par une simulation entièrement linéaire, quelle que soit l’inclinaison de la vague. En outre, les résultats montrent que l’augmentation du nombre d’itérations ne réduit pas davantage l’erreur. Cela peut s’expliquer par le fait que les étapes de remaillage dans le code WS-CN sans parallélisation temporelle et avec parallélisation temporelle ne se produisent pas en même temps. L’erreur restante est donc une erreur géométrique, qui est de l’ordre de 10^{-2} selon le tableau 1. Ainsi, le fait que l’erreur plafonne n’est pas lié à un problème de convergence dans l’algorithme Parareal. Cela est confirmé par la partie inférieure de la figure 7 qui montre que le critère de convergence α_n (équation (2)) continue de diminuer avec l’augmentation du nombre d’itérations. Bien que cela n’ait pas été testé par les auteurs, nous pensons que l’augmentation de la

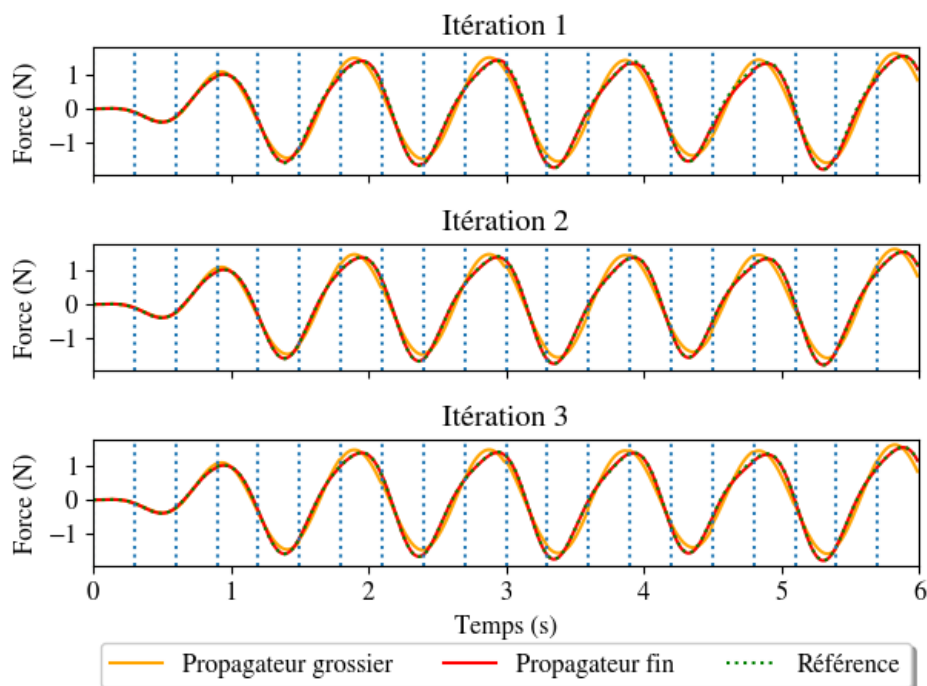


FIGURE 6 – Forces verticales subies par le cylindre ($A = 0.014$ m, $\varepsilon = 0.017$, $T = 1$ s, $N_p = 20$, $N_t = 600$). Les lignes verticales en pointillés séparent les sous-intervalles qui sont associés aux différents processeurs.

résolution du maillage pourrait résoudre ce problème.

Il est évident que l'accélération obtenue avec la méthode Parareal dépend du nombre d'itérations, qui dépend du critère $\alpha_n < \alpha_{min}$. D'après la figure 7, $\alpha_{min} = 10^{-1}$ semble être suffisant pour atteindre la convergence pour la force verticale. L'utilisation de ce critère permet d'obtenir des accélérations significatives pour des amplitudes de vagues inférieures à 0.02 m, comme le montre la figure 8 qui présente les résultats de simulations de $N_t = 600$ pas de temps effectuées avec 20 processeurs en parallèle. Par exemple, pour une onde incidente d'amplitude $A = 0.008$ m avec une période d'onde $T = 1$ s, le temps de calcul est divisé par 5. Il faut noter que l'utilisation de la méthode Weak-Scatterer est intéressante dans cet exemple, même si la cambrure de houle est faible $\varepsilon = 0.01$, comme le montre la figure 9, qui fait apparaître des différences visibles dans l'élévation de la houle lorsqu'elle est calculée avec la méthode Weak-Scatterer et la méthode entièrement linéaire (propagateur grossier).

À titre de comparaison, la figure 8 montre également le facteur d'accélération et le nombre d'itérations pour un critère de convergence $\alpha_{min} = 10^{-2}$. On constate qu'avec l'augmentation de l'amplitude de la vague, le facteur d'accélération diminue jusqu'à 1 (absence d'accélération). En effet, à mesure que l'amplitude de l'onde incidente augmente, la différence entre les résultats fournis par les propagateurs fins et grossiers s'accroît, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme. Par exemple, la méthode converge en seulement 3 itérations pour une houle incidente d'amplitude $A = 0.008$ m mais ne converge qu'après 12 itérations pour une onde incidente d'amplitude $A = 0.02$ m (Figure 8).

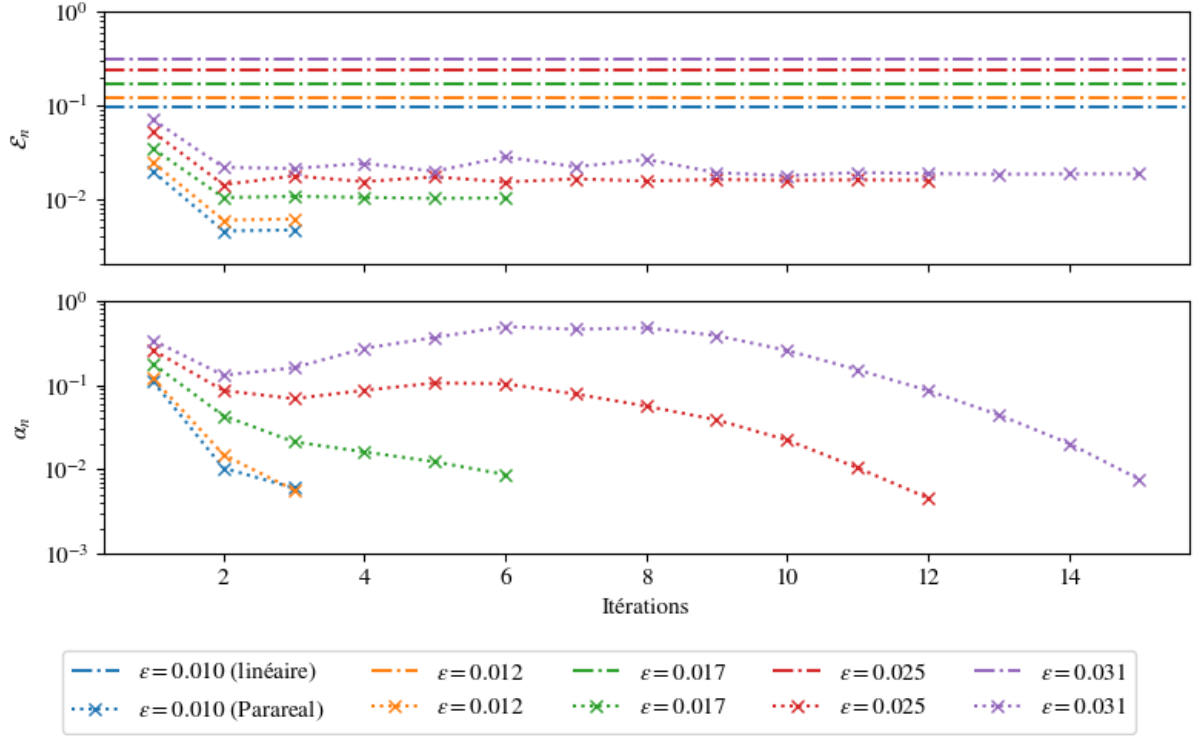


FIGURE 7 – Évolution de \mathcal{E}_n et α_n (en bas) en fonction du nombre d'itérations ($T = 1$ s, $N_p = 20$, $N_t = 600$).

III – 3 Influence du nombre de processeurs

La figure 10 (en haut) montre le facteur d'accélération en fonction du nombre de processeurs pour trois cas : une houle de période $T = 1$ s et de pente $\varepsilon = 0.013$, une houle de même période mais de cambrure différente $\varepsilon = 0.018$, et une houle de cambrure $\varepsilon = 0.013$ mais de période plus faible $T = 0.8$ s. On constate globalement que le calcul est accéléré, mais que l'évolution du facteur d'accélération en fonction du nombre de processeurs peut être assez décevant. En effet, il apparaît que le facteur d'accélération augmente avec le nombre de processeurs jusqu'à un certain nombre de processeurs, après quoi il diminue. Ce nombre limite de processeurs semble dépendre des caractéristiques de l'onde. Cependant, dans l'ensemble, on peut constater que cette limite est de l'ordre d'une centaine de processeurs pour les trois ensembles de paramètres considérés. De plus, la figure 10 (en bas) montre que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme augmente lentement avec le nombre de processeurs.

Pour expliquer pourquoi le facteur d'accélération diminue lorsqu'un certain nombre de processeurs est dépassé, il convient de rappeler que les conditions initiales données à chaque processeur sont calculées à partir des résultats des propagateurs grossier et fin (équation 1). Comme le propagateur fin (basé sur l'approche Weak-scatterer) et le propagateur grossier (approche linéaire) utilisent des maillages différents, il est nécessaire d'interpoler les données renvoyées par le propagateur fin sur les nœuds du maillage utilisé par le propagateur grossier. Le temps nécessaire à cette opération étant directement lié au nombre de processeurs, il devient prépondérant lorsque l'on dépasse un certain nombre de processeurs. C'est ce que montre la figure 11. Par conséquent, pour que la méthode Parareal soit efficace, il ne faut pas utiliser un trop grand nombre de processeurs.

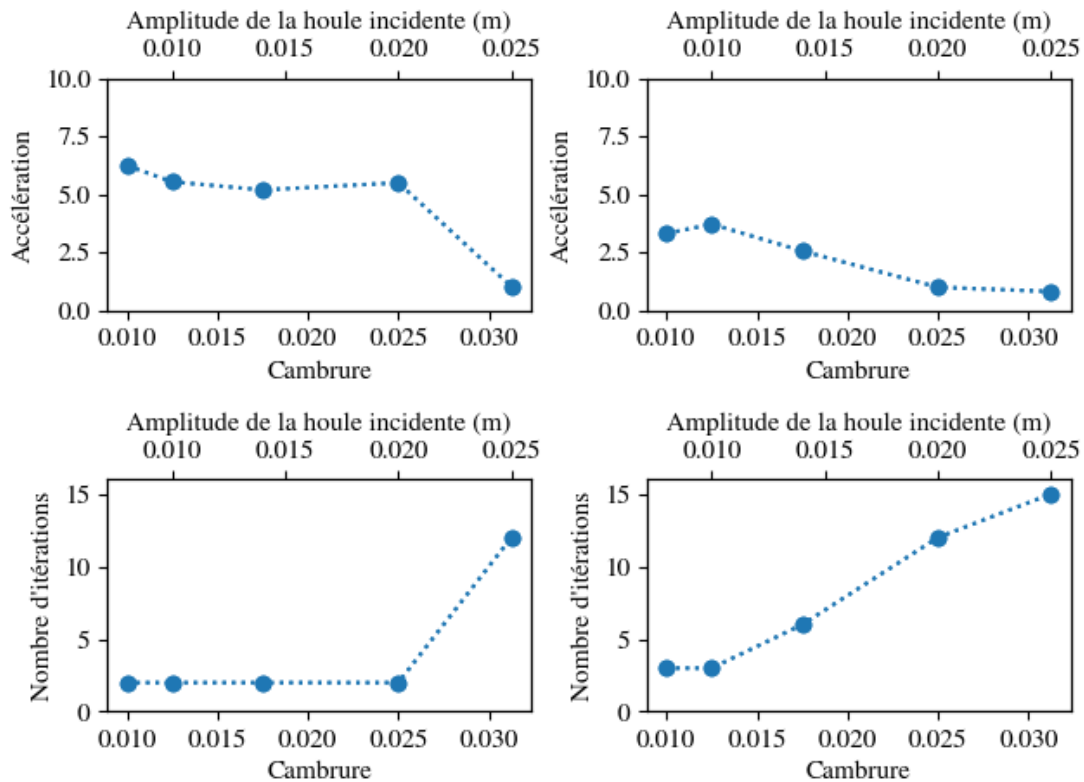


FIGURE 8 – Facteur d'accélération (en haut) et nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge (en bas) en fonction de l'amplitude de l'onde incidente ($T = 1$ s, $N_p = 20$, $N_t = 600$) pour une tolérance $\alpha_{min} = 10^{-1}$ (à gauche) et $\alpha_{min} = 10^{-2}$ (à droite).

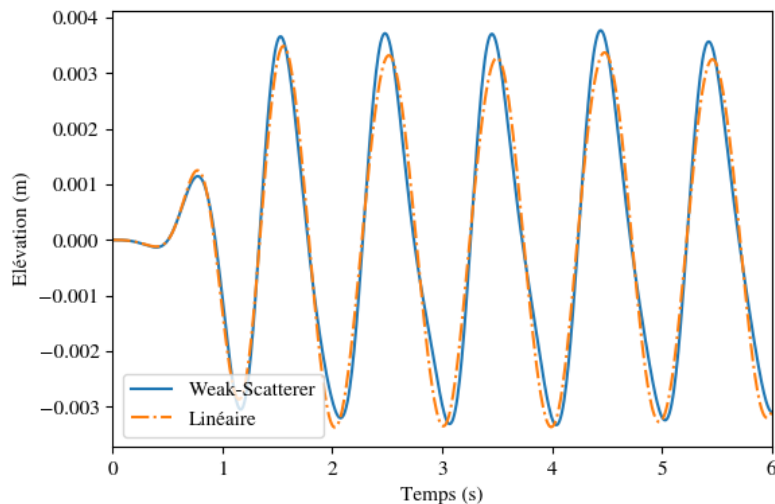


FIGURE 9 – Élévation de l'onde perturbée en fonction du temps d'un point de la surface libre, situé à 0.2 m en aval du cylindre, obtenue sans parallélisation en temps ($A = 0.008$ m, $\varepsilon = 0,01$, $N_t = 400$) à l'aide d'une simulation entièrement linéaire ou d'une simulation Weak-Scatterer.

III – 4 Tranchage

Comme le montre la figure 8, pour une durée de simulation fixée, la méthode converge plus lentement lorsque la cambrure de la houle augmente.

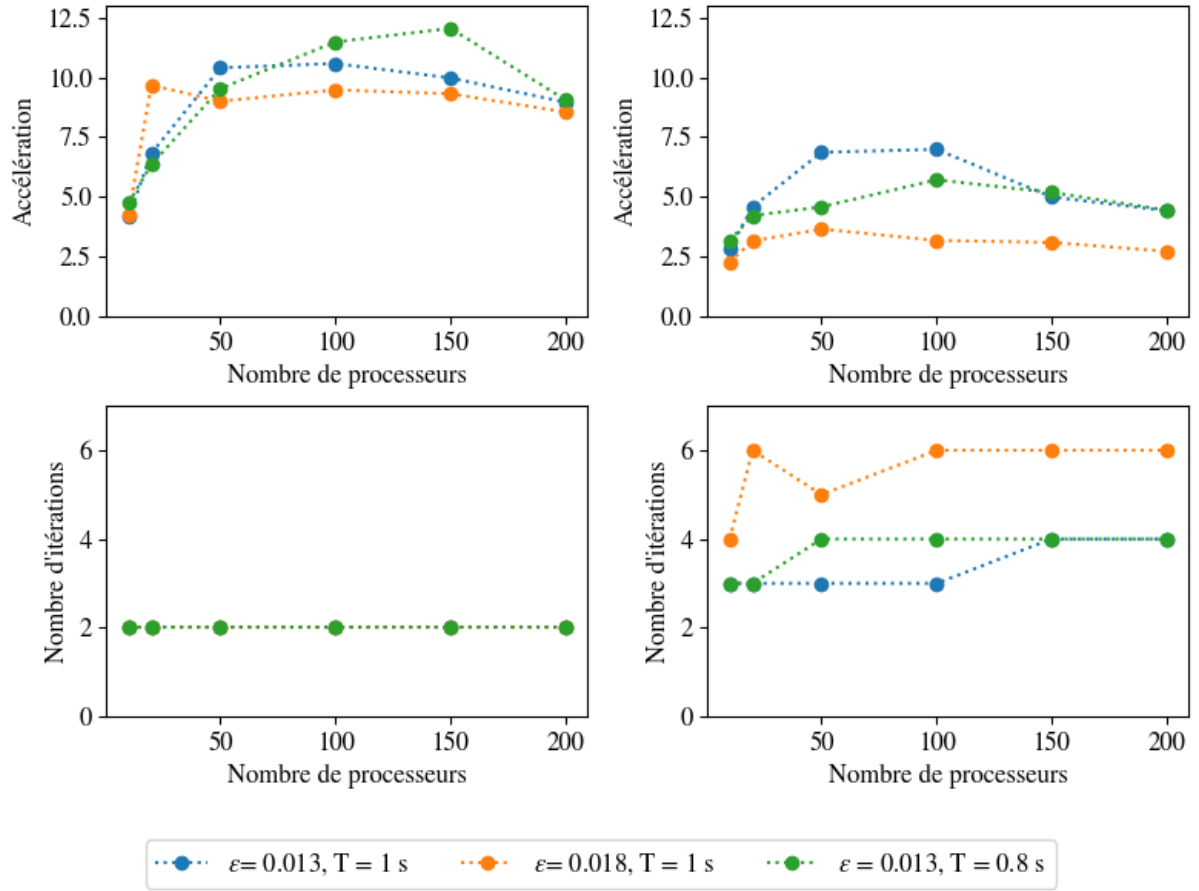


FIGURE 10 – Facteur d'accélération (en haut) et nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge (en bas) en fonction du nombre de processeurs ($N_t = 600$) pour une tolérance $\alpha_{min} = 10^{-1}$ (à gauche) et $\alpha_{min} = 10^{-2}$ (à droite).

On définit l'erreur α_k^n associée au temps t_k à l'itération n :

$$\alpha_n^k = \frac{\|U_k^n - U_k^{n-1}\|}{\|U_k^n\|} \quad (9)$$

On rappelle que le critère de convergence retenu est :

$$\max(\alpha_n^k) < \alpha_{min} \quad (10)$$

On remarque que, pour une itération donnée de l'algorithme Parareal, l'erreur α_n^k augmente avec t_k . Pour cette itération, le critère de convergence peut donc être vérifié pour une simulation plus courte et ne pas l'être pour une simulation plus longue (figure 12).

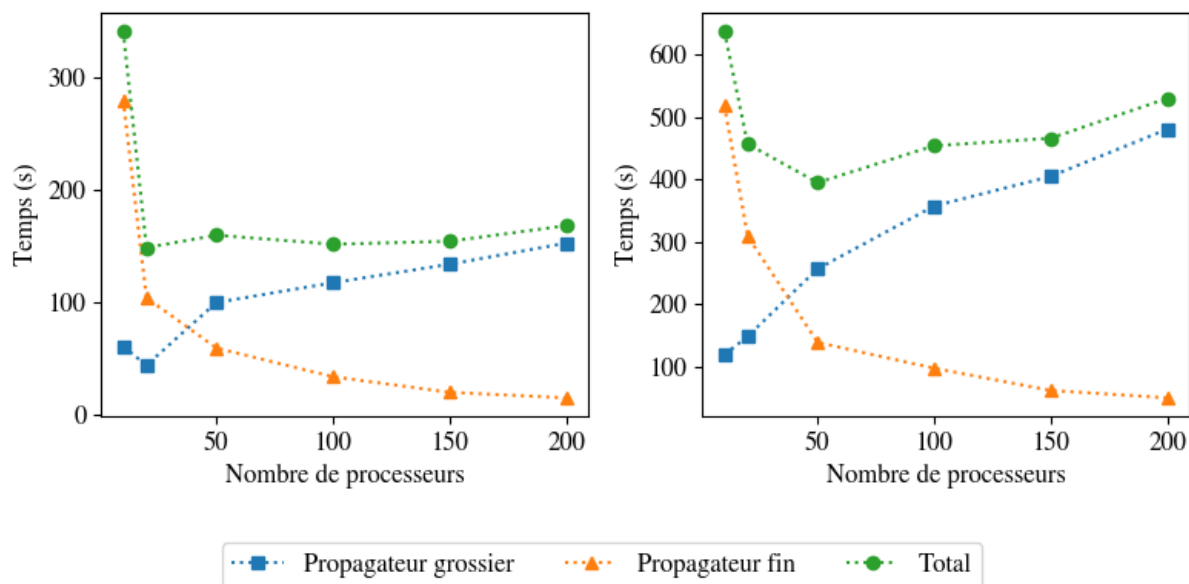


FIGURE 11 – Temps de calcul associés au propagateur grossier seul, au propagateur fin seul et à la somme des deux en fonction du nombre de processeurs ($A = 0.01$ m, $\varepsilon = 0.013$, $T = 1$ s, $N_t = 600$) pour une tolérance $\alpha_{min} = 10^{-1}$ (gauche) et $\alpha_{min} = 10^{-2}$ (droite).

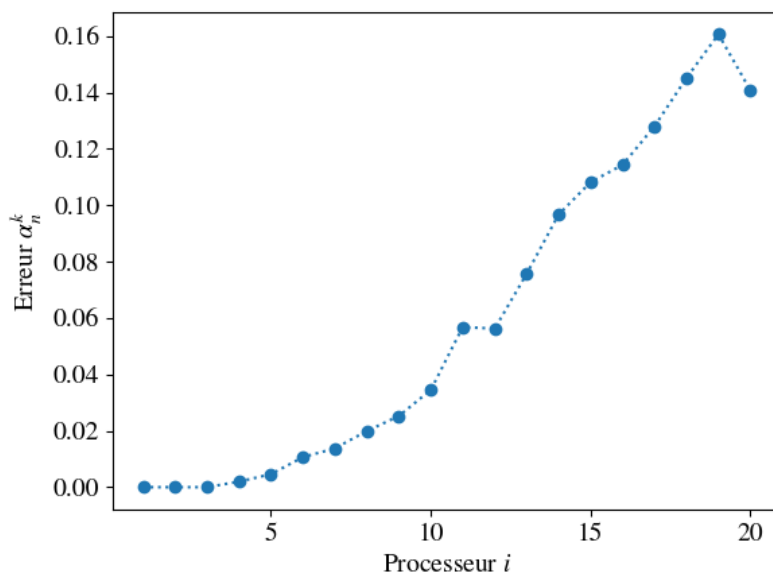


FIGURE 12 – Erreur associée à chaque processeur pour l'itération $n = 3$ ($A = 0.025$ m, $\varepsilon = 0.03$, $T = 1$ s, $N_p = 20$).

Pour pouvoir traiter des cas où l'amplitude de la houle incidente est plus élevée, l'idée est donc de diviser l'intervalle de temps total en tranches de durée $T_{tr} < T_{tot}$. L'algorithme Parareal est alors successivement utilisé sur chaque tranche jusqu'à convergence avant de passer à la tranche suivante (figure 13).

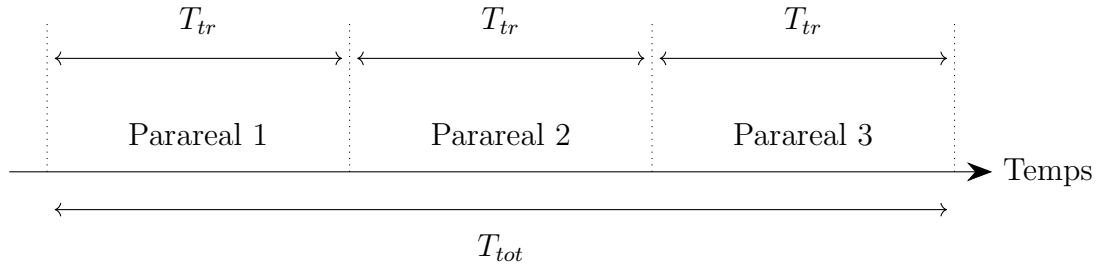


FIGURE 13 – Tranchage Parareal

Le nombre d'itérations permettant la convergence peut varier à chaque tranche d'une même simulation. On observe néanmoins que pour des cambrures de houle incidente plus importantes, l'utilisation de ce tranchage permet de réduire le nombre moyen d'itérations permettant la convergence (figure 14). Néanmoins, pour un nombre de processeurs fixé, l'utilisation de tranches implique, sur la totalité de l'intervalle de temps de la simulation, un plus grand nombre d'états intermédiaires pour lesquels il est nécessaire de réaliser, comme expliqué précédemment, une interpolation entre les maillages utilisés par le propagateur fin et le propagateur rapide. L'utilisation des tranches permet donc de faire converger l'algorithme Parareal, mais le gain de temps est faible au regard du nombre de processeurs utilisés (figure 14)

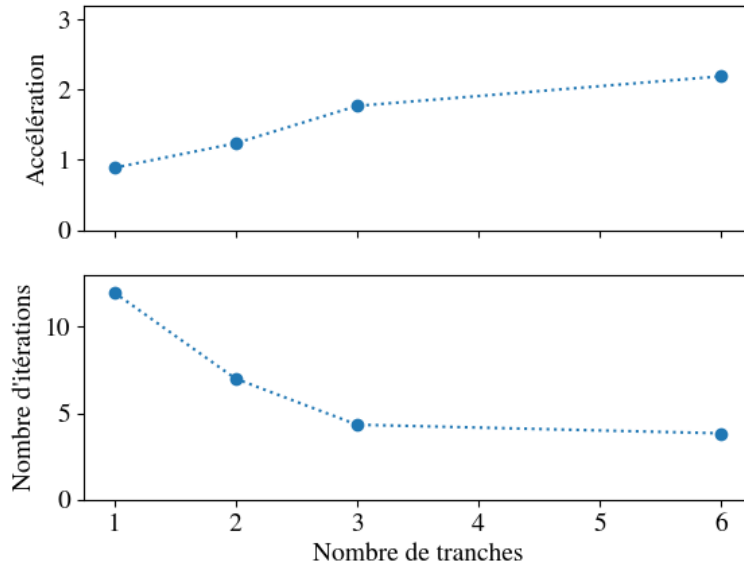


FIGURE 14 – Facteur d'accélération et nombre moyen d'itérations permettant la convergence en fonction du nombre de tranches divisant l'intervalle de temps total de la simulation ($A = 0.02$ m, $\varepsilon = 0.025$, $T = 1$ s, $N_p = 20$, $N_t = 600$, $\alpha_{min} = 10^{-2}$)

IV – Conclusions

Dans cette étude, nous avons cherché à savoir si la méthode Parareal peut être utilisée pour réduire le temps de calcul d'un solveur d'interaction vague-structure basé sur l'approche Weak-Scatterer. Nous avons montré qu'après un nombre suffisant d'itérations, l'algorithme converge vers les solutions obtenues par simulation séquentielle. Pour une

cambrure de houle suffisamment faible, la méthode converge assez rapidement pour permettre une réduction significative des temps de calcul. Cependant, cet avantage diminue avec l'augmentation de la cambrure de la houle. Nous avons également montré qu'il existe un nombre optimal de processeurs qui maximise le facteur d'accélération. Ceci est dû au compromis entre le nombre de simulations qui peuvent être effectuées en parallèle et le coût de l'interpolation entre les maillages utilisés par les différents propagateurs.

Pour améliorer les performances de la méthode, les travaux ultérieurs devraient se concentrer sur l'amélioration de la vitesse de convergence pour une plus grande pente. Par ailleurs, le critère de convergence porte sur la valeur maximale des erreurs calculées à l'issue des simulations effectuées par les différents processeurs sur chaque sous-intervalle. On constate que cette erreur est d'autant plus grande que le temps de simulation associé au processeur est long (Figure 12). Une stratégie pour augmenter la vitesse de convergence consiste à utiliser l'algorithme Parareal sur un temps de simulation plus court. Une fois que la méthode a convergé, l'intervalle de temps restant peut être traité de la même manière (figure 13). Cette technique de tranchage a permis d'améliorer la convergence et donc les temps de calcul.

Références

- [1] L. PAPILLON, R. COSTELLO et J. RINGWOOD. Boundary element and integral methods in potential flow theory : a review with a focus on wave energy applications. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 6 :303-337, août 2020. DOI : 10.1007/s40722-020-00175-7.
- [2] C.-H. LEE. *WAMIT theory manual*. Massachusetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering. 1995.
- [3] *AQWA theory manual*. ANSYS. 2013.
- [4] A. BABARIT et G. DELHOMMEAU. Theoretical and numerical aspects of the open source BEM solver NEMOH. In *11th European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC2015)*, Nantes, France, 2015.
- [5] R. LUQUET. *Simulation numérique de l'écoulement visqueux autour d'un navire soumis à une houle quelconque*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [6] M. BHINDER, C. MINGHAM, D. CAUSON, M. RAHMATI, G. AGGIDIS et R. CHAPLIN. Numerical and Experimental Study of a Surging Point Absorber Wave Energy Converter. In *Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference*, Uppsala, Sweden, jan. 2009. DOI : 10.1115/OMAE2009-79392.
- [7] C. WINDT, J. DAVIDSON et J. V. RINGWOOD. High-fidelity numerical modelling of ocean wave energy systems : A review of computational fluid dynamics-based numerical wave tanks. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 93 :610-630, 2018. ISSN : 1364-0321. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.05.020>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032118303629>.
- [8] J. S. PAWLOWSKI. A non-linear theory of ship motion in waves. In *Proceedings of the 19th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Seoul, Korea, 1992.
- [9] E. GUERBER, M. BENOIT, S. T. GRILLI et C. BUVAT. A fully nonlinear implicit model for wave interactions with submerged structures in forced or free motion. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(7) :1151-1163, 2012. ISSN : 0955-7997. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799712000288>.
- [10] E. DOMBRE, M. BENOIT, D. VIOLEAU, C. PEYRARD et S. GRILLI. Simulation of floating structure dynamics in waves by implicit coupling of a fully non-linear potential flow model and a rigid body motion approach. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 1 :55-76, fév. 2014. DOI : 10.1007/s40722-014-0006-y.
- [11] G. COLICCHIO, M. GRECO, C. LUGNI et O. M. FALTINSEN. Towards a fully 3D domain-decomposition strategy for water-on-deck phenomena. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 22(5, Supplement 1) :462-467, 2010. ISSN : 1001-6058. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(09\)60237-7](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(09)60237-7). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1001605809602377>.
- [12] T. KRISTIENSEN et O. M. FALTINSEN. Gap resonance analyzed by a new domain-decomposition method combining potential and viscous flow DRAFT. *Applied Ocean Research*, 34 :198-208, 2012. ISSN : 0141-1187. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.001>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118711000538>.

- [13] Y. CHOI. *Two-way Coupling between Potential and Viscous Flows for a Marine Application*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, nov. 2019.
- [14] Y. ZHANG, B. TENG et Y. GOU. Nonlinear modelling of a point-absorber wave energy converter based on the weak-scatterer approximation. *Ocean Engineering*, 239 :109924, 2021. ISSN : 0029-8018. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109924>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801821012695>.
- [15] C. TONG, Y. SHAO, H. B. BINGHAM et F.-C. W. HANSEN. A generalized weak-scatterer approximation for nonlinear wave–structure interaction in marine hydrodynamics. *Marine Structures*, 86 :103292, 2022. ISSN : 0951-8339. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2022.103292>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951833922001289>.
- [16] L. LETOURNEL, C. CHAUVIGNE, B. GELLY, A. BABARIT, G. DUCROZET et P. FERRANT. Weakly nonlinear modeling of submerged wave energy converters. *Applied Ocean Research*, 75 :201-222, 2018.
- [17] C. CHAUVIGNE, L. LETOURNEL, A. BABARIT, G. DUCROZET, P. BOZONNET, J.-C. GILLOTEAUX et P. FERRANT. Progresses in the development of a weakly-nonlinear wave body interaction model based on the weak-scatterer approximation. In A. S. of MECHANICAL ENGINEERS, éditeur, *International conference on offshore mechanics and arctic engineering*, tome 56574, 2015.
- [18] P.-Y. WUILLAUME, A. BABARIT, F. RONGERE, M. LYNCH et P. FERRANT. Numerical simulation of lowering operations from the coupling between the Composite-Rigid-Body Algorithm and the weak-scatterer approach. *Ocean Engineering*, 241(109997), 2021.
- [19] G. LF et V. ROKHLIN. A Fast Algorithm for Particle Simulation. *Journal of Computational Physics*, 73 :325-348, avr. 2001. DOI : 10.1016/0021-9991(87)90140-9.
- [20] J. R. PHILLIPS et J. K. WHITE. A precorrected-FFT method for electrostatic analysis of complicated 3-D structures. *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.*, 16 :1059-1072, 1997.
- [21] S. BÖRM, L. GRASEDYCK et W. HACKBUSCH. Introduction to hierarchical matrices with applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(5) :405-422, 2003. ISSN : 0955-7997. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(02\)00152-2](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(02)00152-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799702001522>. Large scale problems using BEM.
- [22] B. TENG et Z.-j. SONG. Extension of the frequency-domain pFFT method for wave structure interaction in finite depth. *China Ocean Engineering*, 31 :322-329, juin 2017. DOI : 10.1007/s13344-017-0038-x.
- [23] J.-L. LIONS, Y. MADAY et G. TURINI. Résolution d’EDP par un schéma en temps pararéel. *Comptes rendus de l’Académie des sciences*. Série I, Mathématique, 2001.
- [24] Y. MADAY et G. TURINICI. Parallel in time algorithms for quantum control : Parareal time discretization scheme. *International Journal of Quantum Chemistry*, 93 :223 -228, juin 2003. DOI : 10.1002/qua.10554.

- [25] J. TRINDADE et J. PEREIRA. Parallel-in-time simulation of the unsteady Navier–Stokes equations for incompressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45 :1123 -1136, août 2004. DOI : 10.1002/flid.732.
- [26] P. F. FISCHER, F. HECHT et Y. MADAY. A Parareal in Time Semi-implicit Approximation of the Navier-Stokes Equations. In T. J. BARTH, M. GRIEBEL, D. E. KEYES, R. M. NIEMINEN, D. ROOSE, T. SCHLICK, R. KORNUBER, R. HOPPE, J. PÉRIAUX, O. PIRONNEAU, O. WIDLUND et J. XU, éditeurs, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 433-440, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg, 2005. ISBN : 978-3-540-26825-3.
- [27] S. GLIMBERG. *Designing Scientific Software for Heterogeneous Computing : With application to large-scale water wave simulations*. English. Thèse de doctorat, Technical University of Denmark, 2013.
- [28] A. S. NIELSEN. Feasibility study of the parareal algorithm. In 2012. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123881089>.
- [29] D. SAMADDAR, D. NEWMAN et R. SANCHEZ. Parallelization in time of numerical simulations of fully-developed plasma turbulence using the parareal algorithm. *Journal of Computational Physics*, 229 :6558-6573, mai 2010. DOI : 10.1016/j.jcp.2010.05.012.
- [30] L. GRIGORI, S. A. HIRSTOAGA, V.-T. NGUYEN et J. SALOMON. Reduced model-based parareal simulations of oscillatory singularly perturbed ordinary differential equations. *Journal of Computational Physics*, 436 :110282, 2021. URL : <https://hal.science/hal-03104042>.
- [31] L. GRIGORI, S. A. HIRSTOAGA et J. SALOMON. A parareal algorithm for a highly oscillating Vlasov-Poisson system with reduced models for the coarse solving. *Computers & Mathematics with Applications*, 130 :137-148, 2023. ISSN : 0898-1221. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.12.004>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122122005065>.
- [32] Y. POIRIER, J. SALOMON, A. BABARIT, P. FERRANT et G. DUCROZET. Acceleration of a wave-structure interaction solver by the Parareal method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 167 :105870, 2024. ISSN : 0955-7997. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105870>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095579972400345X>.
- [33] K. PELLETIER. *Simulations au second ordre des interactions houle-structure en régime instationnaire*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2002.