

## **INTERACTIONS OBLIQUES DE SOLITONS: MODÈLES ET EXPERIENCES**

### ***OBLIQUE SOLITON INTERACTIONS: MODELS AND EXPERIMENTS***

**E. BARTHELEMY<sup>(1)</sup>, T. LEDUQUE<sup>(1)</sup>, H. MICHALLET<sup>(1)</sup>  
M. KACZMAREK<sup>(1)</sup>, N. MORDANT<sup>(1)</sup>**  
*eric.barthelemy@grenoble-inp.fr*

<sup>(1)</sup>Laboratoire LEGI UMR 5519, Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France

#### **Résumé**

Des expériences ont été menées dans un bassin à houles multidirectionnelles pour analyser les interactions d'ondes solitaires obliques. La mesure des déplacements de la surface libre repose sur de la stéréoscopie à partir d'images vidéo. Les résultats expérimentaux sont globalement conformes au modèle de Miles (1977). Les seuils en termes d'angle d'interaction et d'amplitude des ondes entre des interactions faibles régulières et les interactions fortes instationnaires sont discutés.

#### **Summary**

Experiments were carried out in a multidirectional wave tank to analyze the interactions of oblique solitary waves. The measurements of the free surface displacement are based on stereoscopy using video images. The experimental results are broadly in agreement with the model of Miles (1977). The thresholds in terms of interaction angle and wave amplitude between regular weak interactions and unsteady strong interactions are discussed.

## **I – Introduction**

Dans le domaine de la turbulence intégrable, les gaz de solitons mono-directionnels et bidirectionnels (1D) (Zakharov, 1971) en eau peu profonde ont fait l’objet de nombreuses études théoriques et de confirmations expérimentales (Bonnemain *et al.*, 2022; Redor *et al.*, 2019, 2020, 2021). Le déphasage lors des interactions entre solitons (Zhang et Li, 2003) est l’élément clef qui conduit au caractère aléatoire des gaz de solitons 1D. La généralisation à des gaz de solitons multi-directionnels (2D) dans lesquels de nombreux solitons avec des angles, des amplitudes et des phases aléatoires interagissent est encore largement à explorer à la fois théoriquement et expérimentalement.

En 2D lorsque les solitons se propagent dans toutes les directions, les interactions deviennent plus complexes (Nicolas, 1993; Kodama et Yeh, 2016). Sur le plan théorique l’interaction de deux solitons obliques est connue pour également induire des déphasages (Miles, 1977), ce qui est un ingrédient important pour produire des champs d’ondes aléatoires comme les gaz de solitons. On doit la première description théorique de l’interaction de deux solitons obliques en milieu infini à Miles (1977) qui a obtenu l’expression de solutions d’interactions progressives. Aux grands angles entre les directions de propagation, l’interaction est dite “interaction faible” par Miles (1977), l’onde résultante est constituée de la superposition des deux solitons et, dans la zone d’interaction, d’un *stem*. Le *stem* est la signature du déphasage induit d’un soliton par l’autre. Aux petits angles (interaction dite “forte” par Miles (1977)), la solution est singulière dans le sens où le déphasage devient très important et ces interactions ne sont pas progressives et font intervenir une troisième onde.

L’autre cadre conceptuel pour décrire des interactions entre ondes non-linéaires faiblement dispersives est l’équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) (Kadomtsev et Petviashvili, 1970). Il s’agit de l’équivalent de l’équation de KdV pour des ondes dont l’étalement directionnel de propagation est faible. Kodama (2010) retrouve dans ce cadre les interactions faibles progressives à deux solitons. Bien que cette équation soit intégrable il ne semble toujours pas exister de “Direct Scattering Transform” qui permettraient de donner un sens physique aux valeurs propres du problème spectral associé (Osborne, 1994), comme en 1D, et donc de pouvoir analyser des données expérimentales en termes de solitons.

L’objectif ce compte rendu est de confronter les théories qui décrivent des interactions obliques de solitons avec des mesures effectuées en bassin à houle.

## **II – Matériels et méthodes**

### **II – 1 Expériences**

Les expériences analysées ont été réalisées dans le grand bassin du LHF (Artelia, Pont-de-Claix, France). Le bassin de 30 m × 27 m est équipé d’un générateur segmenté constitué de 60 batteurs verticaux mobiles qui peuvent être actionnés les uns indépendamment des autres. Les trois autres côtés du bassin sont des murs verticaux rigides réfléchissant les ondes. La profondeur d’eau au repos vaut  $h = 0.35 \text{ m} \pm 5 \text{ mm}$  pour toutes les expériences. De la vidéo avec une technique stéréoscopique (Leduque *et al.*,

2024) est utilisée pour reconstruire les déplacements de la surface libre à une résolution spatiale horizontale de 16 cm, verticale d'environ 5 mm et temporelle de 10 à 20 images par seconde. La reconstruction stéréoscopique repose sur la corrélation entre deux images successives de motifs à la surface libre créés par un ensemencement de particules flottantes d'environ 3 mm. Pour plus de détails voir Leduque *et al.* (2024) et le compte rendu de Michallet *et al.* (2024) présentés à ces 19<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique.

## II – 2 Éléments de théorie

Les interactions obliques dites faibles sont décrites théoriquement par la superposition de deux ondes solitaires dont deux des branches ont subi un déphasage (Miles, 1977; Nicolas, 1993). La figure 1 schématise ce type d'interaction pour laquelle l'ensemble du "motif" se propage à vitesse constante  $c^*$  le long de la droite d'angle  $\psi^*$ . Cette cinématique impose les contraintes suivantes :

$$\frac{\sin(\psi_1 - \psi^*)}{c_1} = \frac{\sin(\psi_2 - \psi^*)}{c_2} = \frac{1}{c^*} \quad (1)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les vitesses KdV (voir formule (6)) des solitons en interaction.

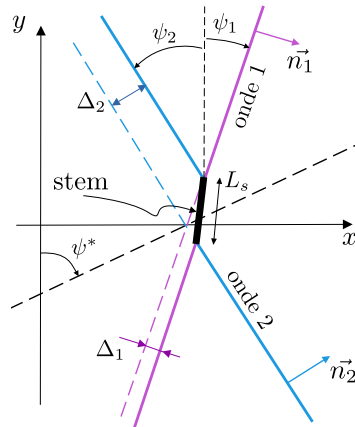


FIGURE 1 – Schéma d'une interaction faible à deux solitons. Droites de couleurs représentent les crêtes des solitons. Lignes pointillées couleurs représentent les positions des branches si aucun déphasage n'intervient. Les vecteurs normaux aux crêtes  $\vec{n}_i$  indiquent la direction de propagation, le déphasage spatial est  $\Delta_i$  et la longueur caractéristique du *stem*  $L_s$ . La droite en pointillés noirs représente la trajectoire du maximum de l'interaction. L'angle d'interaction est  $\Psi = \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}$ .

L'expression de Miles (1977) pour le champ de déplacements de la surface libre est

exprimé au second ordre en variables dimensionnelles comme :

$$\eta(x, y, t) = a_1 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + \chi_2) + a_2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 + \chi_1) + \frac{a_1 a_2}{h} I \operatorname{sech}^2 \theta_1 \operatorname{sech}^2 \theta_2 \quad (2)$$

$$\theta_i = \beta_i (\vec{n}_i \cdot \vec{x} - c_i t) = \beta_i (x \cos \psi_i + y \sin \psi_i - c_i t) \quad (3)$$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{3 a_i}{4 h^3}} \quad (4)$$

$$I = \left( \frac{3}{2 \sin^2 \Psi} - 3 + 2 \sin^2 \Psi \right) \quad (5)$$

$$c_i = c_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a_i}{h} \right) \quad \text{avec } c_0 = \sqrt{gh} \quad (6)$$

$$\chi_i = \frac{1}{h} \sqrt{a_1 a_2} \left( 1 - \frac{3}{4 \sin^2 \Psi} \right) (1 - \tanh \theta_i) \quad (7)$$

où  $a_i$  sont les amplitudes des ondes en interaction,  $h$  la profondeur d'eau au repos et  $\Psi = (\psi_2 - \psi_1)/2$  le demi angle entre les directions de propagation des deux ondes. Les hypothèses sous-jacentes à cette solution sont celles de l'équation de KdV, à savoir faible non-linéarité et faible dispersion autrement dit tel que  $a_i/h \sim (h/l_i)^2$  où  $l_i$  est la dimension horizontale transverse à la crête des ondes. Cet "équilibre" est d'ailleurs encapsulé dans la formule de  $\beta_i$  qui représente l'inverse de la largeur d'un soliton. Le paramètre  $I$  dit d'interaction est en facteur du terme de second ordre en amplitude. Les fonctions  $\chi_i(x, y, t)$  sont les déphasages qui constituent des corrections d'ordre 2 de la phase. Les valeurs maximales du déphasage spatial des ondes sont :

$$\Delta_1 = 2 \frac{\chi_2(\theta_2 = 0)}{\beta_1} = \sqrt{\frac{a_2 h}{3}} \left( 1 - \frac{3}{4 \sin^2 \Psi} \right) \quad (8)$$

$$\Delta_2 = 2 \frac{\chi_1(\theta_1 = 0)}{\beta_2} = \sqrt{\frac{a_1 h}{3}} \left( 1 - \frac{3}{4 \sin^2 \Psi} \right) \quad (9)$$

De plus on constate que,

$$\chi_i = 0 \quad \text{pour } \Psi = \frac{\pi}{6} \quad (10)$$

$$\chi_i \rightarrow \infty \quad \text{lorsque } \Psi \rightarrow 0. \quad (11)$$

Le comportement (10) indique qu'il n'y a pas de déphasage lorsque les directions de propagation des ondes sont inclinées de  $60^\circ$  l'une par rapport à l'autre. La formule (7) indique que pour  $\Psi < 60^\circ$ ,  $\chi_i$  est négatif et pour  $\Psi > 60^\circ$  positif. La singularité que représente la propriété (11) traduit un vrai comportement physique. C'est ce que Miles (1977) qualifie d'interaction "forte" non stationnaire à trois ondes. La limite entre les cas d'interactions fortes et faibles est caractérisée par le paramètre adimensionnel  $\kappa$  que Miles (1977) définit comme,

$$\kappa_M = \frac{\Psi}{\sqrt{3 a_i/h}} \quad (12)$$

Nous en proposons l'interprétation physique suivante dans le cas d'ondes d'amplitudes proches (interaction quasi-symétrique). Lorsque la longueur du *stem*  $L_s \simeq \Delta / \sin \psi$  (voir Fig. 1) devient beaucoup plus grande que la largeur caractéristique  $2/\beta$  d'une onde solitaire qui aurait l'amplitude  $a$ , le *stem* se comporte comme une onde à part entière. Ceci suggère de définir un paramètre  $\kappa$  équivalent à (12) comme le rapport entre la largeur  $2/\beta$  et  $L_s$ , ce qui conduit à :

$$\kappa = \frac{h \sin \Psi}{\sqrt{a_1 a_2} \left| 1 - \frac{3}{4 \sin^2 \Psi} \right|} \quad (13)$$

Les seuils  $\kappa = 1$  sont tracés sur la figure 2 pour des interactions symétriques  $a_1 = a_2$ . Notre prédicteur et celui de Kodama et Yeh (2016) sont très similaires. Celui de Miles (1977) s'en écarte sensiblement. En dessus des courbes l'interaction est dite régulière *i.e.* progressive avec  $\kappa > 1$ . En dessous l'interaction à deux solitons est irrégulière *i.e.* instationnaire, avec  $\kappa < 1$ , dont l'évolution tend vers la génération d'un troisième soliton.

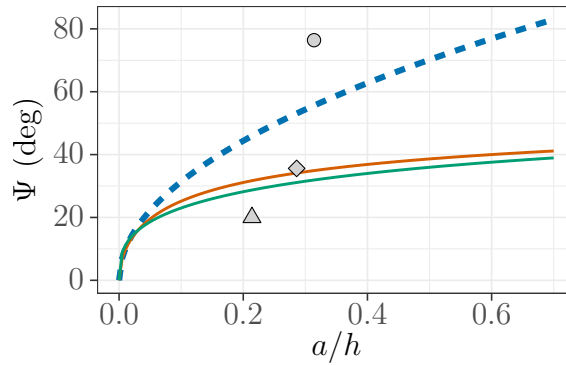


FIGURE 2 – Seuil interaction régulière / interaction à trois solitons pour une interaction symétrique ( $a_1 = a_2 = a$ ).  $a$  est l'amplitude de l'onde en interaction ;  $h$  la profondeur d'eau ;  $\Psi$  l'angle d'interaction. Pointillé bleu : critère de Miles (12) ; courbe orange : critère KP second ordre (Kodama et Yeh, 2016) ; courbe verte : critère "physique" formule (13). Cercle : expérience Fig. 4, diamant : expérience Fig. 7, triangle : expérience Fig. 8.

### III – Expériences et résultats

Nous présentons dans cette partie des comparaisons entre certaines expériences à deux solitons et les solutions théoriques. Une synthèse des cas possibles est donnée par Wang et Pawlowicz (2012) à partir des résultats de Miles (1977) avec la figure 3. Notons que lors de nos expériences nous n'avons pas généré et observé des interactions de type 2.

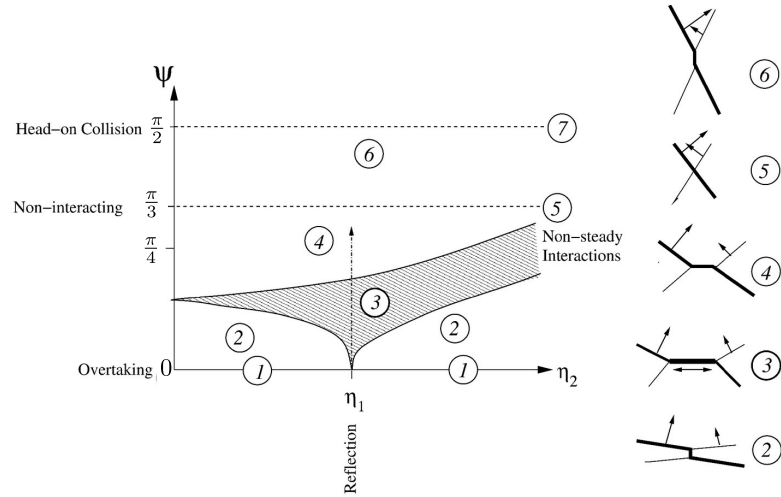


FIGURE 3 – Schéma des différents types d’interactions à deux solitons. En abscisse l’amplitude des ondes. En ordonnée la demi différence  $\Psi$  des angles de propagation des 2 ondes qui intervient dans la formule (7). La zone hachurée correspond à des interactions instationnaires non-progressives appelées type 3. Au dessus de cette zone les interactions sont faibles de type (4), (5) et (6). Figure tirée de Wang et Pawlowicz (2012).

### III – 1 Interactions faibles

La figure 4 montre un champ d’élévations de la surface libre d’une interaction faible à grand angle  $\Psi \simeq 75^\circ$  de type 6. Le soliton 1 se propage vers la gauche et le soliton 2 vers la droite. Les deux solitons ont des amplitudes très voisines : il s’agit d’une interaction symétrique. Cette interaction se situe au-dessus de toutes les courbes de la figure 2, ce qui indique une interaction régulière donc progressive. La crête du *stem* est orientée dans la direction de propagation de celui-ci et sa longueur caractéristique est bien plus grande que celle transverse des solitons. Cela est illustré sur la figure 5 qui présente les déplacements de la surface libre suivant deux coupes : perpendiculairement à la branche 3 (Fig.5-a) et le long de la droite trajectoire du *stem* (Fig. 5-b). L’ajustement aux points expérimentaux sur figure 5-a donne un niveau de référence sur lequel se propage le soliton plus bas que le niveau moyen  $z = 0$  ce qui est visible en particulier entre  $s = 4$  et  $s = 6$  m. Ce niveau de référence vaut  $z_{ref} = -1.4$  cm. La coupe figure 5-b le long du *stem* montre un déplacement maximal bien reproduit par la théorie et qui du fait de la non-linéarité excède  $a_1 + a_2 = 0.22$  m. La solution théorique présente la bonne échelle de longueur mais avec un léger décalage.

Sur la figure 6 sont tracés à la fois la trajectoire mesurée du maximum du *stem* et les variations des déplacements de la surface libre le long des crêtes des solitons (le long des pointillés de la Fig.4). Pour ce qui est de la trajectoire du *stem* on constate que les points sont alignés. Leur espacement dans l’espace est plus ou moins régulier alors que la cadence des prises d’images est très précise. Cette irrégularité est liée à la résolution spatiale qui produit des erreurs dans la recherche des maximums de déplacements verticaux pour suivre le maximum du *stem* et aux légères fluctuations de forme du

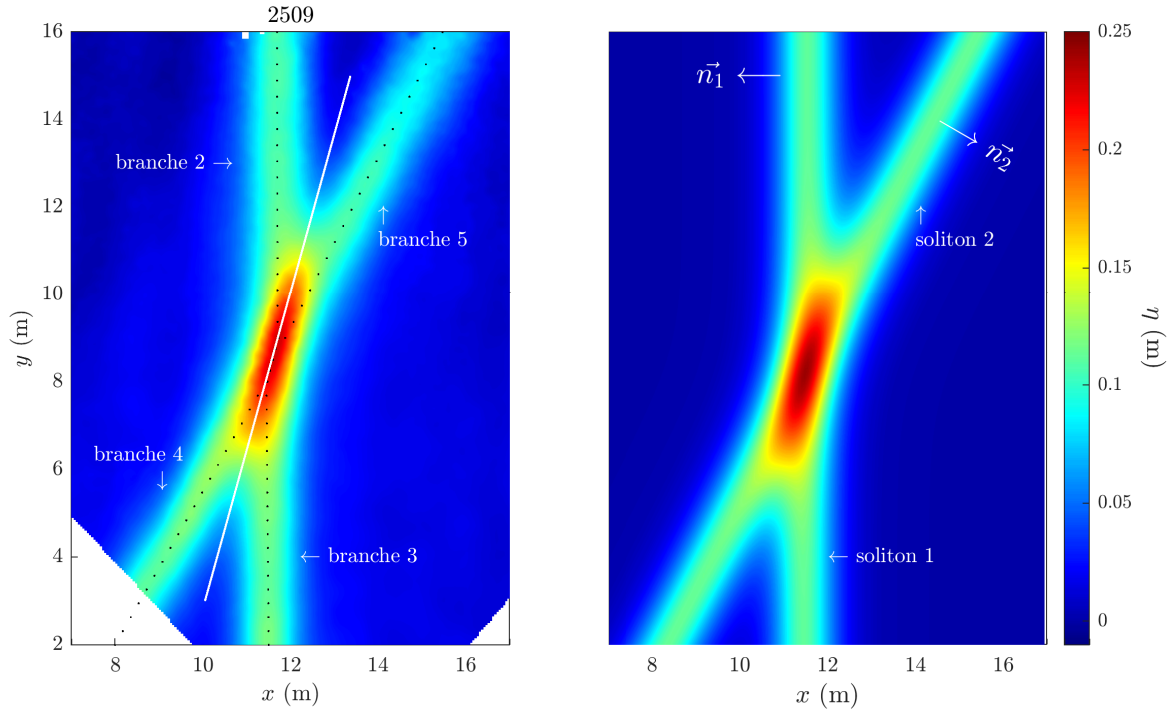


FIGURE 4 – Interaction faible à deux solitons de type 6. Vue en plan des déplacements de la surface libre  $\eta(X, Y)$ . A gauche : expérience 2509 ; pointillés noirs : lignes les crêtes ; droite en blanc : trajectoire du maximum du *stem* d'angle  $\Psi^* = -15.5^\circ$ . Angle d'interaction  $\Psi = 76.4^\circ$ . A droite : solution calculée avec (2) pour les amplitudes  $a_1 = 0.11$  m et  $a_2 = 0.11$  m. La coordonnée  $x$  est telle que  $x = 0$  est le plan des batteurs au repos. Les murs sont en  $x = 27$  m,  $x = 0$  m et  $x = 30$  m.

*stem* au cours de sa propagation. A partir de cette donnée on peut déterminer la valeur expérimentale de la vitesse à laquelle se déplace l'ensemble de la figure d'interaction dans la direction de la trajectoire du *stem*. On trouve  $c^* = 8.26$  m/s. En utilisant une des formules (1) on en déduit la vitesse que devrait avoir le soliton 1 soit  $c_1 = 2.19$  m/s que l'on compare à la vitesse calculée par la correction KdV (6) qui donne,  $c_1 = 2.15$  m/s. L'erreur est d'environ 2%.

Les variations d'amplitudes le long des crêtes (Fig. 6) sont importantes, de l'ordre de 2 cm. Plusieurs facteurs sont en jeu. Le soliton 2 est généré de manière oblique avec un angle de  $-30^\circ$  et donc la partie de la branche 5 du côté du mur  $y = 30$  m a subi une diffraction qui induit une diminution d'amplitude le long de la crête. Les variations que l'on observe aux petites échelles résultent de la superposition du champ de solitons avec un champ d'ondes dispersives de faible amplitude partout présentes dans le bassin. Ces ondes dispersives proviennent des interactions aux murs, de la génération aux batteurs mais aussi directement de l'interaction entre les solitons eux-mêmes (Renouard *et al.*, 1985; Seabra-Santos *et al.*, 1989). La solution théorique est calculée en prenant pour le soliton 1 la valeur moyenne de l'élévation de la surface libre de la branche 3 augmentée de  $-z_{ref}$  et pour le soliton 2 la valeur moyenne de l'élévation de la surface libre de la branche 4 aussi augmentée de  $-z_{ref}$ .

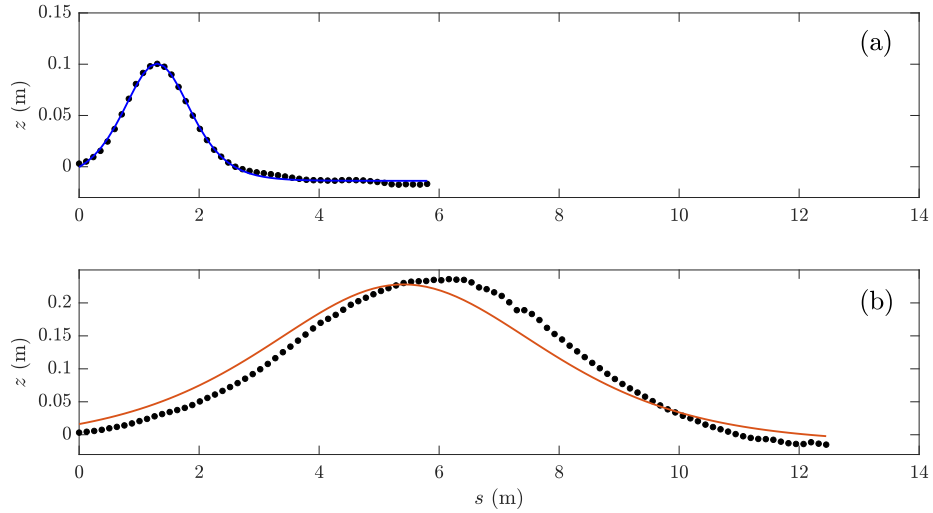


FIGURE 5 – Coupes de l’interaction faible à deux solitons de la Fig. 4. Coupe perpendiculaire à la branche 3 (a), courbe bleue : ajustement d’un profil en  $\text{sech}^2$  ; (b) coupe le long de la trajectoire du *stem*, points noirs : mesures issues de la stéréoscopie ; courbe rouge : solution de Miles (1977). En abscisse la coordonnée curviligne  $s$  et en ordonnée le déplacement de la surface libre.

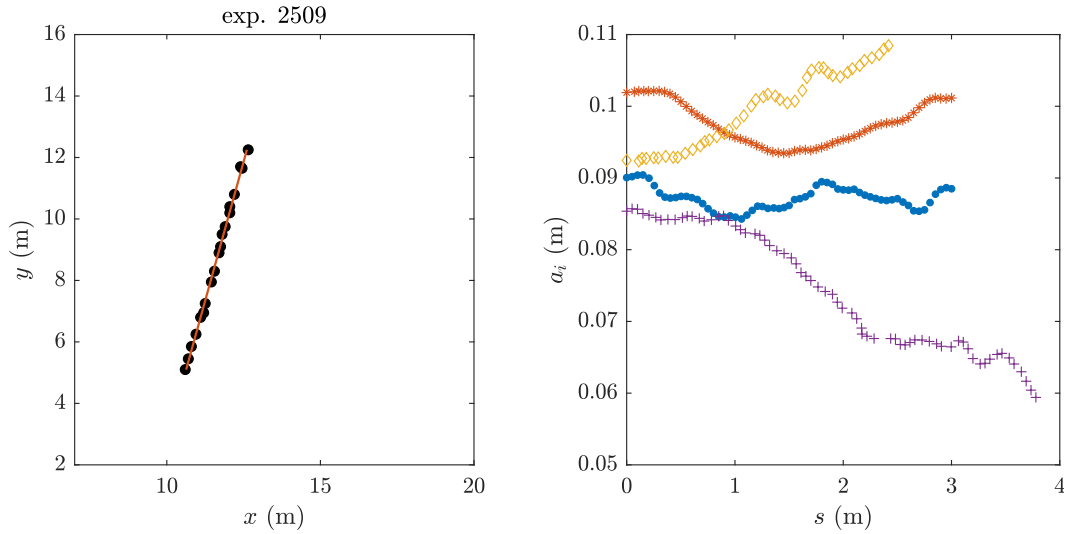


FIGURE 6 – Interaction faible à deux solitons de la Fig. 4. A gauche : trajectoire du maximum du *stem*; points noirs : mesures à partir d’images successives ; ligne marron : droite ajustée par les moindres carrés sur les points noirs. A droite : déplacements de la surface libre le long des crêtes des 4 branches des solitons (coordonnée curviligne  $s$ ) ; points bleus : branche 2 ; points oranges : branche 3 ; points jaune : branche 4 ; points violets : branche 5.

La figure 7 montre un champ d’élévations de la surface libre d’une interaction faible



à petit angle  $\Psi \simeq 36^\circ$  de type 4. Le soliton 1 se propage vers la droite et le soliton 2 vers les  $y$  négatifs. Cette interaction se situe entre la courbe de Miles et les autres prédictors de la figure 2. L'observation nous indique pourtant qu'il s'agit d'une interaction régulière. Cela semble indiquer que le critère de Miles n'est pas un bon prédicteur de la nature de l'interaction. La crête du *stem* dans ce cas est perpendiculaire à sa direction de propagation. Les solitons ont des amplitudes légèrement différentes : il s'agit d'une interaction dissymétrique. Dans l'ensemble, la solution théorique reproduit bien la figure d'interaction. Cependant remarquons que dans l'expérience la branche 2 du soliton 1 n'a pas la même inclinaison que la branche 3. On constate la même chose pour le soliton 2. Il s'agit encore une fois d'effets de diffraction liés à la longueur finie du batteur. La figure théorique a donc été calculée avec un angle moyen pour chacun des solitons.

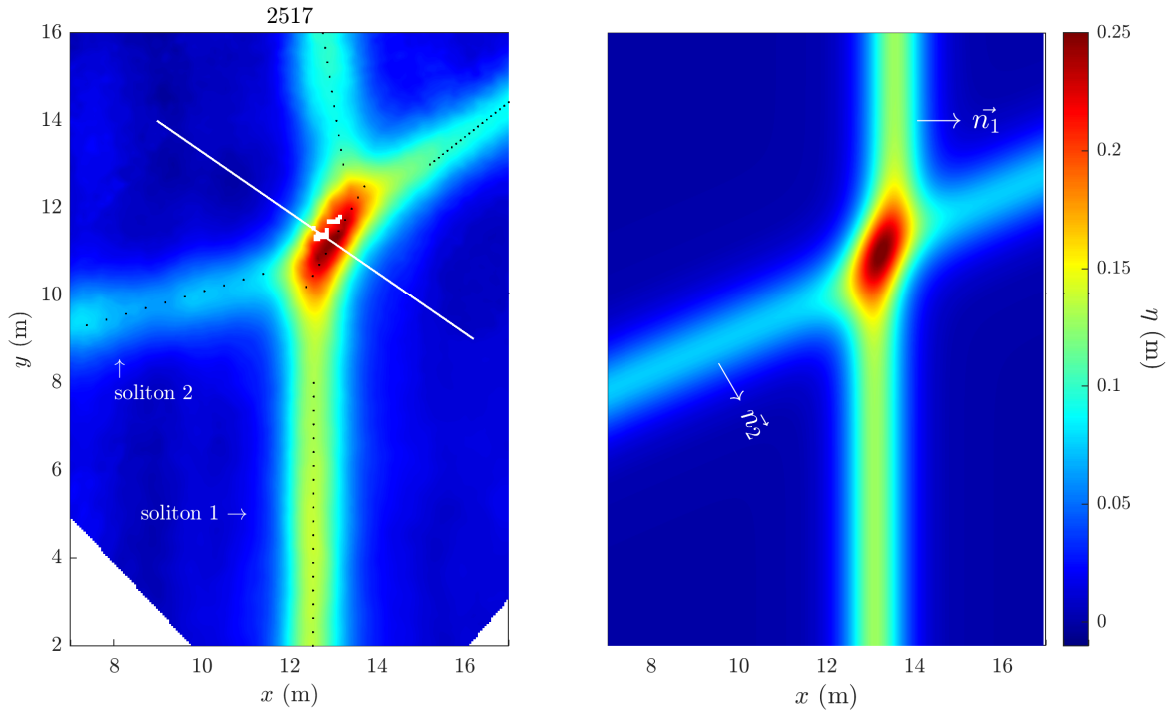


FIGURE 7 – Interaction faible à deux solitons de type 4. A gauche : expérience 2517 ; lignes pointillés noirs représentent les crêtes ; droite en blanc représente la trajectoire du maximum du *stem* d'angle  $\Psi^* = -15.5^\circ$ . Angle d'interaction  $\Psi = 35.6^\circ$ . A droite : solution calculée avec (2) pour les amplitudes  $a_1 = 0.13$  m et  $a_2 = 0.07$  m.

### **III – 2 Interaction forte**

Les cas de type 3 correspondent à des situations instationnaires où l'interaction à deux solitons ne peut pas être progressive. La figure 8 illustre cette situation pour laquelle l'angle d'interaction est  $\Psi \simeq 20^\circ$ . L'interaction à deux solitons est impossible compte tenu de l'angle d'interaction et des amplitudes, en effet par (13)  $\kappa < 1$  (voir Fig. 2). Les branches dans la traîne de l'interaction se détachent donc au cours du temps et possiblement le *stem* très long évolue vers un autre soliton.

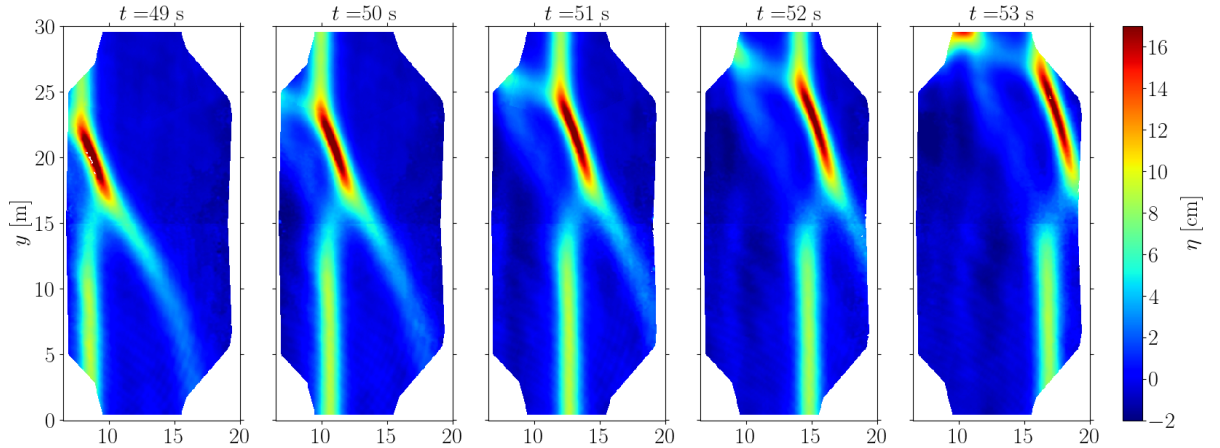


FIGURE 8 – Interaction forte instationnaire entre un soliton frontal d’amplitude  $a_1 \simeq 0.08$  m et un soliton oblique généré à  $40^\circ$  avec une amplitude  $a_2 \simeq 0.07$  m. Expériences 2452-2487. L’angle d’interaction de  $\Psi = 20^\circ$ . Figure tirée de Leduque (2024).

## IV – Conclusions

Notre étude expérimentale, dont on vient de présenter des résultats préliminaires, confirme les résultats théoriques précédents (Miles, 1977; Nicolas, 1993) sur les interactions à deux solitons en particulier sur les propriétés du *stem*. Aux faibles angles  $\Psi$  d’interaction, la crête du *stem* est orientée dans une direction transverse à sa direction de propagation. Aux grands angles  $\Psi$  d’interaction, la crête du *stem* est orientée dans une direction proche de sa direction de propagation. Les relations de compatibilité cinématique pour des interactions progressives sont confirmées. Les perspectives portent entre autres sur une détermination plus précise des déphasages. Des outils numériques tels que TOLOSA reproduisent bien les expériences (Michallet *et al.*, 2024) et permettent de s’affranchir des effets de taille finie incontournables en bassin à houle. Des expériences de champs multi-directionnels de solitons 2D ont aussi été menées dans le bassin à houle. Ces expériences seront analysées au regard des conclusions de la présente étude.

## Remerciements

Ce travail a été soutenu par l’Agence Nationale de la Recherche (projet SOGOOD, ANR-21-CE30-0061) ainsi que par la Simons Foundation (Simons Collaboration on Wave Turbulence). La mise à disposition du bassin à houle par ARTELIA ainsi que leur support technique comme celui du LEGI ont été essentiels à la réussite de ce projet. Nos remerciements vont aussi à Ph. Nicolas pour les échanges fructueux lors de la campagne d’essais de février à avril 2024.

## Références

BONNEMAIN, T., DOYON, B. et EL, G. (2022). Generalized hydrodynamics of the KdV

- soliton gas. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 55(37):374004.
- KADOMTSEV, B. et PETVIASHVILI, V. (1970). On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *In Doklady Akademii Nauk*, volume 192, pages 753–756. Russian Academy of Sciences.
- KODAMA, Y. (2010). KP solitons in shallow water. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(43):434004.
- KODAMA, Y. et YEH, H. (2016). The KP theory and Mach reflection. *Journal of Fluid Mechanics*, 800:766–786.
- LEDUQUE, T. (Soutenance prévue en décembre 2024). *Etude expérimentale et numérique d’ondes non-linéaires multidirectionnelles en eau peu profonde : application aux gaz de solitons*. Doctorat spécialité Mécanique des fluides, Energétique, Procédés, Université Grenoble Alpes.
- LEDUQUE, T., BARTHÉLEMY, E., MICHALLET, H., SOMMERIA, J. et MORDANT, N. (2024). Space–time statistics of 2D soliton gas in shallow water studied by stereoscopic surface mapping. *Experiments in Fluids*, 65(6):84.
- MICHALLET, H., LEDUQUE, T., COUDERC, F., BARTHÉLEMY, E., KACZMAREK, M. et MORDANT, N. (2024). Expériences et simulations numériques d’interactions de solitons en eau peu profonde. *In 19èmes Journées Hydrodynamique*.
- MILES, J. (1977). Obliquely interacting solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 79(1):157–169.
- NICOLAS, P. (1993). *Utilisation de variables distordues dans la théorie des ondes de gravité : application à la réfraction et à la génération*. Doctorat spécialité Mécanique, Université Joseph Fourier Grenoble 1.
- OSBORNE, A. (1994). Automatic algorithm for the numerical inverse scattering transform of the korteweg–de vries equation. *Mathematics and computers in simulation*, 37(4-5):431–450.
- REDOR, I., BARTHÉLEMY, E., MICHALLET, H., ONORATO, M. et MORDANT, N. (2019). Experimental evidence of a hydrodynamic soliton gas. *Physical Review Letters*, 122:214502.
- REDOR, I., BARTHÉLEMY, E., MORDANT, N. et MICHALLET, H. (2020). Analysis of soliton gas with large-scale video-based wave measurements. *Experiments in Fluids*, pages 61–216.
- REDOR, I., MICHALLET, H., MORDANT, N. et BARTHÉLEMY, E. (2021). Experimental study of integrable turbulence in shallow water. *Physical Review Fluids*, 6(12):124801.
- RENOUARD, D., SEABRA-SANTOS, F. et TEMPERVILLE, A. (1985). Experimental study of the generation, damping, and reflexion of a solitary wave. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 9(4):341–358.

- SEABRA-SANTOS, F., TEMPERVILLE, A. et RENOARD, D. (1989). On the weak interaction of two solitary waves. *European journal of mechanics. B, Fluids*, 8(2):103–115.
- WANG, C. et PAWLOWICZ, R. (2012). Oblique wave-wave interactions of nonlinear near-surface internal waves in the Strait of Georgia. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 117(C6).
- ZAKHAROV, V. (1971). Kinetic equation for solitons. *Sov. Phys. JETP*, 33(3):538–540.
- ZHANG, J. et LI, Y. (2003). Bidirectional solitons on water. *Physical Review E*, 67(1):016306.