

## Schémas numériques linéairement équilibrés et stables au sens de l'énergie pour les équations de Saint-Venant non linéaires avec force de Coriolis

### *Energy stable and linearly well-balanced numerical schemes for the non-linear Shallow Water equations with Coriolis force*

Emmanuel Audusse<sup>(1)</sup>, Virgile Dubos<sup>(2)</sup>, Noémie Gaveau<sup>(3)</sup>, Yohan Penel<sup>(4)</sup>

*audusse@math.univ-paris13.fr ; virgile.dubos@enpc.fr ; noemie.gaveau@univ-orleans.fr ; yohan.penel@inria.fr*

<sup>(1)</sup>LAGA, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord – 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse.

<sup>(2)</sup>Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, EDF'lab Chatou – 6 quai Wattier, 78401 Chatou.

<sup>(3)</sup>Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, Université de Tours, CNRS UMR 7013, Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orléans CEDEX 2.

<sup>(4)</sup>INRIA Paris – Sorbonne Université – CNRS (LJLL), team ANGE, 2 rue Simone Iff, CS 42112, 75589 Paris cedex 12.

### Résumé

Nous analysons une classe de schémas numériques linéairement équilibrés et satisfaisant une inégalité d'énergie semi-discrète pour les équations de Saint-Venant non linéaires avec force de Coriolis. Nous nous intéressons en particulier à des schémas volumes finis conservatifs et colocalisés sur grille cartésienne. Ils font apparaître dans les termes de diffusion des flux numériques et une discrétisation de l'équilibre géostrophique linéaire. Les résultats numériques montrent une nette amélioration autour de l'équilibre géostrophique non linéaire en comparaison avec des schémas classiques de type Godunov.

### Summary

We analyse a class of energy-stable and linearly well-balanced numerical schemes dedicated to the nonlinear Shallow Water equations with Coriolis force. The proposed algorithms rely on colocated finite-volume approximations formulated on cartesian geometries. They involve appropriate diffusion terms in the numerical fluxes, expressed as discrete versions of the linear geostrophic equilibrium. Numerical results show a very clear improvement around the nonlinear geostrophic equilibrium when compared to those of classic Godunov-type schemes.

## I – Introduction

Depuis la fin des années 1990, la question de la précision des schémas numériques autour de solutions stationnaires et/ou en régime asymptotique a été d’une grande importance. Dans le cadre des écoulements géophysiques, en particulier des méthodes volumes finis colocalisées, beaucoup de travaux ont été effectués sur la précision autour de l’équilibre dit du lac au repos. En revanche, pour les écoulements climatiques et océaniques de grandes échelles, l’équilibre géostrophique (plus complexe) est considéré ici. Cet équilibre a fait l’objet de moins d’attention que celui du lac au repos (voir [10] pour une introduction générale à la dynamique des fluides géophysiques en rotation). À notre connaissance, le premier travail dans ce domaine est attribué à Bouchut, Le Sommer et Zeitlin [5], mais n’était précis que pour des écoulements monodimensionnels (voir [1]).

Ici nous cherchons à écrire un schéma volumes finis colocalisé et explicite pour les équations de Saint-Venant avec terme de Coriolis qui soit stable au sens de l’énergie et qui capture précisément l’équilibre géostrophique ; ce dernier étant l’équilibre du système linéarisé autour de l’équilibre dit du lac au repos. En effet, bien capturer cet équilibre permet d’améliorer grandement la précision du schéma numérique pour la simulation d’écoulements géophysiques.

Considérons dans la suite le système de Saint-Venant muni du terme source de Coriolis  $h\omega\mathbf{u}^\perp$  :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (1a)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + h(\nabla\phi + \omega\mathbf{u}^\perp) = 0, \quad (1b)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation du référentiel (ici la Terre) supposée constante,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  est la vitesse horizontale et où  $\mathbf{u}^\perp = (-u_y, u_x)$  est le vecteur orthogonal correspondant,  $h$  est la hauteur d’eau et  $\phi := gh$  avec  $g$  est la constante de gravitation.

Notons qu’il est possible de prendre en compte la bathymétrie en faisant apparaître la côte du fond  $b$  dans  $\phi$ . Dans la suite, nous nous plaçons à fond plat par soucis de simplicité mais la méthode peut être étendue en changeant la définition de  $\phi := g(h + b)$ .

La présence du terme de Coriolis dans le système (1) amène à considérer le système linéarisé autour du lac au repos. Ce système linéarisé a pour état stationnaire l’équilibre géostrophique suivant :

$$\nabla\phi + \omega\mathbf{u}^\perp = 0. \quad (2)$$

Dans [1], les auteurs ont montré que le schéma de Godunov volumes finis colocalisé classique ne préserve pas l’équilibre géostrophique en raison des termes de diffusion numérique. Nous cherchons donc à proposer un schéma dont les termes de diffusion numérique seront nuls autour d’un équilibre géostrophique discret.

De plus, on remarque que le système (1) admet une énergie  $E$  qui vérifie (pour les solutions régulières) l’équation de conservation suivante :

$$\partial_t E + \operatorname{div} \left[ \left( \phi + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) h\mathbf{u} \right] = 0. \quad (3)$$

$E$  correspond à une entropie mathématique. En construisant une approximation numérique qui vérifie une version discrète de (3), il est alors possible d’obtenir une stabilité entropique.

Nous suivons l’idée originale présentée dans [5] et commençons par introduire des perturbations génériques  $(\mathbf{q}, \pi)$  dans le modèle (1) pour étudier leur influence sur l’équation associée à l’énergie du système (3) :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u} - \mathbf{q}) = 0, \quad (4a)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes (h\mathbf{u} - \mathbf{q})) + (h\nabla\phi - \nabla\pi) = -\omega(h\mathbf{u} - \mathbf{q})^\perp. \quad (4b)$$

Les solutions régulières de (4) vérifient l'équation suivante :

$$\partial_t E + \operatorname{div} \left[ \left( \phi + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) (h\mathbf{u} - \mathbf{q}) - \pi \mathbf{u} \right] = -\mathbf{q} \cdot (\nabla \phi + \omega \mathbf{u}^\perp) - \pi \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (5)$$

Ainsi nous choisissons des corrections  $\mathbf{q}$  et  $\pi$  respectivement proportionnelles à  $\nabla \phi + \omega \mathbf{u}^\perp$  et  $\operatorname{div} \mathbf{u}$ . Avec ces définitions, on remarque que si la correction  $\mathbf{q}$  est nulle, alors la correction  $\pi$  l'est aussi.

D'un point de vue numérique, les termes de diffusion auront un effet de régularisation en permettant d'avoir une version discrétisée de (5). De plus, de par leur définition, ces termes disparaîtront autour de l'équilibre géostrophique ce qui devrait améliorer la précision du schéma autour de ce type de régime. En effet, le système linéarisé de (1) autour de l'état stationnaire  $(\tilde{h}, \tilde{\mathbf{u}}) = (h_0, 0)$  pour  $h_0$  constant s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t h = -h_0 \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{u} = -(\nabla \phi + \omega \mathbf{u}^\perp). \end{cases} \quad (6)$$

Notre objectif est de proposer un schéma volumes finis colocalisé sur grille cartésienne pour le système (1) précis autour de l'équilibre géostrophique (2) et admettant une version discrète de (3) pour s'assurer que l'énergie du système ne croît pas. Notre stratégie consiste à discrétiser directement (4) en choisissant des opérateurs discrets ayant de bonnes propriétés mimétiques, afin d'obtenir des schémas admettant une version semi-discrète de (5) (la question de l'énergie totalement discrète reste encore à étudier) et dont la linéarisation préserve l'équilibre géostrophique au niveau discret. Comme l'écriture d'opérateurs discrets vérifiant les propriétés mimétiques sur maillage quelconque peut être complexe, nous effectuons le travail sur maillage cartésien ici. Par soucis de simplicité nous ne présenterons ici qu'une version non conservative du schéma, mais la méthode permet également de dériver une version conservative (voir [2] pour plus de détails).

Le cœur de la dérivation du schéma consiste à choisir une discrétisation de l'équilibre géostrophique (2) et à construire le reste du schéma autour en s'assurant du respect des propriétés mimétiques. En pratique il peut y avoir deux discrétisations différentes de l'équilibre géostrophique au sein d'un même schéma : une définissant la correction  $\mathbf{q}$  et une autre dans l'équation de quantité de mouvement (4b). Ainsi, la méthode décrit une famille de schémas numériques. Nous avons testé plusieurs schémas basés sur des équilibres discrétisés sur les arêtes, les centres et les sommets de cellules (voir [7]). Ici nous ne présenterons qu'un seul schéma, celui ayant le stencil le plus compact, faisant intervenir une discrétisation de l'équilibre géostrophique sur les arêtes et une sur les sommets du maillage.

En section II nous détaillons les opérateurs discrets nécessaires à l'écriture du schéma proposé en section III. En section IV nous comparons ce schéma à un schéma volumes finis classique et à son extension à l'ordre 2 en espace et en temps.

## II – Approche numérique

### II – 1 Définition du maillage

Dans un premier temps nous introduisons des notations génériques pour le maillage cartésien  $\mathcal{K}$  considéré. Les mailles sont de tailles  $\Delta x \times \Delta y$ ,  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des arêtes et  $\mathcal{V}$  est celui des sommets.

- $K$  désigne une cellule quelconque de  $\mathcal{K}$  et  $\partial K$  sa frontière. Une quantité donnée  $\Phi$  localisée en  $K$  est désignée par  $\Phi_{i,j}$ .

- $e$  désigne une arête quelconque de  $\mathcal{E}$ ,  $\partial e$  sa frontière,  $m_e$  sa longueur et  $\mathbf{n}_e$  un vecteur normal unitaire arbitraire. Une quantité donnée  $\Phi$  localisée en  $e$  est désignée par  $\Phi_{i+1/2,j}$  (respectivement  $\Phi_{i,j+1/2}$ ) pour les arêtes verticales (respectivement horizontales).
- $\mathbf{n}_{e,K}$  est le vecteur normal à  $e$  sortant de  $K$ .
- $v$  désigne un sommet quelconque de  $\mathcal{V}$ . Une quantité donnée  $\Phi$  localisée en  $v$  est désignée par  $\Phi_{i+1/2,j+1/2}$ .

Voir figure 1.

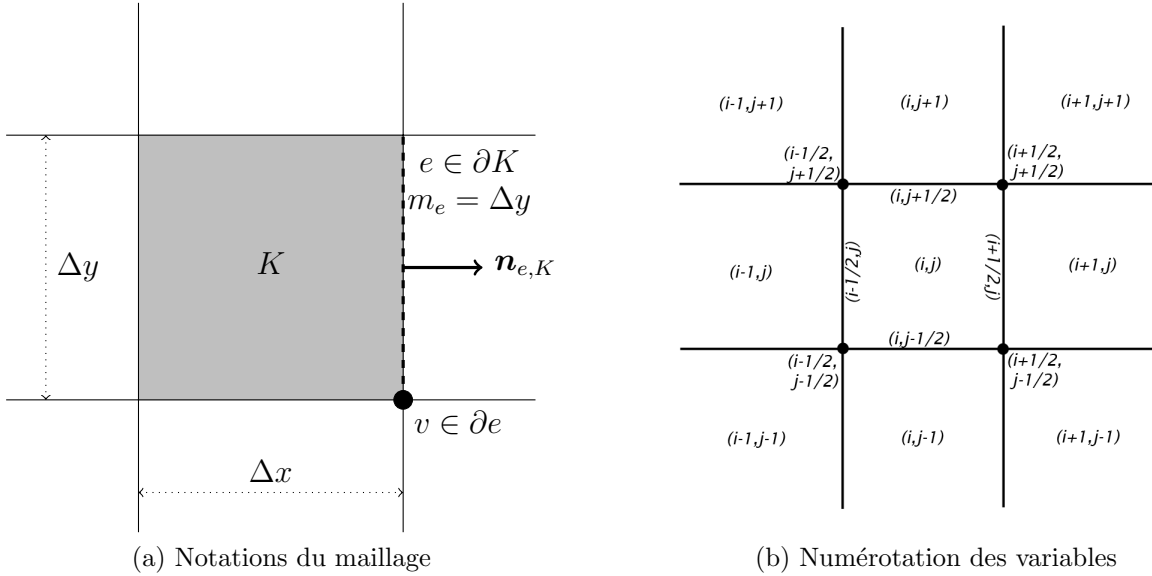


FIGURE 1 – Notations géométriques

## II – 2 Opérateurs discrets

Nous introduisons maintenant les opérateurs discrets nécessaires à la construction du schéma numérique. Étant donné que nous considérons un schéma colocalisé, toutes les inconnues sont colocalisées sur les cellules. Cependant, afin d'obtenir les propriétés souhaitées, il est nécessaire de définir certaines quantités sur les arêtes ou sur les sommets. Ainsi, nous introduisons la convention de notation suivante pour tous nos opérateurs discrets :  $[X_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi)]_a$  signifie que l'opérateur  $X$  est appliqué à une quantité  $\varphi$  définie sur les éléments de  $\mathcal{B}$  et renvoie une quantité définie sur l'élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ . De plus, les opérateurs notés  $f$  désignent tous des reconstructions algébriques. Commençons par introduire les opérateurs cellules vers arêtes :

$$[\nabla_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}} \varphi]_e := -\frac{m_e}{\Delta x \Delta y} \sum_{K \in \mathcal{K}(e)} (\varphi_K \mathbf{n}_{e,K}),$$

$$[f_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}} \varphi]_e := \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}(e)} (\varphi_K \cdot \mathbf{n}_{e,K} \mathbf{n}_{e,K}),$$

et arêtes vers cellules :

$$[\operatorname{div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} \varphi]_K := \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} (m_e \varphi_e \cdot \mathbf{n}_{e,K}),$$

$$[f_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} \varphi]_K := \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} (\varphi_e \cdot \mathbf{n}_{e,K} \mathbf{n}_{e,K}),$$

où  $\mathcal{K}(e) := \{K \in \mathcal{K} \mid e \in \partial K\}$  est l'ensemble des cellules voisines de l'arête  $e$  et  $\mathcal{E}(K) := \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \partial K\}$  l'ensemble des arêtes voisines de la cellule  $K$ .

Une reconstruction sommets vers arêtes :

$$[f_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varphi}]_e := \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathcal{V}(e)} (\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \mathbf{n}_e) \mathbf{n}_e,$$

où  $\mathcal{V}(e) := \{v \in \mathcal{V} \mid v \in \partial e\}$  est l'ensemble des sommets voisins à l'arête  $e$ .

Les opérateurs cellules vers sommets (et vice-versa), avec la notation  $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi, \psi)$  :

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varphi}]_{i+1/2, j+1/2} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{\Delta x} \\ \frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i+1, j}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i, j+1} - \varphi_{i, j}}{\Delta y} \end{pmatrix}, \\ [\text{div}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varphi}]_{i+1/2, j+1/2} &:= \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{\Delta x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\psi_{i+1, j+1} - \psi_{i+1, j}}{\Delta y} + \frac{\psi_{i, j+1} - \psi_{i, j}}{\Delta y} \right], \\ [f_{\mathcal{V}}^{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varphi}]_{i+1/2, j+1/2} &:= \frac{\varphi_{i+1, j+1} + \varphi_{i, j+1} + \varphi_{i+1, j} + \varphi_{i, j}}{4}, \end{aligned}$$

et sommets vers cellules :

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathcal{K}}^{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varphi}]_{i, j} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1/2, j-1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta x} \\ \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i+1/2, j-1/2}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i-1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta y} \end{pmatrix}, \\ [f_{\mathcal{K}}^{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varphi}]_{i, j} &:= \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} + \varphi_{i-1/2, j+1/2} + \varphi_{i+1/2, j-1/2} + \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, nous définissons une divergence arêtes vers cellules dite *Upwind* pour la partie transport afin de s'assurer de la stabilité du schéma :

$$\left[ \text{div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}, up}(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\varphi}) \right]_K := \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m_e (\boldsymbol{\psi}_K (\boldsymbol{\varphi}_e \cdot \mathbf{n}_{e, K})^+ + \boldsymbol{\psi}_{K_e} (\boldsymbol{\varphi}_e \cdot \mathbf{n}_{e, K})^-),$$

où  $K_e$  est la cellule adjacente à la cellule  $K$  par l'arête  $e$  et où les parties positive et négative d'un scalaire  $\varphi$  sont définies par :

$$\varphi^{\pm} = \frac{1}{2}(\varphi \pm |\varphi|).$$

### III – Schémas numériques

Dans cette section, nous rappelons le schéma HLLC ainsi que son extension à l'ordre deux en espace et en temps, puis nous présentons un schéma à 9 points basé sur l'équilibre géostrophique discrétisé sur les arêtes.

#### III – 1 Schéma de type Godunov classique

Le schéma HLLC est un schéma standard pour les équations de Saint-Venant 2D homogènes [8] (chapitres 10.4 p.322 et 10.6 p.331) basé sur un choix particulier des vitesses d'ondes (relation 10.48 p.328). Ce schéma s'écrit avec les opérateurs précédemment introduits :

$$\frac{d}{dt} W_{\alpha, K} + [\text{div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} \mathcal{F}_{\alpha}^{hllc}]_K + S_{\alpha, K} = 0, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (7)$$

où  $\mathbf{W}_K := (h_K, h_K \mathbf{u}_K)^T$ ,  $\mathbf{S}_K := (0, \omega h_K \mathbf{u}_K^\perp)^T$  et où  $\mathcal{F}^{hllc}$  est le flux HLLC classique. En choisissant judicieusement les vitesses d'ondes, ce schéma satisfait une inégalité d'entropie discrète (voir [4, §2.4.6]). En revanche, les termes de diffusions ne s'annulant pas autour de l'équilibre géostrophique, la qualité de la solution est dégradée même en étendant le schéma à l'ordre 2 par la méthode proposée dans [4, §2.8 p.53], voir section IV.

### III – 2 Schéma *Entropic well-balanced* (E W-B)

Ici nous présentons un schéma à 9 points qui satisfait une propriété d'énergie semi-discrète non croissante et qui est linéairement équilibre. Dans un soucis de simplicité nous ne présentons ici que la version non conservative du schéma et nous ne démontrons pas à nouveau les deux propriétés qui nous intéressent, pour plus de détails voir [2].

La formulation non conservative semi-discrète s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + [\operatorname{div}_K^\varepsilon \mathcal{F}^{EWB}]_K = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + [\operatorname{div}_K^{\varepsilon, up} (\mathbf{u} \otimes \mathcal{F}^{EWB})]_K + h_K [f_K^\nu \nabla_\nu^\mathcal{K} \phi]_K - [\nabla_K^\nu \pi]_K \\ = -\omega (h_K [f_K^\nu f_K^\mathcal{K} \mathbf{u}]_K - [f_K^\varepsilon \mathbf{q}]_K)^\perp, \end{cases} \quad (8)$$

avec :

$$\mathcal{F}_e^{EWB} = [f_\varepsilon^\nu f_\nu^\mathcal{K} (h\mathbf{u})]_e - \mathbf{q}_e, \quad (9)$$

$$\mathbf{q}_e = \gamma \frac{\Lambda}{g} \max\{\Delta x, \Delta y\} [\omega f_\varepsilon^\mathcal{K} (\mathbf{u}^\perp) + \nabla_\varepsilon^\mathcal{K} \phi]_e, \quad (10)$$

$$\pi_v = \nu \Lambda \max\{\Delta x, \Delta y\} [f_\nu^\mathcal{K} h]_v [\operatorname{div}_\nu^\mathcal{K} \mathbf{u}]_v. \quad (11)$$

Enfin, un choix classique pour  $\Lambda$  est de prendre (voir [4], section 2.4.2) :

$$\Lambda = \max_{K \in \mathcal{K}} \left\{ \|\mathbf{u}_K\| + \sqrt{gh_K} \right\}. \quad (12)$$

Notons que  $\nu$  et  $\gamma$  sont des constantes sans dimensions.

Les opérateurs discrets présentés précédemment satisfont plusieurs propriétés de dualité et de réécriture, qui d'une part permettent d'assurer un équivalent discret en espace à (5), et d'autre part assurent que toute solution vérifiant l'équilibre géostrophique discrétisé sur les arêtes est une solution stationnaire pour la linéarisation de (8). Ainsi, la précision autour de l'équilibre géostrophique est assurée. Pour la stabilité, bien qu'il manque le résultat pour l'énergie discrétisée à la fois en temps et en espace, numériquement le schéma se comporte bien.

### III – 3 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps, les flux sont pris explicites. Cependant, il est bien connu que le schéma d'Euler explicite pour le terme de Coriolis mène à des instabilités (voir [6, 9]). Nous considérons donc une formulation semi-implicite de ce terme pour tous les schémas présentés :

$$\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{\Delta t} = \omega u_y^n, \quad \frac{u_y^{n+1} - u_y^n}{\Delta t} = -\omega u_x^{n+1}.$$

Enfin, d'après [1], nous choisissons un pas de temps satisfaisant :

$$\Delta t^n \leq \min \left\{ \frac{2}{\omega}, \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\Lambda^n} \right\},$$

où  $\Lambda^n$  est la discrétisation en temps de (12).

## IV – Résultats numériques

Dans la suite, nous présentons deux cas tests pour comparer le comportement du schéma E W-B (8) avec celui d'un schéma HLLC classique (7) et de son extension à l'ordre 2 (HLLC-2). Pour ces cas tests nous considérons les constantes  $g$  et  $\omega$  unitaires, les coefficients de diffusions  $\gamma$  et  $\nu$  sont fixés à 0.25 et une condition CFL égale à 0.5. Enfin, sauf mention contraire, le maillage est défini par une grille  $[101 \times 101]$ .

### IV – 1 Vortex stationnaire

Nous considérons un cas test introduit dans [3] :

$$h(r) = \begin{cases} 1 + \frac{5\omega\epsilon}{2g}r^2, & \text{si } r \leq 0.2, \\ 1 + \frac{\omega\epsilon}{10g} - \frac{\omega\epsilon}{g}(0.3 - 2r + 2.5r^2) + \frac{\epsilon^2}{g}(3.5 - 20r + 12.5r^2 + 4 \ln(5r)), & \text{si } 0.2 < r \leq 0.4, \\ 1 + \frac{\omega\epsilon}{5g} + \frac{\epsilon^2}{g}(4 \ln(2) - 2.5), & \text{si } r > 0.4, \end{cases} \quad (13)$$

et

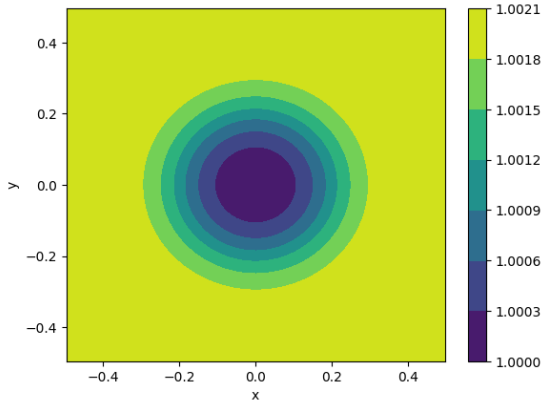
$$\mathbf{u}(r, \theta) = \begin{cases} -5\epsilon r^t(\sin(\theta), \cos(\theta)), & \text{si } r \leq 0.2, \\ -(2 - 5r)\epsilon^t(\sin(\theta), \cos(\theta)), & \text{si } 0.2 < r \leq 0.4, \\ 0, & \text{si } r > 0.4, \end{cases} \quad (14)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires dans un domaine avec conditions de bords périodiques. La condition initiale est un équilibre géostrophique et est représentée par la figure 2. Il s'agit donc d'une solution stationnaire du système (1). Le paramètre  $\epsilon$  représente la non linéarité de la condition initiale et permet donc d'étudier les schémas quand  $\epsilon$  tend vers 0, c'est-à-dire quand on se rapproche de l'équilibre géostrophique.

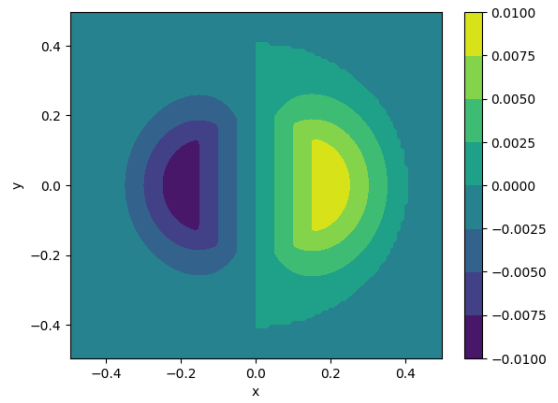
Dans un premier temps, nous considérons  $\epsilon = 0.01$  et remarquons une nette amélioration de la précision pour le schéma E W-B (voir figures 3, 4 et 5). La figure 6 montre que le schéma E W-B fait bien décroître l'énergie. Dans un second temps, nous faisons varier  $\epsilon$  et proposons un indicateur de la préservation du vortex :

$$\frac{|\min(h_{final}) - \min(h_{init})|}{\max(h_{init}) - \min(h_{init})},$$

qui suit le point le plus bas de ce dernier. On remarque alors sur la figure 7 que le schéma HLLC a le même comportement quelle que soit la valeur de  $\epsilon$ , alors que le schéma E W-B capture plus efficacement le vortex à mesure que  $\epsilon$  tend vers 0. En effet, ce dernier devient un quasi-équilibre pour le système.

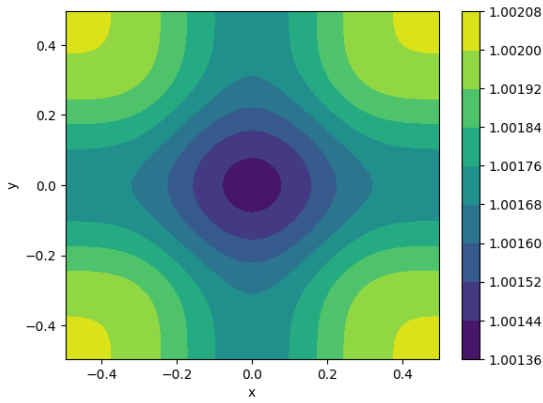


(a) Hauteur d'eau.

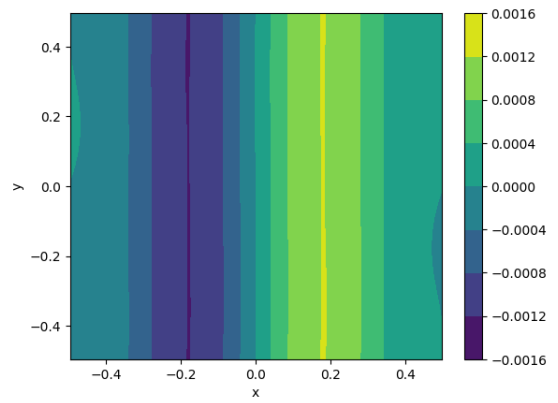


(b) Vitesse  $u_y$ .

FIGURE 2 – Condition initiale.

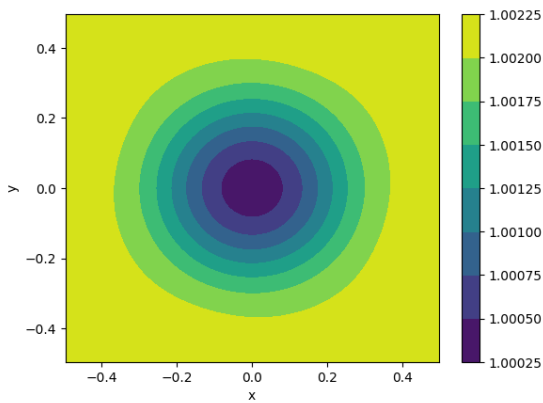


(a) Hauteur d'eau.

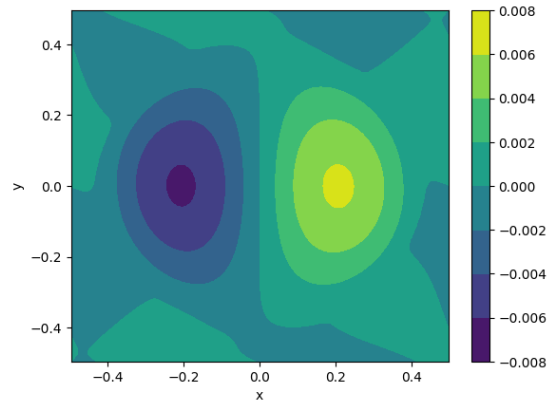


(b) Vitesse  $u_y$ .

FIGURE 3 – Solution HLLC à  $t = 200s$ .



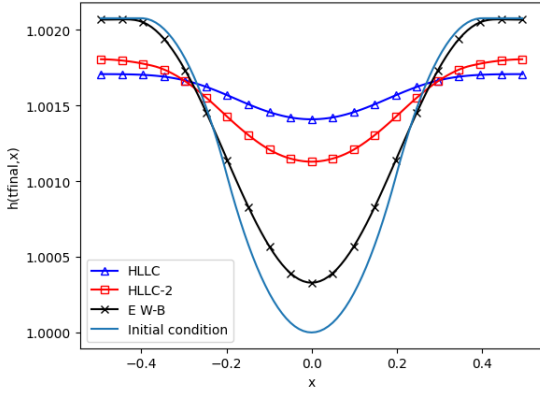
(a) Hauteur d'eau.



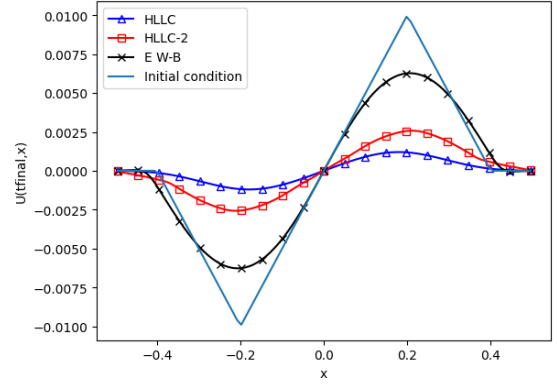
(b) Vitesse  $u_y$ .

FIGURE 4 – Solution E W-B à  $t = 200s$ .





(a) Hauteur d'eau.



(b) Vitesse  $u_y$ .

FIGURE 5 – Coupes  $y = 0$  des solutions à  $t = 200s$ .

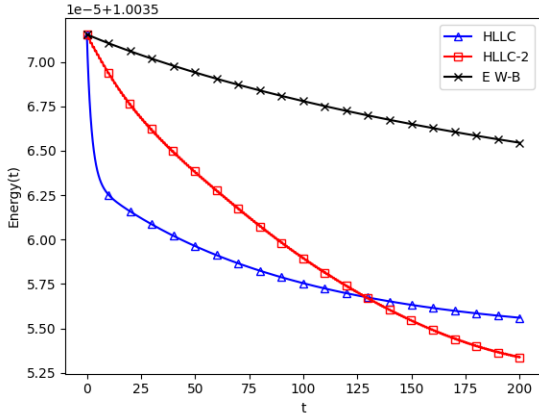


FIGURE 6 – Energie du système en fonction du temps pour  $\epsilon = 0.01$ .

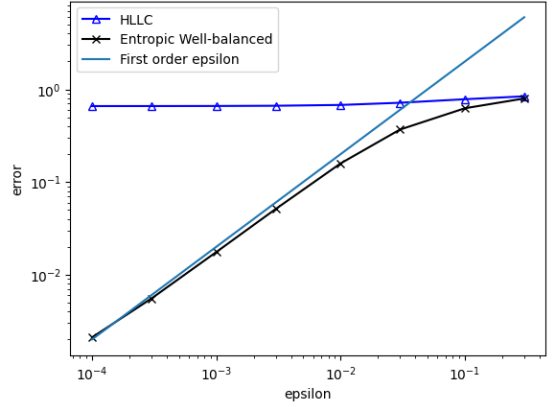


FIGURE 7 – Erreur relative sur la hauteur d'eau par rapport à la condition initiale à  $t = 200s$  pour différents  $\epsilon$ .

## IV – 2 Rupture de barrage cylindrique

Nous considérons une rupture de barrage cylindrique dans un domaine en rotation. La condition initiale est donnée par :

$$h(r) = \begin{cases} 2, & \text{if } r \leq 1, \\ 1, & \text{if } r > 1, \end{cases}, \quad \mathbf{u}(r) = 0.$$

Comme cette condition initiale est très éloignée d'un équilibre géostrophique, nous considérons la solution donnée par le schéma HLLC sur la grille  $[1601 \times 1601]$  comme solution de référence. Le domaine est muni de conditions de bords de type Neumann afin de laisser les ondes quitter le domaine et de ne laisser que l'équilibre géostrophique.

Sur la figure 8, nous comparons la hauteur d'eau donnée par les schémas E W-B, HLLC et HLLC-2 sur une grille  $[101 \times 101]$  101 et le schéma HLLC sur une grille  $[1601 \times 1601]$  101 à différents instants. Nous observons deux comportements : en temps court, le pas de maillage dicte la précision, et en temps long, la structure du schéma devient prépondérante. En effet, les figures 8a et 8b montrent que les schémas de même résolution sont très proches. À partir

de  $t = 6s$ , les schémas E W-B et HLLC sur la grille  $[101 \times 101]$  101 sont encore superposés au niveau de l'onde sortante, mais la différence de précision apparaît au centre du domaine, i.e. là où l'équilibre géostrophique est réalisé.  $1601^2$  cellules sont nécessaires pour que le schéma HLLC soit plus précis que le schéma E W-B en temps long (voir figure 8f et figures 9).

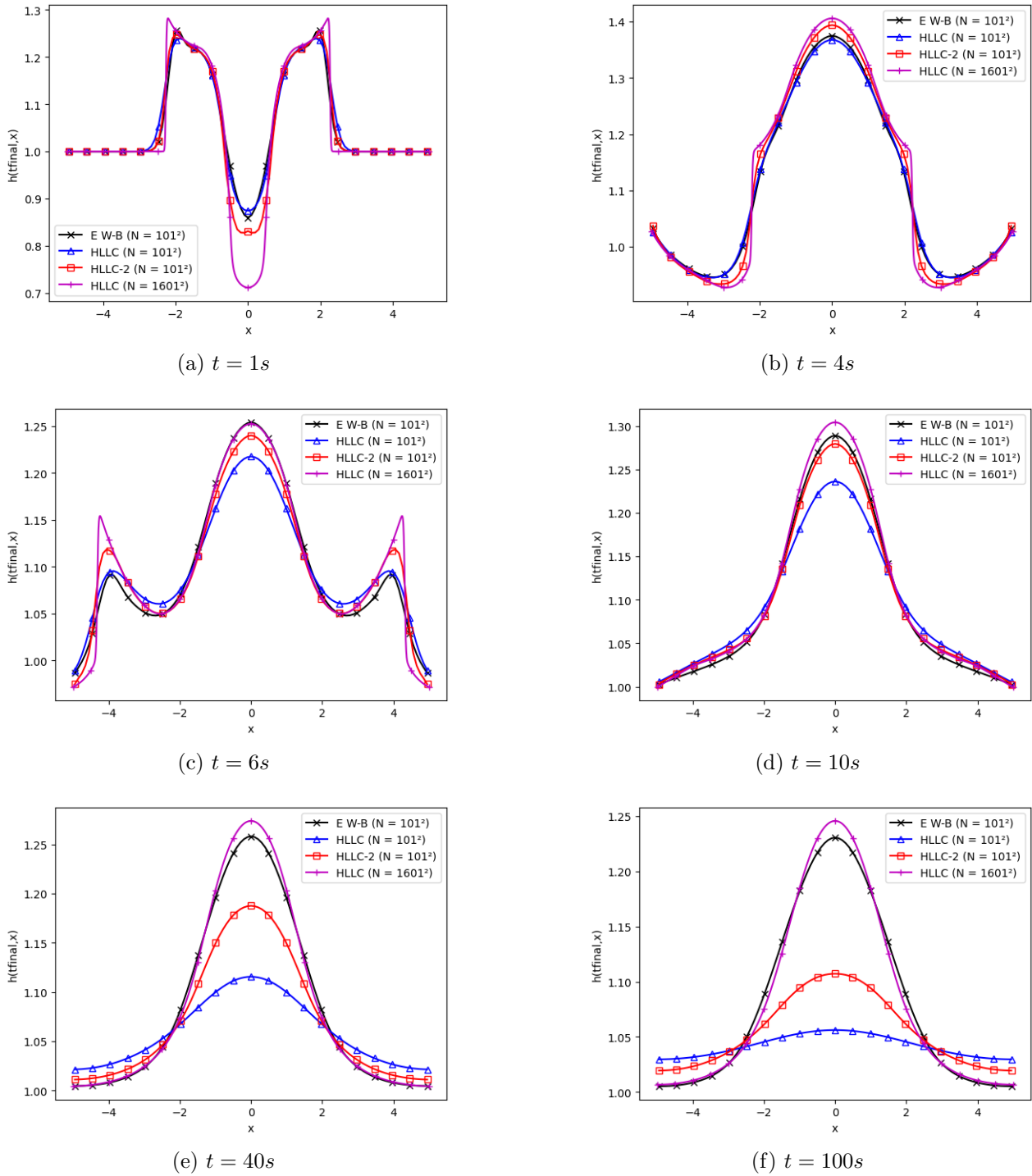
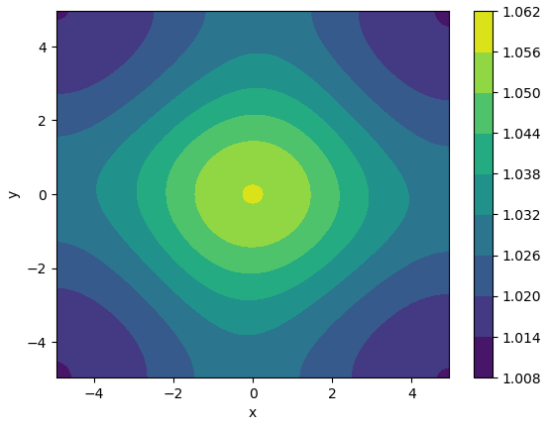
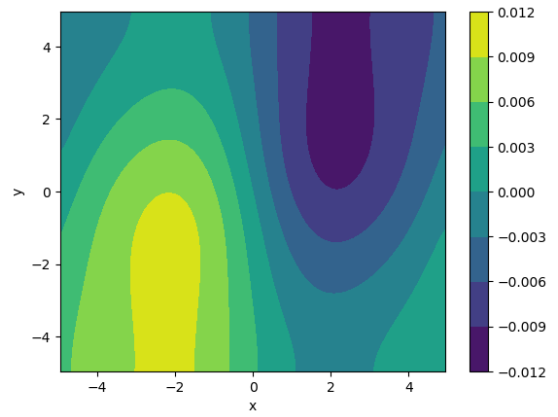


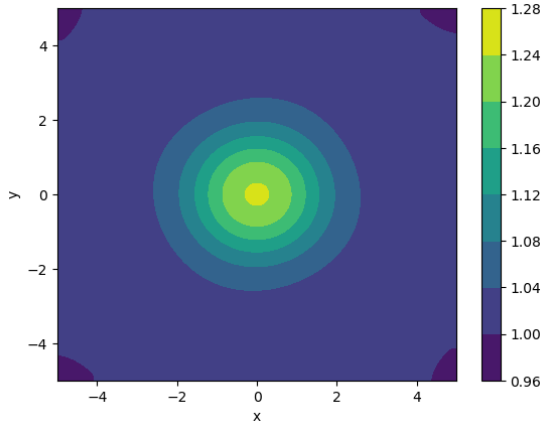
FIGURE 8 – Coupes en  $y = 0$  sur la hauteur d'eau de différents schémas.



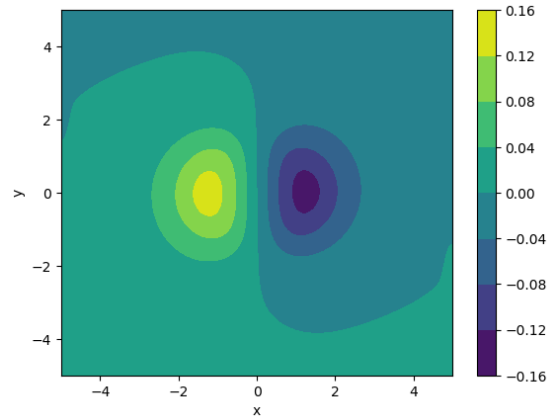
(a) Schéma HLLC avec  $101^2$  cellules : hauteur d'eau



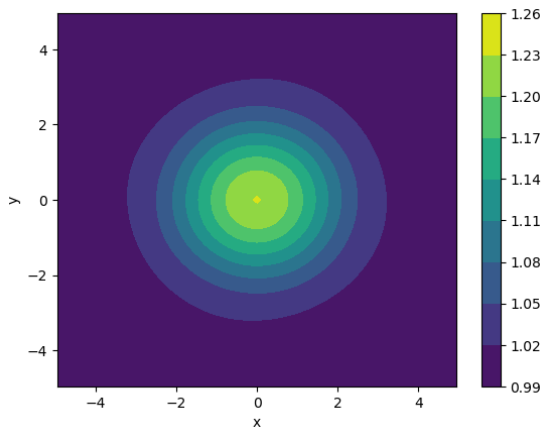
(b) Schéma HLLC avec  $101^2$  cellules : vitesse  $u_y$



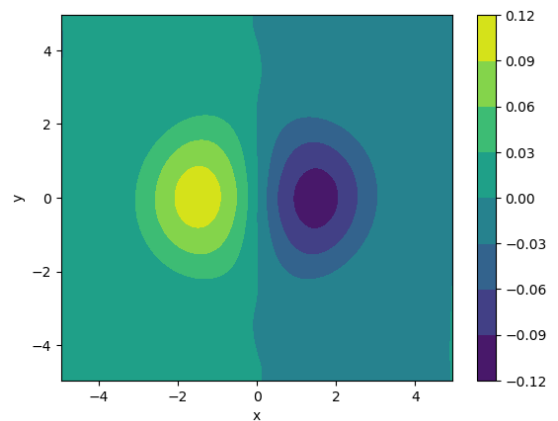
(c) Schéma HLLC avec  $1601^2$  cellules : hauteur d'eau



(d) Schéma HLLC avec  $1601^2$  cellules : vitesse  $u_y$



(e) Schéma E W-B avec  $101^2$  cellules : hauteur d'eau



(f) Schéma E W-B avec  $101^2$  cellules : vitesse  $u_y$

FIGURE 9 – Comparaisons sur la vitesse  $u_y$  et la hauteur d'eau à  $t = 100s$  pour différents schémas.

## V – Conclusion et perspectives

La méthode proposée décrit une classe de schémas volumes finis colocalisés sur grille cartésienne pour les équations de Saint-Venant admettant une énergie semi-discrète en temps non croissante et une linéarisation préservant exactement l'équilibre géostrophique. Pour cela, nous avons gardé l'idée proposée dans [5], à savoir que le terme de diffusion dans le flux de masse est proportionnel à l'équilibre géostrophique sur les arêtes. En remarquant que cet équilibre induit celui sur les sommets, nous utilisons des relations de dualité pour écrire les termes restants afin de s'assurer des propriétés souhaitées pour le schéma. Nous n'avons présenté ici qu'une version non conservative du schéma mais une version conservative est également possible (voir [2]). Numériquement, nous observons pour notre schéma une décroissance de l'énergie totalement discrétisée, la démonstration mathématique de ce résultat reste à être étudiée. De même, il reste à étendre cette stratégie sur des maillages triangulaires.

## Références

- [1] E. Audusse, H. Do Minh, P. Omnes, and Y. Penel. Analysis of modified Godunov type schemes for the two-dimensional linear wave equation with Coriolis source term on cartesian meshes. *Journal of Computational Physics*, 373 :91–129, 2018.
- [2] E. Audusse, V. Dubos, N. Gaveau, and Y. Penel. Energy stable and linearly well-balanced numerical schemes for the non-linear Shallow Water equations with Coriolis force. working paper or preprint, Jan. 2022.
- [3] E. Audusse, R. Klein, and A. Owinoh. Conservative discretization of Coriolis force in a finite volume framework. *Journal of Computational Physics*, 228(8) :2934–2950, 2009.
- [4] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, volume 2/2004. Birkhäuser Basel, 2004.
- [5] F. Bouchut, J. Le Sommer, and V. Zeitlin. Frontal geostrophic adjustment and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. Part 2. High-resolution numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 514 :35–63, 2004.
- [6] M. Castro, J. Antonio López, and C. Pares. Finite volume simulation of the geostrophic adjustment in a rotating shallow-water system. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31 :444–477, 01 2008.
- [7] V. Dubos. *Numerical methods around shallow water flows : dispersive effects, Coriolis force*. Theses, Sorbonne Université, Dec. 2021.
- [8] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [9] R. A. Walters, E. M. Lane, and E. Hanert. Useful time-stepping methods for the Coriolis term in a shallow water model. *Ocean Modelling*, 28(1) :66–74, 2009. The Sixth International Workshop on Unstructured Mesh Numerical Modelling of Coastal, Shelf and Ocean Flows.
- [10] V. Zeitlin. *Geophysical fluid dynamics : understanding (almost) everything with rotating shallow water models*. Oxford University Press, 2018.