

MODELE D'ETAT POUR LES STRUCTURES MARINES MULTI-CORPS
17^{èmes} JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE JH2020

R. LECUYER-LE BRIS^{(1),*}, M. LE BOULLUEC⁽¹⁾, J.F. CHARPENTIER⁽²⁾, and M. BENBOUZID^{(3),(4)}

⁽¹⁾IFREMER Laboratoire Comportement des Structures en Mer, 29280 Plouzané

⁽²⁾Institut de Recherche de l'Ecole Navale (IRENav, EA 3436) , 29400 Brest

⁽³⁾Institut de Recherche Dupuy de Lôme (UMR CNRS 6027, IRDL), 29238 Brest

⁽⁴⁾Logistics Engineering College, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

*Corresponding author: romain.lecuyer.le.bris@ifremer.fr

Résumé

Les modèles temporels calculant le comportement d'un corps dans la houle remplacent généralement le terme de convolution de radiation en l'approchant par un modèle d'état. Les plus rapides sont ceux utilisant la Décomposition en Valeur Singulière de Hankel (HSVD). Le travail présenté dans cet article a permis de compléter cette méthode en analysant les relations d'Ogilvie. Ce travail expose également un modèle dynamique multi-corps, construit à partir de contraintes non-holonomes, qui s'avère très simple pour les problèmes plans. Ces deux modèles ont été concaténés et validés pour un problème plan. Le modèle ainsi créé est performant et très simple à comprendre, et à résoudre.

Summary

The models computing time-domain behavior of a body in waves, usually replace the radiation convolution term by a state-space model. Fastest ones are those using the Hankel Singular Value Decomposition (HSVD). This work completes this method by analyzing Ogilvie's relations. This work also proposes a dynamic multi-body model built with non-holonomic constraints. This model appears to be very simple for two-dimensional problems. Both proposed models have been concatenated and validated for a two-dimensional problem. The resulting model was found to be efficient, easy to understand, to create, and to solve.

1. Modèle hydrodynamique

Un approche classique pour la modélisation d'un solide dans la houle consiste à décrire son comportement dans le domaine fréquentiel. Dans la [section 1](#) et la [section 2](#), nous nous intéresserons à un cylindre d'axe vertical \vec{z} sans ancrages. Le comportement du cylindre issu de l'[Equation 1](#). Nous travaillons dans le repère classique de l'hydrodynamique. Le logiciel utilisé pour déterminer la masse ajoutée $A(\omega)$, l'amortissement de radiation $B(\omega)$ et l'effort d'excitation $F_{ex}(\omega)$ est HydroStar [1]. M est la matrice masse et K_h la matrice de rappel hydrostatique.

$$(M + A(\omega)) \cdot \ddot{Q}(\omega) + B(\omega) \cdot \dot{Q}(\omega) + K_h \cdot Q(\omega) = F_{ex}(\omega) \quad (1)$$

En utilisant l'hypothèse du régime sinusoïdal forcé (RSF), explicitée dans l'Equation 2, nous pouvons résoudre facilement cette équation dans le domaine fréquentiel et obtenir la RAO (Response Amplitude Operator) de référence dans la suite.

$$\ddot{Q}(\omega) = i \cdot \omega \cdot \dot{Q}(\omega) \quad (2)$$

C'est également en faisant cette hypothèse que Cummins [2] a établi l'Equation 3.

$$(M + A_\infty) \cdot \ddot{Q}(\omega) + (i\omega A'(\omega) + B(\omega)) \cdot \dot{Q}(\omega) + K_h \cdot Q(\omega) = F_{ex}(\omega) \quad \text{avec} \quad A'(\omega) = A(\omega) - A_\infty \quad (3)$$

Ainsi, en écrivant l'Equation 3 dans le domaine temporel, on obtient l'équation de Cummins donnée par l'Equation 4

$$(M + A_\infty) \cdot \ddot{q}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - \tau) \cdot \dot{q}(\tau) \cdot d\tau + K_h \cdot q(t) = f_{ex}(t) \quad (4)$$

En considérant que le solide est immobile pour $t < 0$ et en tenant compte du principe de causalité, l'équation Equation 4 se réduit à

$$(M + A_\infty) \cdot \ddot{q}(t) + \int_0^t K(t - \tau) \cdot \dot{q}(\tau) \cdot d\tau + K_h \cdot q(t) = f_{ex}(t) \quad (5)$$

Où $K(t)$ est la transformée de Fourier inverse du coefficient d'amortissement de radiation équivalent, introduit dans l'équation Equation 3, $B_{eq}(\omega) = (i\omega A'(\omega) + B(\omega))$ et qui s'écrit

$$K(t) = \text{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega A'(\omega) + B(\omega)) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \right) \quad (6)$$

Ce qui donne, par symétrie,

$$K(t) = \text{Re} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (-\omega A'(\omega) \sin(\omega t) + B(\omega) \cos(\omega t)) \cdot d\omega \right) \quad (7)$$

Ogilvie [3] a montré par analyse harmonique que

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega \cdot A'(\omega) \cdot \sin(\omega t) \cdot d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega \quad (8)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante, largement utilisée dans la littérature ([4] et [5])

$$K(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega \quad (9)$$

L'intégrale (ou produit de convolution) présent dans l'équation mécanique Equation 5 complique de façon importante la résolution de ce problème dans le domaine temporel.

2. Modèles d'état (State-space models)

Le terme de convolution, qui représente une difficulté numérique, peut être remplacé par un modèle d'état. Nous allons commencer par présenter un modèle largement utilisé dans la littérature, notamment par Kristiansen [4] et Taghipour [5]. Pour ce faire, il nous faut introduire une fonction y qui correspond à l'opposé de l'effort de radiation

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau) \cdot \dot{q}(\tau) \cdot d\tau = -f'_{rad}(t) \quad (10)$$

Où $f'_{rad}(t)$ correspond à l'effort de radiation sans le terme $-A_\infty \cdot \ddot{q}$. Le modèle d'état, pour un temps continu, est celui d'un système linéaire invariant. Dans un cas simple à un seul degré de liberté le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= A_c \cdot X(t) + B_c \cdot \dot{q}(t) \\ y(t) &= C_c \cdot X(t) + D_c \cdot \dot{q}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Où X est le vecteur d'état du système de taille N . Le vecteur vitesse \dot{q} représente la commande de ce système d'état et $y(t)$ en est la sortie. A_c , B_c , C_c et D_c sont les 4 matrices, constantes, du système d'état d'ordre N . Plus l'ordre est grand et plus l'approximation de l'effort de radiation est précise. Ce qui se fait au détriment des performances de calcul. L'algorithme le plus couramment utilisé pour déterminer les matrices du modèle d'état est la décomposition en valeurs singulières de Hankel (HSVD) introduite par Kung [6]. Perez [7] détaille comment calculer les matrices du modèle d'état discret à partir de la matrice de Hankel, puis comment calculer les matrices du modèle d'état continu en utilisant les matrices du modèle d'état discret en s'appuyant sur le travail d'Al-Saggaf [8].

2.1 Premier modèle d'état (SSM1)

Dans le cas de notre cylindre, nous avons 6 degrés de liberté, nous devons alors réécrire le modèle d'état. Nous avons alors une nouvelle sortie donnée par l'Equation 12.

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^6 \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \cdot \dot{q}_j(\tau) \cdot d\tau = -f'_{rad_i}(t) \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \quad (12)$$

Et le modèle d'état correspondant donné par l'Equation 13.

$$\begin{cases} \dot{X}_{ij}(t) = A_{cij} \cdot X_{ij}(t) + B_{cij} \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^6 (C_{cij} \cdot X_{ij}(t) + D_{cij} \cdot \dot{q}_j(t)) \end{cases} \quad (13)$$

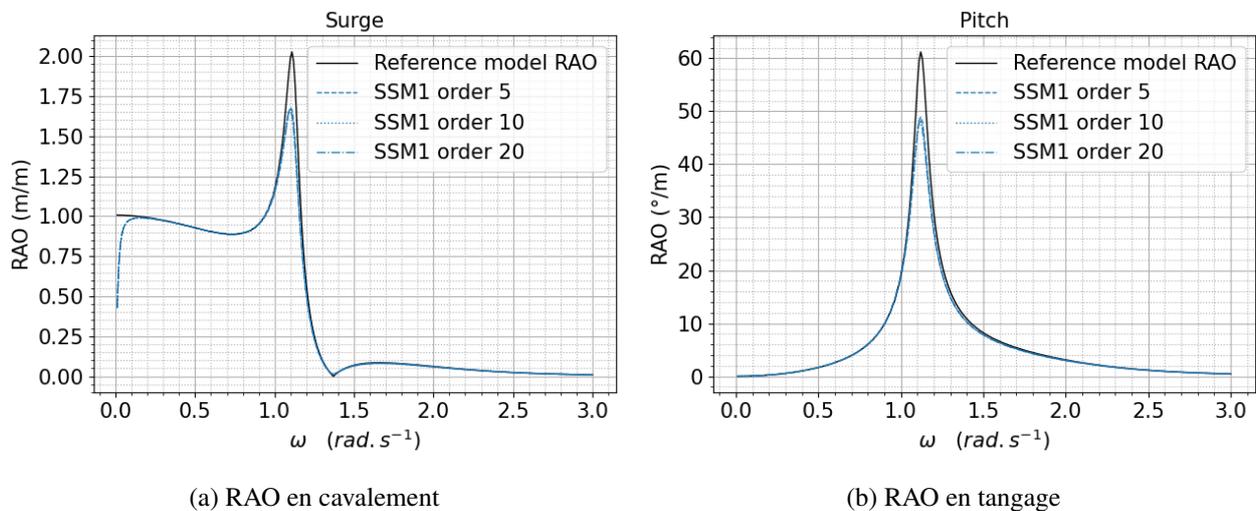


Figure 1. Comparaison entre SSM1 et la RAO de référence pour le tangage et le cavement du cylindre

La Figure 1a et la Figure 1b montrent les RAOs de référence (courbe noire), et celles obtenues avec le modèle d'état de la littérature que nous avons appelé SSM1 (courbe bleue). Pour ces deux calculs, nous avons considéré une houle monochromatique ayant une incidence de 180°. La RAO en pilonnement n'est pas représentée car elle est identique quel que soit le modèle utilisé. Ce sera également le cas dans la suite. En ce qui concerne les RAOs en cavement (surge) et en tangage (pitch), il y a des écarts importants entre les deux courbes. Ces écarts sont très marqués à la résonance et pour les faibles pulsations (dans le cas du cavement). Après une investigation plus poussée et différents tests, nous avons pu relier ces erreurs à une définition incomplète de la fonction de retard $K(t)$.

2.2 Modèle d'état corrigé (SSM2)

Si nous reprenons la relation d'Ogilvie, [Equation 8](#), nous constatons qu'elle n'est pas vérifiée pour $t = 0$. En effet,

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega \cdot A'(\omega) \cdot \sin(0) \cdot d\omega = 0 \neq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(0) \cdot d\omega \quad (14)$$

Ce qui nous amène à considérer une nouvelle définition de la fonction de retard

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega & t = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega & \forall t \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

En lisant les travaux de Perez [7] et d'Al-Saggaf [8], il apparaît que la matrice d'action directe D_c est dépendante de $K(t = 0)$. Ainsi, nous obtenons une nouvelle matrice d'action directe en ne modifiant que la valeur de $K(t = 0)$ en entrée de l'algorithme.

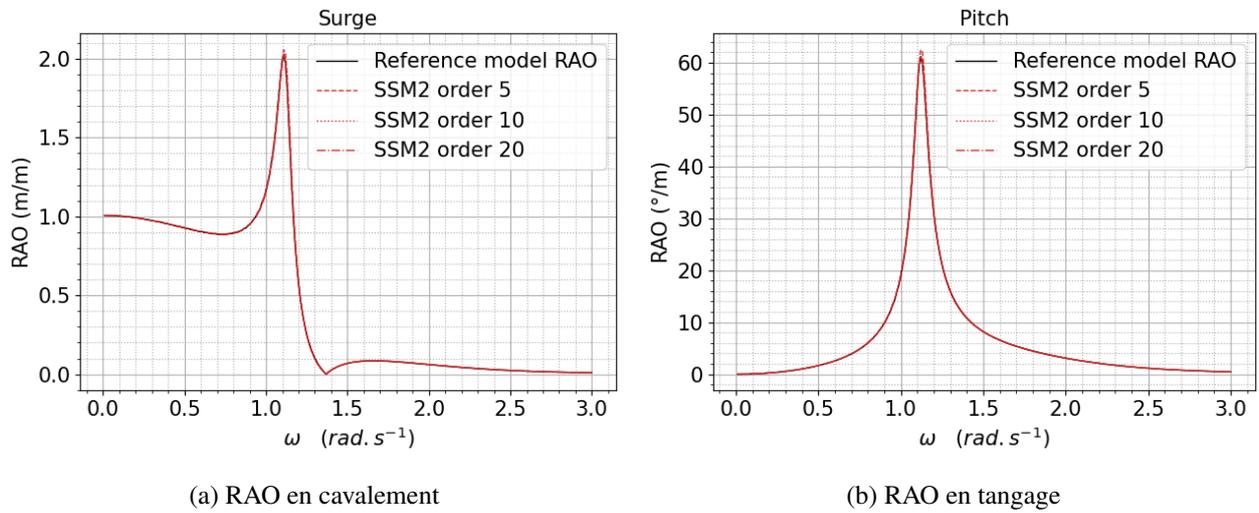


Figure 2. Comparaison entre SSM2 et la RAO de référence pour le tangage et le cavalemt du cylindre

Les figures [Figure 2a](#) et [Figure 2b](#) montrent les RAOs obtenues avec notre modèle de référence (courbe noire) et ceux obtenus avec le modèle d'état corrigé que nous avons appelé SSM2 (courbe rouge). Nous constatons que les écarts précédemment observés ont disparu. La correspondance est excellente avec des erreurs maximales très en dessous du pour-cent. Ces résultats confirment que les erreurs obtenues avec SSM1 sont à priori dues à une définition erronée de la matrice d'action directe D .

2.3 Modèle d'état simplifié (SSM3)

Ce type de modèle d'état est très largement utilisé dans différents domaines de la physique et, dans la plupart des cas, la matrice d'action directe est nulle. C'est d'ailleurs le point de départ de certains auteurs comme par exemple Yu [9] qui suppose d'emblée que $D = 0$. Il en va de même pour les modèle d'état construits avec les série de Prony [10]. Nous continuerons à utiliser la décomposition en valeur singulière d'Hankel par souci de comparabilité avec les modèles déjà proposés. Le modèle simplifié est donc assez semblable à celui présenté en section [subsection 2.1](#)

$$\begin{cases} \dot{X}_{ij}(t) &= A_{cij} \cdot X_{ij}(t) + B_{cij} \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) &= \sum_{j=1}^6 (C_{cij} \cdot X_{ij}(t)) \end{cases} \quad (16)$$

Nous pouvons noter que, puisque la matrice d'action directe n'existe plus, il n'y a plus à se soucier de la valeur de $K(t = 0)$. Ainsi, nous pouvons conserver la première définition de la fonction de retard.

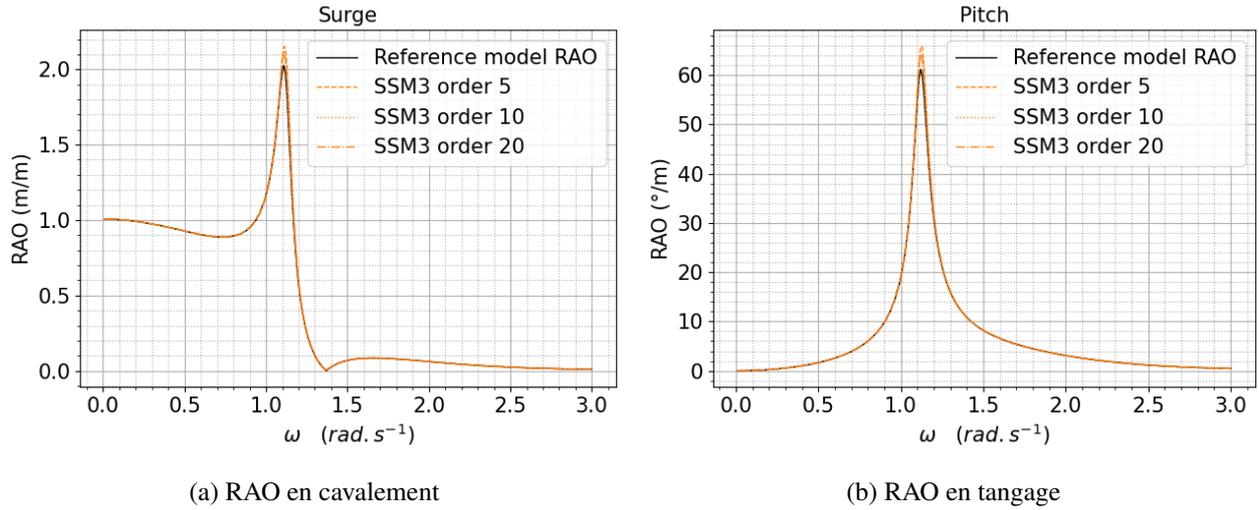


Figure 3. Comparaison entre SSM3 et la RAO de référence pour le tangage et le cavalemt du cylindre

Les figures [Figure 3a](#) et [Figure 3b](#) montrent les RAOs obtenues avec notre modèle de référence (courbe noire) et celles obtenues avec le modèle d'état corrigé que nous avons appelé SSM3 (courbe orange). Les résultats montrent une légère erreur pour le cavalemt au niveau du pic de résonance. Cette erreur suggère que le terme d'action directe est nécessaire pour obtenir une RAO précise. Taghipour [5] affirme que

$$D_c = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} B_{eq}(\omega) \quad (17)$$

Cependant, même en extrapolant les coefficients hydrodynamiques jusqu'à $\omega = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'erreur persiste. Ce qui laisse à penser que, numériquement, B_{eq} ne tend pas suffisamment rapidement vers 0. Ce qui s'explique certainement par la présence du terme en $i\omega A'(\omega)$ dans B_{eq} .

2.4 Modèle d'état général (SSM4)

Jusqu'à présent, nous nous sommes placés dans le cas d'un système linéaire en régime sinusoïdal forcé. C'est-à-dire que toutes les sollicitations sont des fonctions sinusoïdales. Mais dans le cas où nous introduisons des efforts non linéaires dans le modèle, ce qui sera le cas dans la suite de ce manuscrit, il nous faut ne plus considérer l'hypothèse du régime sinusoïdal forcé. Nous avons ainsi une accélération et une vitesse qui ne sont plus couplées. Pour un système à un degré de liberté, l'effort de radiation devient alors, dans le domaine temporel

$$f_{rad}(t) = - \int_0^t K^a(t-\tau) \cdot \ddot{q}(\tau) d\tau - \int_0^t K^b(t-\tau) \cdot \dot{q}(\tau) d\tau \quad (18)$$

Avec K^a et K^b les fonctions de retard pour la masse ajoutée et pour l'amortissement de radiation,

$$K^a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} A'(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega \quad \text{et} \quad K^b(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega \quad (19)$$

Nous allons donc décomposer la fonction de radiation y en deux parties qui auront, chacune, un modèle d'état qui leur sera associé.

$$y(t) = \underbrace{\int_0^t K^a(t-\tau) \cdot \ddot{q}(\tau) \cdot d\tau}_{y^a(t)} + \underbrace{\int_0^t K^b(t-\tau) \cdot \dot{q}(\tau) \cdot d\tau}_{y^b(t)} \quad (20)$$

Dans le cas de notre cylindre à 6 degrés de liberté, les modèles d'état sont de la forme

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{X}_{ij}^a(t) = A_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t) + B_{ij}^a \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i^a(t) = \sum_{j=1}^6 \left(C_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t) + D_{ij}^a \cdot \ddot{q}_j(t) \right) \end{cases}}_{\text{Pour la masse ajoutée}} \quad \underbrace{\begin{cases} \dot{X}_{ij}^b(t) = A_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t) + B_{ij}^b \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i^b(t) = \sum_{j=1}^6 \left(C_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t) + D_{ij}^b \cdot \dot{q}_j(t) \right) \end{cases}}_{\text{Pour l'amortissement}} \quad (21)$$

Le calcul de K^a à partir de la masse ajoutée n'est pas aisé. C'est d'ailleurs pour cela que l'on utilise les relations d'Ogilvie utiliser l'amortissement de radiation dans les calculs. Grâce aux travaux Wehausen [11], nous envisageons de dériver K^a , après avoir vérifié les différentes hypothèses du théorème de dérivation sous intégrale, nous pouvons dériver. En utilisant les relations d'Ogilvie, et en vérifiant le prolongement par continuité en $t = 0$, on obtient:

$$K^a(t) = \int_0^t K^b(\tau) \cdot d\tau \quad , \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (22)$$

Dans la pratique, l'utilisation des séries de Prony pour intégrer des expressions contenant K^b donne des résultats précis et rapides. L'algorithme utilisé pour l'interpolation de fonction avec les séries de Prony est donné dans [12].

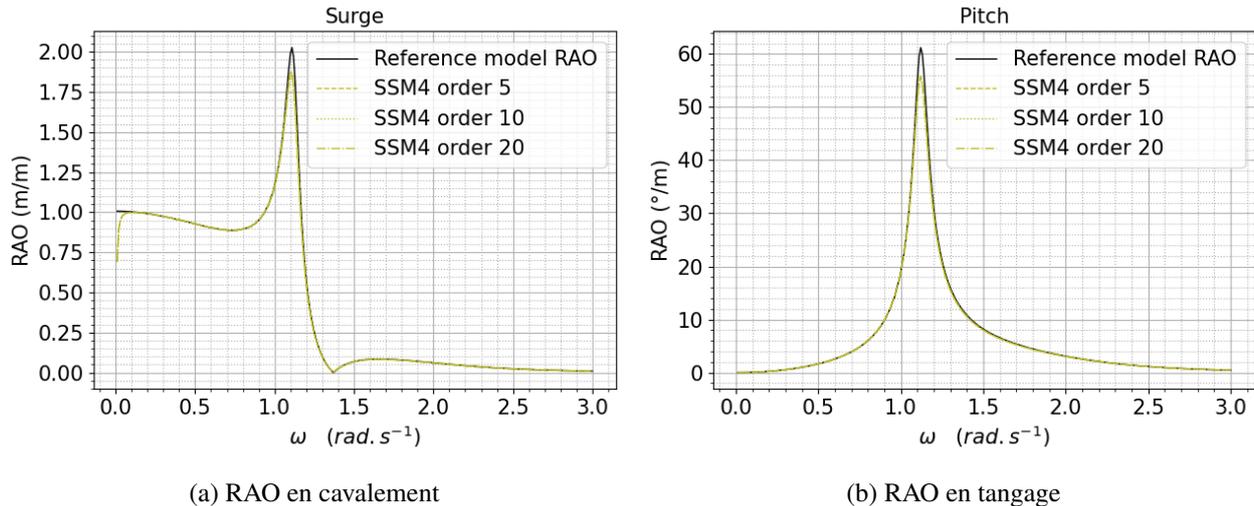


Figure 4. Comparaison entre SSM4 et la RAO de référence pour le tangage et le cavalement du cylindre

Les figures Figure 4a et Figure 4b montrent les RAOs obtenues avec notre modèle de référence (courbe noire) et ceux obtenus avec le modèle d'état corrigé que nous avons appelé SSM4 (courbe verte). Nous pouvons constater qu'il y a un écart entre la RAO de SSM4 et notre RAO de référence. Cet écart ressemble beaucoup à celui que nous avons constaté pour les figures Figure 1a et Figure 1b. Il apparaît que l'écart obtenu ici est la moitié de l'écart obtenu avec SSM1. Le fait que les écarts aient la même forme et qu'ils soient localisés aux même endroits, nous laisse penser que cet écart est lié aux matrices d'action directe. Il s'agit des matrices D^a et D^b .

2.5 Modèle d'état général simplifié (SSM5)

Nous suspectons que les matrices d'action directe sont à l'origine de l'erreur que nous constatons pour SSM4. Cependant, l'origine de cette erreur n'est pas la même que dans la section subsection 2.1. Nous avons soigneusement développé nos calculs en tenant compte de la correction apportée par l'équation Equation 14. Nous en venons donc à repenser au modèle d'état simplifié ne faisant pas intervenir de terme d'action directe.

Nous choisissons donc les modèles d'état suivant.

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{X}_{ij}^a(t) = A_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t) + B_{ij}^a \cdot \ddot{q}_j(t) \\ y_i^a(t) = \sum_{j=1}^6 (C_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t)) \end{cases}}_{\text{Pour la masse ajoutée}} \quad \underbrace{\begin{cases} \dot{X}_{ij}^b(t) = A_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t) + B_{ij}^b \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i^b(t) = \sum_{j=1}^6 (C_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t)) \end{cases}}_{\text{Pour l'amortissement}} \quad (23)$$

Les définitions de K^a et K^b restent inchangées. Nous procédons aux calculs afin d'obtenir les courbes suivantes.

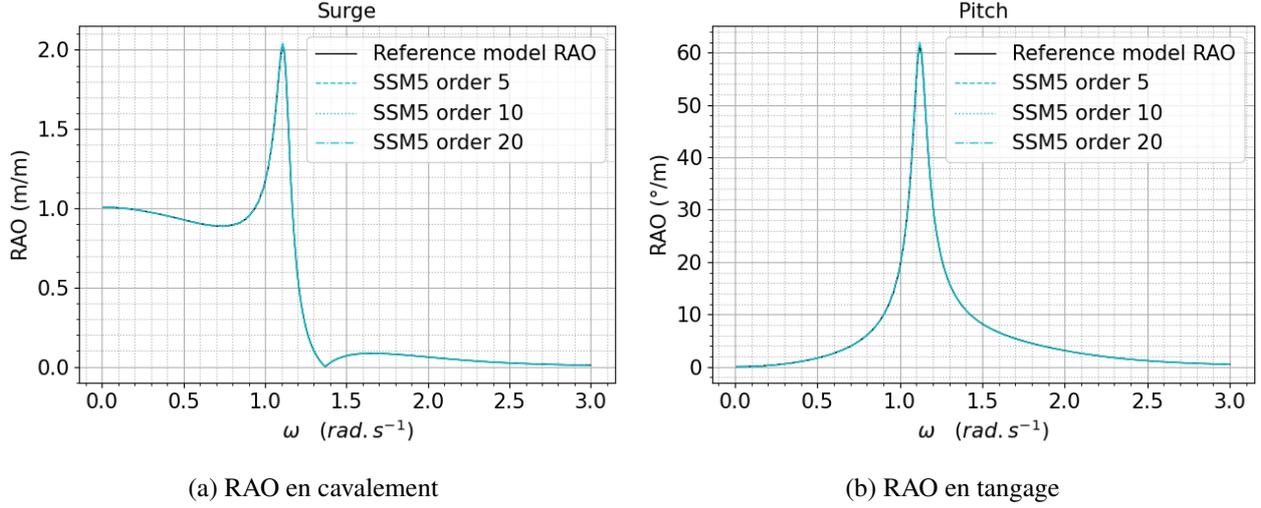


Figure 5. Comparaison entre SSM5 et la RAO de référence pour le tangage et le cavalemt du cylindre

Les figures [Figure 5a](#) et [Figure 5b](#) montrent les RAOs obtenues avec notre modèle de référence (courbe noire) et ceux obtenus avec le modèle d'état corrigé que nous avons appelé SSM5 (courbe cyan). Nous retrouvons, comme pour SSM2, une RAO correspondant avec la RAO de référence.

2.6 Analyse des résultats

L'utilisation de la HSVD permet de construire des modèles d'états dans le cas du RSF et dans le cas général. Il apparaît que la présence d'un terme d'action directe est nécessaire en RSF. En revanche, les termes d'action directe sont à éviter dans le cas général. Ces résultats sont purement dus à des effets numériques et sont propres à cette méthode. D'autres méthodes ne font pas apparaître de terme d'action directe et fonctionnent néanmoins.

3. Dynamique des systèmes multi-corps

Il existe plusieurs méthodes pour modéliser la dynamique des systèmes multi-corps. La méthode la plus populaire est la mécanique de Kane (ou principe de d'Alembert). Comme expliqué dans [13], cette méthode utilise les notions de vitesse et d'effort virtuels afin d'établir autant d'équations qu'il y a de degrés de liberté dans le système. Cette méthode est notamment utilisée dans le module Simscape Multibody de Mathworks [14]. C'est d'ailleurs sur ce module que s'appuie le module WecSim [15] utilisé pour modéliser le comportement des Wave Energy Converters (WEC). Il est également possible de modéliser ces systèmes avec une approche Lagrangienne en introduisant des contraintes holonomes ($f(q,t) = 0$ avec q le vecteur des coordonnées généralisées) comme cela est fait dans [16] et dans [17]. L'obtention de contraintes holonomes nécessite d'exprimer des contraintes géométriques ce qui rend la démarche assez complexe. Dans toute cette section, le centre de gravité sera implicitement pris comme point de référence, pour chaque solide, mais il est possible de conduire le même développement pour un point de référence quelconque.

3.1 Utilisation de contraintes non-holonomes

Nous proposons une méthode alternative qui consiste à utiliser des contraintes non-holonomes du type $f(q, \dot{q}) = 0$ car, bien qu'elles soient à priori plus complexes à manipuler, elles vont permettre une modélisation très simple dans certains cas.

La première étape consiste à écrire le Lagrangien du système libéré de toutes les contraintes de liaison. Soit un système composé de n solides. On note E_c son énergie cinétique et E_p son énergie potentielle. Le Lagrangien est défini par:

$$L = E_c - E_p \quad (24)$$

Et satisfait à l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum F_i \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad (25)$$

Où $\sum F_i$ est le vecteur des efforts généralisés.

Le système est en réalité soumis à m contraintes de liaison. D'après [18], il est possible de définir un Lagrangien auxiliaire L' prenant en compte ces contraintes en utilisant des multiplicateurs de Lagrange notés λ_j

$$L' = L + \sum_{j=1}^m f_j(q, \dot{q}) \cdot \lambda_j \quad (26)$$

Ce Lagrangien auxiliaire satisfait également l'Equation 25 et, sachant que les multiplicateurs de Lagrange sont seulement fonctions du temps, il vient l'Equation 27

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \left[\dot{\lambda}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} f_j(\dot{q}_i, q_i) + \lambda_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} f_j(\dot{q}_i, q_i) \right) - \lambda_j \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} f_j(\dot{q}_i, q_i) \right] = \sum F_i \quad (27)$$

Il est plus élégant et plus pratique de mettre l'Equation 27 sous forme matricielle. Pour se faire, il faut définir les deux matrices de contraintes suivantes

$$C(q, \dot{q}) = (c_{ji}) \quad c_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (28)$$

$$B(q, \dot{q}) = (b_{ji}) \quad b_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (29)$$

D'après l'Equation 28, l'Equation 29 et [19], nous pouvons alors réécrire l'équation 27 sous forme matricielle

$$M(q) \cdot \ddot{q} + N(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + {}^t C(q, \dot{q}) \cdot \dot{\lambda} + ({}^t \dot{C}(q, \dot{q}) - {}^t B(q, \dot{q})) \cdot \lambda = \sum F \quad (30)$$

Avec $M(q)$ la matrice masse totale généralisée et $N(q, \dot{q})$ la matrice définie par

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^{6n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_k \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6n \rrbracket^2 \quad (31)$$

En dérivant les m équations de contrainte par rapport au temps, il vient

$$C(q, \dot{q}) \cdot \ddot{q} + B(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = 0 \quad (32)$$

En ajoutant l'Equation 32, nous obtenons une équation supplémentaire permettant de mettre le problème sous forme d'un système d'état.

$$\begin{pmatrix} M(q) & 0 & {}^t C(q, \dot{q}) \\ 0 & I_{6n} & 0 \\ C(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(q, \dot{q}) & 0 & {}^t B(q, \dot{q}) - {}^t \dot{C}(q, \dot{q}) \\ I_{6n} & 0 & 0 \\ -B(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Avec I_{6n} la matrice identité de dimension $6n \times 6n$. Les $\dot{\lambda}_j$ sont les actions de liaisons.

3.2 Illustration et validation

Afin de pouvoir illustrer et valider ce modèle, il est nécessaire de choisir un cas test de la dynamique multi-corps. Notre choix s'est porté sur le "Andrew's squeezer mechanism", ainsi nommé car développé par G.C. Andrew en 1961 lors de sa thèse. Il s'agit d'un problème plan à un degré de liberté.

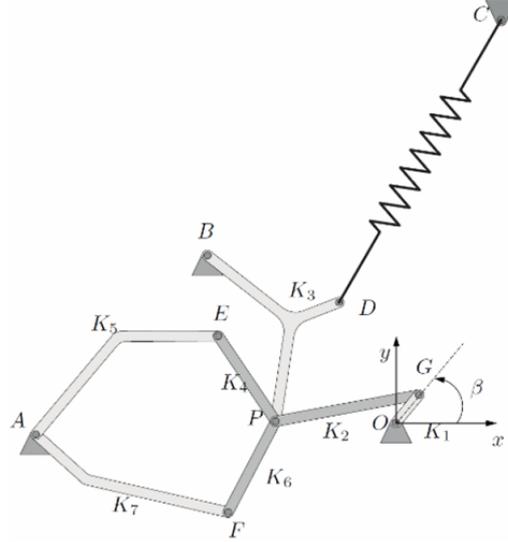


Figure 6. Andrew's squeezer mechanism (mécanisme de presse d'Andrew)

La Figure 6, tirée de [20], présente le système. Il s'agit d'un ensemble de 7 corps reliés par des liaisons pivots aux points O, A, B, D, E, F, G et P où O, A, B et C sont des points fixes. Le système est initialement au repos. Un couple constant $T(t \geq 0) = 0.033 \text{ Nm}$ est appliqué sur le solide 1 au point O. Le ressort reliant les points C et D a une raideur de $k=4530 \text{ N/m}$ et une longueur à vide de $l_0 = 0.07785 \text{ m}$. La gravité est négligée. Les caractéristiques inertielles ainsi que les coordonnées initiales des points de liaison et des centres de gravité sont données dans [20].

3.2.1 Contraintes de la liaison pivot

Nous allons exprimer les contraintes pour une liaison pivot entre un solide i et un solide j au point P . La première étape est d'écrire le torseur cinématique de la liaison dans lequel il y a deux contraintes

$$\vec{T}_v(P, i/j) = \left\{ \begin{array}{c|c} - & 0 \\ - & 0 \\ \theta_i - \theta_j & - \end{array} \right\}_{P, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \Rightarrow \begin{cases} \overline{V(P, i/j)} \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \overline{V(P, i/j)} \cdot \vec{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (34)$$

En utilisant la relation $\overline{V(P, i/j)} = \overline{V(P, i/0)} - \overline{V(P, j/0)}$, l'équation du transport de vitesse et en introduisant la notation suivante,

$$\begin{cases} \overline{G_i P} = X_{iP} \cdot \vec{x}_i + Y_{iP} \cdot \vec{y}_i \\ \overline{G_j P} = X_{jP} \cdot \vec{x}_j + Y_{jP} \cdot \vec{y}_j \end{cases} \quad (35)$$

nous pouvons faire apparaître les coordonnées généralisées. Ainsi nous pouvons réécrire les contraintes comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_i - Y_{iP} \dot{\theta}_i \cos(\theta_i) - X_{iP} \dot{\theta}_i \sin(\theta_i) - \dot{x}_j + Y_{jP} \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) + X_{jP} \dot{\theta}_j \sin(\theta_j) = 0 \\ \dot{y}_i - Y_{iP} \dot{\theta}_i \sin(\theta_i) + X_{iP} \dot{\theta}_i \cos(\theta_i) - \dot{y}_j + Y_{jP} \dot{\theta}_j \sin(\theta_j) - X_{jP} \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

En utilisant la définition des matrices de contraintes de l'Equation 28 et de l'Equation 29, nous pouvons écrire les 2 lignes de ces matrices correspondant aux deux contraintes imposées par la liaison pivot. La définition de

ces matrices implique une organisation par triplet pour les problèmes plans (3 degrés de liberté) et par hexaplet pour les problèmes 3D (6 degrés de liberté).

$$C = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -X_{iP} \sin(\theta_i) - Y_{iP} \cos(\theta_i) \\ 0 & 1 & +X_{iP} \cos(\theta_i) - Y_{iP} \sin(\theta_i) \end{bmatrix}}_{i^{\text{ème}} \text{ triplet}} & \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & +X_{jP} \sin(\theta_j) + Y_{jP} \cos(\theta_j) \\ 0 & -1 & -X_{jP} \cos(\theta_j) + Y_{jP} \sin(\theta_j) \end{bmatrix}}_{j^{\text{ème}} \text{ triplet}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -X_{iP} \dot{\theta}_i \cos(\theta_i) + Y_{iP} \dot{\theta}_i \sin(\theta_i) \\ 0 & 0 & +X_{iP} \dot{\theta}_i \sin(\theta_i) - Y_{iP} \dot{\theta}_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix}}_{i^{\text{ème}} \text{ triplet}} & \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & +X_{jP} \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) - Y_{jP} \dot{\theta}_j \sin(\theta_j) \\ 0 & 0 & +X_{jP} \dot{\theta}_j \sin(\theta_j) + Y_{jP} \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) \end{bmatrix}}_{j^{\text{ème}} \text{ triplet}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (38)$$

3.2.2 Prise en compte des efforts

De même que pour le vecteur des vitesses généralisées, le vecteur des efforts généralisés est organisé en triplet pour les problèmes plans. Puisqu'il y a 7 solides, il y a 21 composantes d'effort.

$$f_{ext} = {}^t [f_{x \rightarrow 1}, f_{y \rightarrow 1}, C_{z \rightarrow 1}, f_{x \rightarrow 2}, f_{y \rightarrow 2}, C_{z \rightarrow 2}, \dots, f_{x \rightarrow 6}, f_{y \rightarrow 6}, C_{z \rightarrow 6}, f_{x \rightarrow 7}, f_{y \rightarrow 7}, C_{z \rightarrow 7}] \quad (39)$$

Pour le couple, la seule composante non nulle est $C_{z \rightarrow 1} = T$. Chaque triplet d'effort appliqué au solide i est exprimé en son centre de gravité. Pour l'effort du ressort appliqué au solide 3, il y a deux façon de procéder. L'effort peut s'écrire sous forme vectorielle au point D, avant de le transporter en G_3 .

$$\begin{pmatrix} f_{x \rightarrow 3} \\ f_{y \rightarrow 3} \\ C_{z \rightarrow 3} \end{pmatrix} = f_{ressort} = -k(l - l_0) \cdot \frac{\vec{CD}}{\|\vec{CD}\|} \quad \text{avec} \quad l = \|\vec{CD}\| \quad (40)$$

Une façon plus élégante d'exprimer l'effort du ressort est de considérer son énergie potentielle élastique.

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (l - l_0)^2 \quad (41)$$

Nous obtenons ensuite l'effort du ressort en calculant le Lagrangien de cette énergie et en prenant son opposé. Ce qui revient, en l'occurrence, à dériver cette énergie par rapport aux coordonnées généralisées du solide 3.

$$f_{x \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial x_3} \quad f_{y \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial y_3} \quad C_{z \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial \theta_3} \quad (42)$$

3.2.3 Simplifications pour les problèmes plans

Il apparaît, pour tous les problèmes plans, que le terme $N(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$ de l'Equation 30 disparaît. La matrice masse $M(q)$ est constante. D'autre part, l'utilisation du formalisme introduit dans l'Equation 35 conduit, quelle que soit la liaison, à la relation $\dot{C}(q, \dot{q}) = B(q, \dot{q})$. Ainsi, l'Equation 33 devient, dans le cas des problèmes plans:

$$\begin{pmatrix} M & 0 & {}^t C(q, \dot{q}) \\ 0 & I_{3n} & 0 \\ C(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_{3n} & 0 & 0 \\ -\dot{C}(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Avec I_{3n} la matrice identité de dimension $3n \times 3n$.

N ^o	point	Solide i	Solide j	N ^o	point	Solide i	Solide j
1	A	0	5	8	P	2	3
2	A	0	7	9	P	2	4
3	O	0	1	10	P	2	6
4	B	0	3	11	P	3	4
5	E	4	5	12	P	3	6
6	F	6	7	13	P	4	6
7	G	1	2				

Tableau 1. Définition des liaisons

3.2.4 Cas isostatique et hyperstatique

Il est possible de modéliser ce problème dans le cas isostatique ainsi que dans le cas hyperstatique. Le [Tableau 1](#) présente la liste des toutes les liaisons possibles pour ce problème.

Les 10 premières liaisons donnent un système isostatique tandis que la prise en compte des 13 liaisons donne un système hyperstatique. La résolution se fait avec un algorithme de Runge Kutta 45 avec un pas de temps de 10^{-5} s sur une durée de 0.03 s. La résolution du système matriciel, de type $AX = B$, dans un pas de temps se fait à l'aide de routines LAPACK [21]. Pour le cas isostatique, nous utilisons la routine [DGESV](#). Pour le cas hyperstatique, la matrice A est singulière ce qui nous conduit à opter pour la routine [DGELSD](#) qui minimise la quantité $|B - AX|$. Les deux approches donnent rigoureusement les mêmes résultats. Ces résultats sont présentés sur la [Figure 7a](#) et la [Figure 7b](#), et correspondent à ceux donnés dans [20].

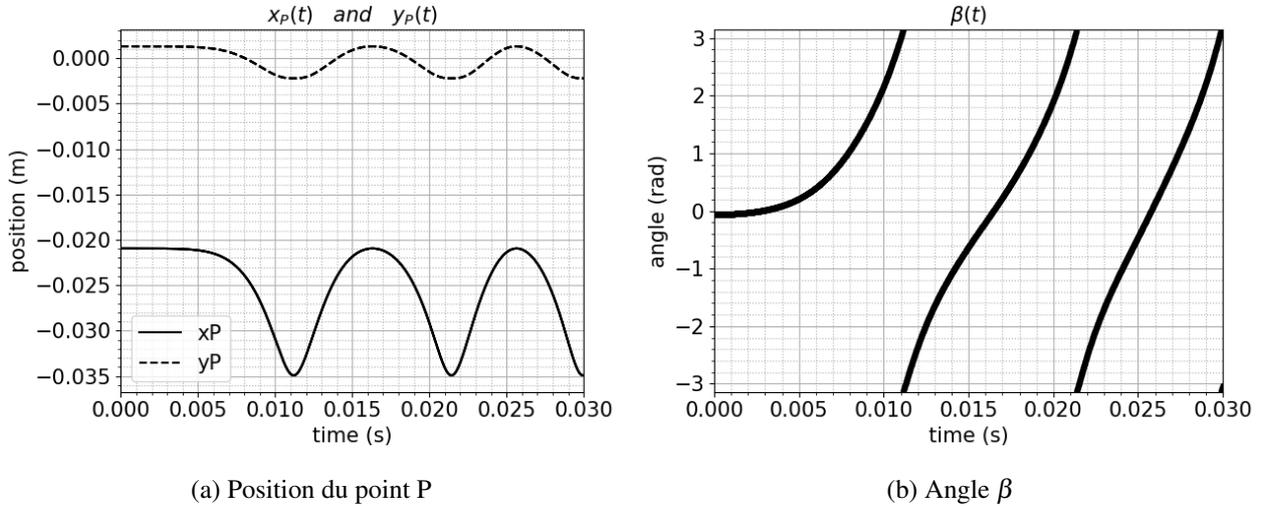


Figure 7. Résultats de la simulation temporelle

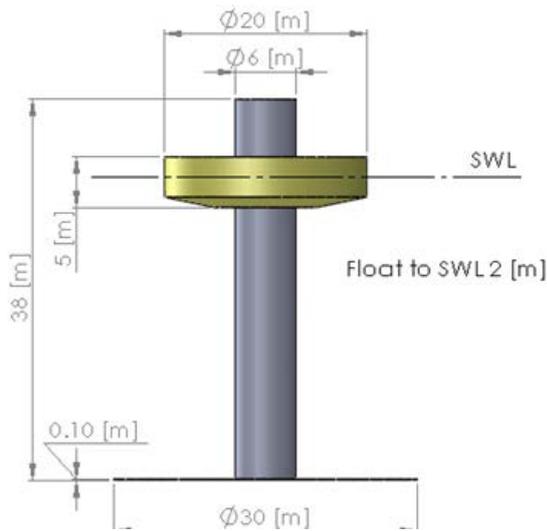
Le code de calcul est écrit avec le langage python. L'algorithme de résolution est quant à lui écrit en cython ce qui permet d'appeler directement les routines [LAPACK](#), de compiler l'algorithme et de l'appeler depuis python. Les performances de calculs sont donc très intéressantes. Notons également que pour un grand nombre de solides, il peut être intéressant d'utiliser des routines de résolution pour les matrices clairsemées comme [DG-BSV](#). Pour le cas isostatique, le temps de calcul avec [DG-BSV](#) est environ 20 fois plus faible qu'avec [DGESV](#).

Il est intéressant de connaître la dérive numérique de ce calcul. A cet effet, revenons sur l'[Equation 32](#). Cette équation traduit le fait que le travail est nul pour les actions de liaison. Ainsi, la norme de ce travail traduit la dérive numérique.

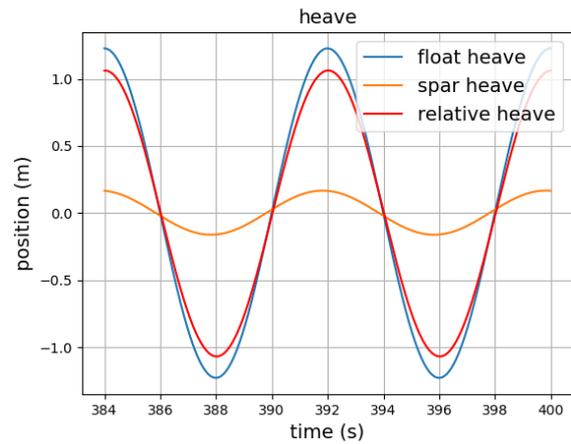
4. Modèle complet

En utilisant les développements de la [section 2](#) et de la [section 3](#), il est possible de construire un modèle dynamique incluant les efforts dus à la houle dans le plan. Ce modèle est explicité dans l'[Equation 44](#). Ce modèle a pu être appliqué avec succès sur l'un des benchmarks du module WecSim [15]. Il s'agit du système RM3 qui est composé de deux solides en liaison glissière comme montré sur la [Figure 8a](#). Les caractéristiques mécaniques relatives à ce problème sont disponibles dans les [tutoriaux WecSim](#). Les données hydrodynamiques sont quant à elles disponibles dans les [tutoriaux BEMIO](#). Les résultats obtenus avec le modèle proposé sont représentés sur la [Figure 8b](#) et correspondent parfaitement à la figure 8 donnée dans [15].

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} M + A_\infty & 0 & {}^t C(q, \dot{q}) \\ 0 & I_{3n} & 0 \\ C(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K_h & 0 \\ I_{3n} & 0 & 0 \\ -\dot{C}(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{X}_{ij}^a(t) = A_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t) + B_{ij}^a \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i^a(t) = \sum_{j=1}^{6n} C_{ij}^a \cdot X_{ij}^a(t) \\ \dot{X}_{ij}^b(t) = A_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t) + B_{ij}^b \cdot \dot{q}_j(t) \\ y_i^b(t) = \sum_{j=1}^{6n} C_{ij}^b \cdot X_{ij}^b(t) \\ f'_{rad}(t) = -y^a(t) - y^b(t) \quad \text{avec} \quad \Sigma F = f'_{rad}(t) + f_{ex}(t) + \dots \end{array} \right. \quad (44)$$



(a) Description du système



(b) Résultat d'une simulation numérique

Figure 8. Description et résultats pour le système RM3

5. Conclusion

La [section 1](#) et la [section 2](#) ont permis d'établir un modèle d'état hydrodynamique, en complétant les relations d'Ogilvie, dans le cas d'un régime sinusoïdal forcé et dans un cas plus général en utilisant la HSVD. La [section 3](#) a permis le développement, et la validation, d'un modèle dynamique qui s'avère très simple à mettre en place dans le cas des problèmes plans malgré la complexité apparente des contraintes non-holonomes. Sa simplicité est due à la facilité d'automatisation des contraintes de liaison pour les problèmes plans. D'autre part, le modèle fonctionne très bien pour les cas hyperstatiques et il donne accès à la dérive numérique. Les temps de calculs sont faibles grâce à la compilation en langage C du code cython. La [section 4](#) a concaténé ces deux modèles afin d'obtenir un modèle complet pour les structures marines multi-corps également très simple pour les problèmes plans. Ce modèle complet a également été validé. Toutefois, cette simplicité n'est, a priori, pas généralisable aux problèmes 3D. Un développement pour les problèmes tridimensionnels est à envisager.

Références

- [1] X.-B. Chen, “Hydrodynamics in Offshore and Naval Applications - Part I,” *6th International Conference on HydroDynamics*, p. 28, 2004.
- [2] W. E. Cummins, “The impulse response function and ship motions,” Tech. Rep. 1661, David Taylor Model Basin Washington DC, 1962.
- [3] T. Ogilvie, “Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions,” *The Fifth Symposium on Naval Hydrodynamics*, pp. 3–128, 1964.
- [4] E. Kristiansen, s. Hjulstad, and O. Egeland, “State-space representation of radiation forces in time-domain vessel models,” *Ocean Engineering*, vol. 32, pp. 2195–2216, Dec. 2005.
- [5] R. Taghipour, T. Perez, and T. Moan, “Hybrid frequency–time domain models for dynamic response analysis of marine structures,” *Ocean Engineering*, vol. 35, pp. 685–705, May 2008.
- [6] S. Kung, “A new identification and model reduction algorithm via singular value decompositions,” *12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, pp. 705–714, 1979.
- [7] T. Perez and T. I. Fossen, “Time- vs. Frequency-domain Identification of Parametric Radiation Force Models for Marine Structures at Zero Speed,” *MIC*, vol. 29, no. 1, pp. 1–19, 2008.
- [8] U. Al-Saggaf and G. Franklin, “Model reduction via balanced realizations: an extension and frequency weighting techniques,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 687–692, July 1988.
- [9] Z. Yu and J. Falnes, “State-space modelling of a vertical cylinder in heave,” *Applied Ocean Research*, vol. 17, pp. 265–275, Oct. 1995.
- [10] F. Rongère, J.-M. Kobus, A. Babarit, and G. Delhommeau, “Étude comparée de méthodes de calcul des efforts de radiation pour application à l’aviron,” *La Houille Blanche*, pp. 45–52, Nov. 2011.
- [11] J. V. Wehausen, “Initial-value problem for the motion in an undulating sea of a body with fixed equilibrium position,” *J Eng Math*, vol. 1, pp. 1–17, Jan. 1967.
- [12] J. Khazaei, L. Fan, W. Jiang, and D. Manjure, “Distributed Prony analysis for real-world PMU data,” *Electric Power Systems Research*, vol. 133, pp. 113–120, Apr. 2016.
- [13] Z. Hussain and N. Z. Azlan, “KANE’s method for dynamic modeling,” in *2016 IEEE International Conference on Automatic Control and Intelligent Systems (I2CACIS)*, (Selangor, Malaysia), pp. 174–179, IEEE, Oct. 2016.
- [14] M. Schlotter, “Multibody System Simulation with SimMechanics,” p. 24.
- [15] K. Ruehl, C. Michelen, S. Kanner, M. Lawson, and Y.-H. Yu, “Preliminary Verification and Validation of WEC-Sim, an Open-Source Wave Energy Converter Design Tool,” in *Volume 9B: Ocean Renewable Energy*, (San Francisco, California, USA), p. V09BT09A040, American Society of Mechanical Engineers, June 2014.
- [16] M. Fayet, “Simulation des mécanismes - Topologie, géométrie, cinématique,” p. 27, 2006.
- [17] B. Simeon, “On Lagrange multipliers in flexible multibody dynamics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 6993–7005, Oct. 2006.
- [18] P. Amiot and L. Marelau, “Mécanique Classique II,” in *Mécanique Classique II*, p. 24, 1997.
- [19] H. Elloumi, *Commande des plateformes avancées de simulation de conduite*. PhD thesis, École des mines de paris, 2007.
- [20] P. Betsch, C. Becker, M. Franke, Y. Yang, and A. Janz, “A comparison of DAE integrators in the context of benchmark problems for flexible multibody dynamics,” *J Mech Sci Technol*, vol. 29, pp. 2653–2661, July 2015.
- [21] “<http://www.netlib.org/lapack/index.html> (dernière consultation le 17/11/20).”