

**Développement d'un code de diffraction - radiation basé sur une discrétisation
linéaire du potentiel de vitesse**
Comparaison avec la méthode des panneaux constants

P.-Y. WUILLAUME^{(1)*}, L. LETOURNEL⁽¹⁾, F. RONGERE⁽¹⁾, C. CHAUVIGNÉ⁽¹⁾

⁽¹⁾D-ICE ENGINEERING, Nantes, France

* Corresponding author: pierre-yves.wuillaume@dice-engineering.com

Résumé

Ce papier présente un nouveau code de diffraction - radiation, nommé *Hélios*. Le premier objectif de cette étude est la présentation de la théorie des écoulements potentiels utilisant soit une discrétisation linéaire soit une discrétisation constante des quantités physiques. La validation de l'implémentation de ces deux approches repose sur un cas analytique basé sur la radiation d'un hémisphère. Le second objectif est la quantification de l'intérêt de l'utilisation d'une discrétisation linéaire par rapport à une discrétisation constante ou méthode des panneaux constants. Le même cas analytique est utilisé à cette fin.

Summary

This paper presents a new diffraction - radiation code, named *Helios*. The first goal of this study is the presentation of the potential flow theory using either a linear or a constant discretization of the physical quantities. The validation of the implementation of these two approaches is performed using an analytical validation case based on the radiation of a hemisphere. The second goal is the quantification of the interest of using a linear discretization compared to the classical constant discretization or constant panel method. The same analytical case is used for this purpose.

1. Introduction

Les codes de diffraction - radiation sont des outils fondamentaux pour le calcul des interactions houle - structure lors de simulations de corps flottants ou immergés, en tenue à la mer ou en manoeuvrabilité, avec ou sans vitesse d'avance. Ils sont basés sur la théorie des écoulements potentiels dans le domaine fréquentiel, linéarisée au premier ordre, voire au second. Outre les hypothèses inhérentes aux écoulements potentiels (incompressibilité, irrotationalité et viscosité négligée), leur linéarisation entraîne deux hypothèses supplémentaires : les mouvements des corps sont supposés de faible amplitude autour de leur position d'équilibre et les vagues de faible cambrure. Plusieurs exemples de tels codes existent : *NEMOH* [1], *WAMIT* [2], *HydroStar* [3], *OrcaWave* [4], etc.

La plupart de ces logiciels reposent sur une méthode aux éléments frontières et supposent le potentiel de vitesse constant sur chaque facette du maillage. Cette approche, dite *méthode des panneaux*

constants, est efficace mais manque de précision sur les surfaces à fortes courbures. Il est alors nécessaire d'augmenter significativement le nombre de facettes pour atteindre une bonne précision, conduisant à des temps de calculs élevés et des besoins en mémoire importants. Pour surmonter ce problème, la méthode aux éléments frontières d'ordre élevé a été développée [5, 6]. La différence avec la méthode des panneaux constants est que le potentiel de vitesse est calculé à partir de fonctions de forme, en plusieurs points de chaque facette, dont ses sommets. Par exemple des facettes à huit noeuds sont utilisées dans [6] et [7]. Cette méthode assure la continuité des dérivées, les résultats sont plus précis et les maillages peuvent être plus grossiers. Néanmoins, cette approche d'ordre élevé nécessite plus de calculs par facette et est plus complexe à mettre en oeuvre mathématiquement et algorithmiquement.

L'objectif de ce papier est d'investiguer une méthode intermédiaire où le potentiel de vitesse est discrétisé linéairement sur chaque facette et de comparer cette approche avec la méthode des panneaux constants, classiquement utilisée dans les codes de calculs commerciaux. L'utilisation de la discrétisation linéaire du potentiel de vitesse a été mise en oeuvre dans le cadre d'une théorie des écoulements potentiels instationnaires satisfaisant l'hypothèse de faible perturbation, dite "weak-scatterer" [8], mais pas, à notre connaissance, dans une théorie linéaire dans le domaine fréquentiel. Afin de disposer d'un outil numérique maîtrisé, moderne et parfaitement intégrable dans des chaînes de calculs complexes telles que la génération et la mise à jour de jumeaux numériques de navires, *D-ICE Engineering* a développé son propre code de diffraction - radiation au premier ordre, nommé *Helios*. Ce code peut utiliser une discrétisation des quantités physiques linéaire ou constante.

2. Theory

Le fluide est supposé incompressible et non visqueux tandis que l'écoulement est considéré comme irrotationnel. Le champ de vitesse du fluide dérive alors d'un potentiel de vitesse ϕ tel que :

$$\mathbf{V} = \nabla\phi \quad (1)$$

Il est supposé la périodicité des quantités physiques à la pulsation de la houle ω . Le potentiel de vitesse s'exprime alors :

$$\phi = \Re(\varphi e^{-i\omega t}) \quad (2)$$

avec φ l'amplitude complexe du potentiel de vitesse, t le temps et i le nombre imaginaire unité.

Les principales équations régissant la théorie des écoulements potentiels dans le domaine fréquentiel, linéarisée au premier ordre et en supposant la profondeur infinie sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} - k_0\varphi = 0 \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = f(\mathbf{x}) \text{ sur } S \\ \varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

où k_0 est le nombre d'onde en profondeur infinie, $f(\mathbf{x})$ une fonction scalaire dont l'expression dépend du type de problème élémentaire (diffraction ou radiation), $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ la dérivée normale suivant la normale intérieure au fluide et S la surface immergée des corps.

Le problème ci-dessus est résolu via l'utilisation de la méthode aux éléments frontières. La deuxième identité de Green permet d'exprimer l'équation intégrale suivante en un point $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ du maillage avec $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$ pour variable d'intégration:

$$-\Omega(\mathbf{x}_i)\varphi(\mathbf{x}_i) - \iint_S \varphi(\mathbf{x}_j) \frac{\partial G}{\partial n_j}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) dS + \iint_S G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\mathbf{x}_j) dS = 0 \quad (4)$$

Ω indique l'angle solide et G la fonction de Green à surface libre, solution du problème ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta G = 0 \text{ dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial G}{\partial z} - k_0 G = 0 \Big|_{z=0} \\ G \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (5)$$

De nombreuses expressions de la fonction de Green à surface libre en profondeur infinie existent [9]. Dans *Hélios*, l'approximation globale de la fonction de Green, proposée par Wu et al. [10, 11], est utilisée. Elle permet un calcul rapide et une implémentation simple de la fonction de Green [9]. Son expression est :

$$G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_m} - k_0 [L(X, Y) + W(X, Y)] \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} k_0 = \frac{\omega^2}{g} \\ R = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \\ r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ Z = z_i + z_j \\ R_m = \sqrt{r^2 + Z^2} \\ \cos(\theta) = -\frac{Z}{R_m} \\ X = k_0 r \\ Y = k_0 Z \\ \xi = Y + iX \cos(\theta) \\ L(X, Y) = -\frac{4}{\pi} \Re \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\xi E_1(\xi) d\theta \right] \\ W(X, Y) = 2\pi [H_0(X) - iJ_0(X)] e^Y \end{cases} \quad (7)$$

J_0 , H_0 et E_1 représentent respectivement la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, la fonction de Struve d'ordre zéro et la fonction intégrale exponentielle.

La composante de l'écoulement local L est approximée par [10]:

$$L(X, Y) \approx \frac{2P(X, Y)}{1 + k_0^3 R_m^3} + 2\rho(1 - \rho)^3 R(X, Y) \quad (8)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X, Y) = e^Y \left[\ln \left(\frac{k_0 R_m - Y}{2} \right) + \gamma - 2k_0^2 R_m^2 \right] + k_0^2 R_m^2 - Y \\ R(X, Y) = (1 - \beta)A(\rho) - \beta B(\rho) - \frac{\alpha C(\rho)}{1 + 6\alpha\rho(1 - \rho)} + \beta(1 - \beta)D(\rho) \\ \alpha = -\frac{Z}{r R_m} \\ \beta = \frac{R_m}{k_0 R_m} \\ \rho = \frac{1 + k_0 R_m}{1 + k_0 R_m} \end{array} \right. \quad (9)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\rho) = 1.21 - 13.328\rho + 215.896\rho^2 - 1763.96\rho^3 + 8418.94\rho^4 \\ \quad - 24314.21\rho^5 + 42002.57\rho^6 - 41592.9\rho^7 + 21859\rho^8 - 4838.6\rho^9 \\ B(\rho) = 0.938 + 5.373\rho - 67.92\rho^2 + 796.534\rho^3 - 4780.77\rho^4 \\ \quad + 17137.74\rho^5 - 36618.81\rho^6 + 44894.06\rho^7 - 29030.24\rho^8 + 7671.22\rho^9 \\ C(\rho) = 1.268 - 9.747\rho + 209.653\rho^2 - 1397.89\rho^3 + 5155.67\rho^4 \\ \quad - 9844.35\rho^5 + 9136.4\rho^6 - 3272.62\rho^7 \\ D(\rho) = 0.632 - 40.97\rho + 667.16\rho^2 - 6072.07\rho^3 + 31127.39\rho^4 \\ \quad - 96293.05\rho^5 + 181856.75\rho^6 - 205690.43\rho^7 + 128170.2\rho^8 - 33744.6\rho^9 \end{array} \right. \quad (10)$$

γ représente la constante d'Euler :

$$\gamma \approx 0.577 \quad (11)$$

La composante de vague W est exprimée par [11] :

$$W(X, Y) \approx 2\pi \left[J_1(X) - iJ_0(X) + A_0 \frac{1 - \cos(X)}{X} - B_0 \frac{\sin(X) - X \cos(X)}{X^2} - C_0 \frac{f(X) - \sin(f(X))}{X^2} \right] e^Y \quad (12)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1.134817700 \\ B_0 = 1.0943193181 \\ C_0 = 0.5752390840 \\ f(X) = 0.8830472903X \end{array} \right. \quad (13)$$

L'équation (4) nécessite d'intégrer la fonction de Green et son gradient sur les facettes du maillage. Ces dernières sont supposées triangulaires. Dans Hélios, le potentiel de vitesse peut soit varier linéairement soit rester constant sur chaque facette. Considérons une facette de sommets \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 et de centre de gravité \mathbf{x}_G , Si le potentiel de vitesse varie linéairement alors il s'exprime au point \mathbf{x} du triangle par [8] :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_G) + \nabla_S(\varphi) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \quad (14)$$

où $\nabla_S(\varphi)$ correspond au gradient surfacique du potentiel de vitesse φ , constant du fait de la discrétisation linéaire. Son expression est [8] :

$$\nabla_S(\varphi) = \Sigma \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}_1) \\ \varphi(\mathbf{x}_2) \\ \varphi(\mathbf{x}_3) \end{pmatrix} \quad (15)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta &= \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|^2 - [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)]^2 \\ \mathbf{A} &= \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|^2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)] (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \mathbf{B} &= -[(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)] (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \end{cases} \quad (16)$$

Dans le cas où la discrétisation des quantités physiques est constante, le potentiel de vitesse pour chaque facette est constant et est calculé en son centre de gravité :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_G) \quad (17)$$

Les termes de Rankine $1/R + 1/R_m$ de l'équation (6) sont intégrés analytiquement via les formules de Letournel [8]. Le reste de la fonction de Green est intégré numériquement en utilisant une quadrature de Gauss symétrique d'ordre 4 [12].

Une fois que les coefficients d'influence sont calculés, l'équation (4) est exprimée soit en chaque noeud du maillage si la discrétisation linéaire est utilisée soit au centre de gravité de chaque facette si la méthode des panneaux constants est choisie. La dérivée normale du potentiel de vitesse est imposée via la condition limite sur le corps Eq. (3). Un système linéaire de taille le nombre de noeuds, pour la discrétisation linéaire, ou le nombre de facettes, pour la méthode aux panneaux constants, est formé et permet d'obtenir le potentiel de vitesse. Les fréquences irrégulières sont supprimées au moyen du maillage partiel de la surface libre intérieure [13]. Une condition limite de Neumann y est appliquée, de sorte que la dérivée normale du potentiel de vitesse soit nulle. Il est alors possible de calculer les masses d'eau ajoutée, les amortissements hydrodynamiques et les efforts de diffraction.

L'expression de la masse d'eau ajoutée A et de l'amortissement hydrodynamique B pour le corps i selon le degré de liberté p dû au mouvement du corps j selon le degré de liberté q est :

$$A_{ij}^{pq} = \Re(I_{ij}^{pq}) \quad (18)$$

$$B_{ij}^{pq} = \omega \Im(I_{ij}^{pq}) \quad (19)$$

avec :

$$I_{ij}^{pq} = -\rho \iint_{S_i} \varphi_{R_j^q} \frac{\partial \varphi_{R_i^p}}{\partial n} dS \quad (20)$$

$\varphi_{R_i^p}$ représente le potentiel de radiation pour le corps i selon le degré de liberté p tandis que S_i est la surface mouillée du corps i .

L'effort de diffraction ${}^D F_i^p$ est exprimé pour le corps i selon le degré de liberté p par :

$$\begin{cases} \Re({}^D F_i^p) = \omega \rho \iint_{S_i} \Im(\varphi_D) \frac{\partial \varphi_{R_i^p}}{\partial n} dS \\ \Im({}^D F_i^p) = -\omega \rho \iint_{S_i} \Re(\varphi_D) \frac{\partial \varphi_{R_i^p}}{\partial n} dS \end{cases} \quad (21)$$

où φ_D représente le potentiel de diffraction.

3. Validation

Afin de valider la bonne implémentation de la théorie précédente avec les deux discrétisations des quantités physiques étudiées (linéaire et constante), la radiation d'un hémisphère flottant est considérée. La solution analytique de ce cas a été donnée par Hulme [14]. Un maillage de 2110 noeuds et 4060 facettes d'un hémisphère d'un mètre de rayon est utilisé, présenté Figure 1. Ce maillage comprend 684 noeuds et 1290 facettes sur la surface libre intérieure afin de retirer les fréquences irrégulières. Cette capacité n'étant présente que dans *Hélios*, un maillage sans surface libre intérieure est utilisé avec *Nemoh*.

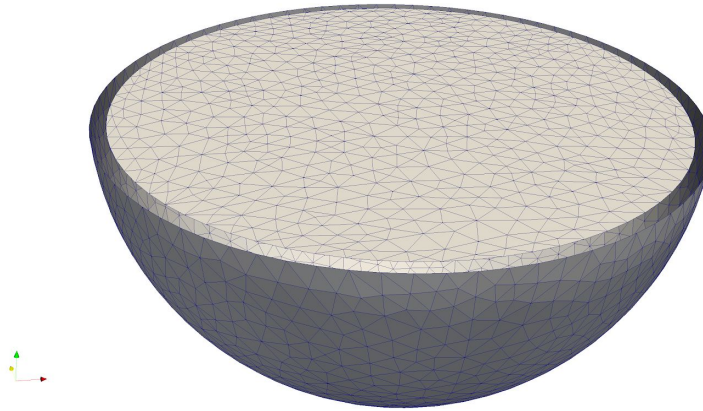


Figure 1. Maillage de l'hémisphère utilisé avec *Hélios*

Les masses d'eau ajoutées ainsi que les amortissements hydrodynamiques en cavement et en pilonnement sont calculés pour des pulsations de houle entre 0.05 rad/s et 10 rad/s avec un pas de 0.05 rad/s. Les masses d'eau ajoutée sont adimensionnalisées par ρV avec ρ la masse volumique et V le volume de l'hémisphère tandis que les amortissements hydrodynamiques le sont par $\rho V \omega$ où ω est la pulsation de la houle. Les coefficients de radiation en cavement, respectivement en pilonnement, obtenus avec *Hélios* (discrétisation linéaire et constante) et *Nemoh* [1] (discrétisation constante) sont présentés Figure 2, respectivement Figure 3. Un très bon accord est observé entre les résultats numériques, indépendamment de la discrétisation utilisée, et la solution analytique de Hulme [14]. Les résultats de *Nemoh* montrent la présence de fréquences irrégulières, absentes des résultats d'*Hélios*.

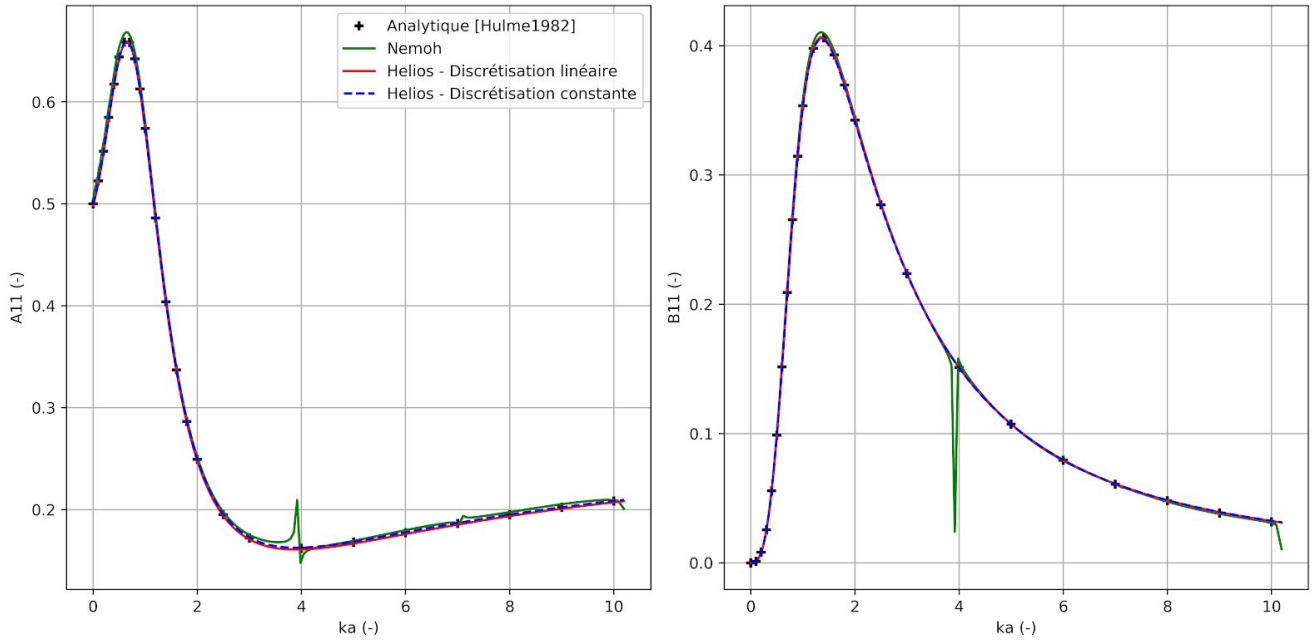


Figure 2. Masse d'eau ajoutée (gauche) et amortissement hydrodynamique (droite) adimensionnalisés en cavement d'un hémisphère flottant en fonction du nombre d'onde (k) adimensionnalisés par le rayon (a) obtenus avec *Hélios* via une discrétisation linéaire (rouge) et constante (bleu) et comparés aux résultats de Nemoh (vert) et à la solution analytique de Hulme [14] (noir)

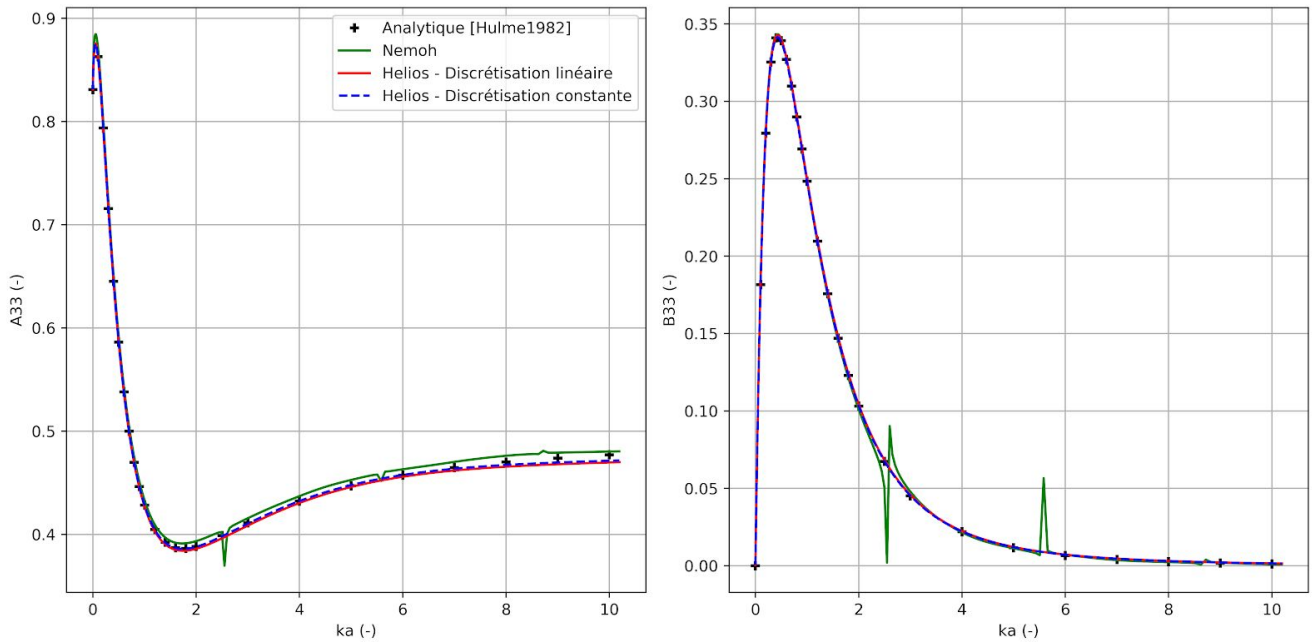


Figure 3. Masse d'eau ajoutée (gauche) et amortissement hydrodynamique (droite) adimensionnalisés en pilonnement d'un hémisphère flottant en fonction du nombre d'onde (k) adimensionnalisés par le rayon (a) obtenus avec *Hélios* via une discrétisation linéaire (rouge) et constante (bleu) et comparés aux résultats de Nemoh (vert) et à la solution analytique de Hulme [14] (noir)

4. Comparaison entre les discrétisations linéaires et constantes

Afin de quantifier l'intérêt de la discrétisation linéaire des quantités physiques par rapport à la méthode des panneaux constants, le cas de la section précédente est utilisé pour tracer des diagrammes de convergence pour chaque méthode. Dix maillages différents d'hémisphère sont utilisés. Les résultats obtenus avec les deux discrétisations pour les coefficients en cavement sont présentés Figure 4. L'erreur quadratique moyenne (*root mean square error*) est calculée entre les résultats d'Hélios pour chaque type de discrétisation et les valeurs analytiques. L'erreur quadratique moyenne sur les coefficients en cavement, respectivement en pilonnement, en fonction du nombre d'inconnues (le nombre de noeuds pour une discrétisation linéaire et de facettes pour une discrétisation constante) est présentée Figure 5, respectivement Figure 6. Le taux de convergence pour chaque discrétisation est donné dans le Tableau 1. Dans les quatre cas, les discrétisations linéaires et constantes ont un taux de convergence (coefficient directeur de la droite) proche. A part pour l'amortissement hydrodynamique en cavement, la discrétisation constante permet d'atteindre une meilleure précision que la discrétisation linéaire. Ce résultat, a priori contre-intuitif, pourrait s'expliquer par une différence de calcul de l'angle solide Ω présent dans l'équation intégrale (3). Avec une discrétisation constante, les inconnues se situent au centre de gravité des facettes, l'angle solide vaut alors exactement 2π . Avec une discrétisation linéaire, les inconnues se situent aux noeuds du maillage, l'angle solide dépend alors de la géométrie environnante. Il doit donc être calculé. Dans *Hélios*, l'angle solide pour une discrétisation linéaire est obtenu via la formule de Mantic [15], utilisé dans [16] par exemple. Il en résulte une erreur au niveau du calcul de l'angle solide, qui n'est pas présente lorsqu'une discrétisation constante est utilisée. Notre hypothèse actuelle est que cette perte de précision au niveau de l'angle solide pourrait expliquer les résultats obtenus dans le cas d'un hémisphère.

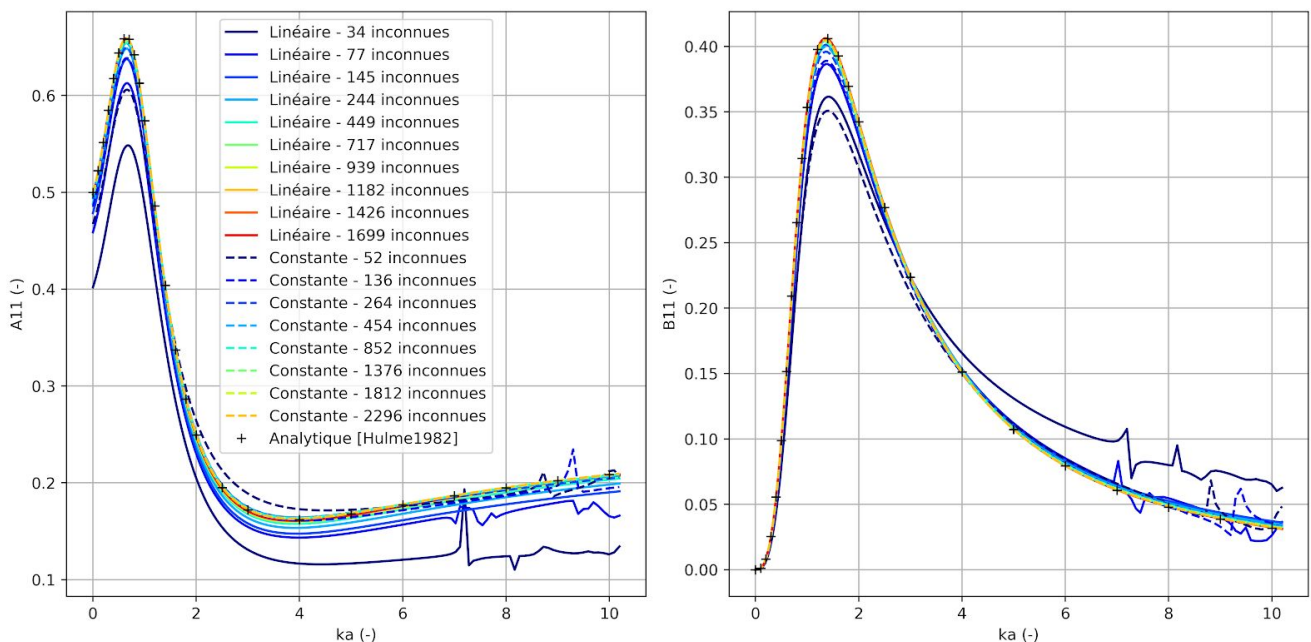


Figure 4. Convergence en maillage sur la masse d'eau ajoutée (gauche) et l'amortissement hydrodynamique (droite) en cavement d'un hémisphère flottant en fonction du nombre d'onde (k) adimensionnalisé par le rayon (a) obtenus avec *Hélios* via une discrétisation linéaire (traits pleins) et constante (traits pointillés) et comparés à la solution analytique de Hulme [14] (noir)

Discrétisation	Linéaire	Constante
A11	$\propto 1/N^{1.047}$	$\propto 1/N^{0.954}$
B11	$\propto 1/N^{1.224}$	$\propto 1/N^{1.032}$
A33	$\propto 1/N^{0.857}$	$\propto 1/N^{0.877}$
B33	$\propto 1/N^{0.853}$	$\propto 1/N^{0.869}$

Tableau 1. Taux de convergence pour chaque discrétisation dans le cas d'un hémisphère

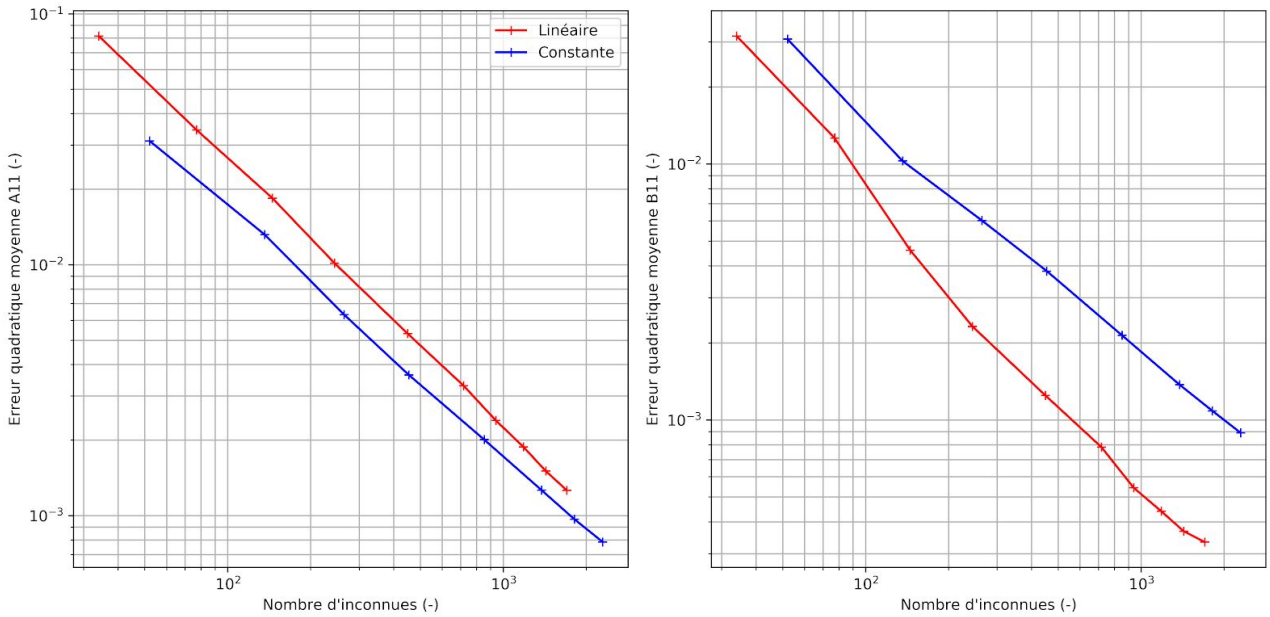


Figure 5. Erreur quadratique moyenne sur la masse d'eau ajoutée (gauche) et l'amortissement hydrodynamique (droite) en cavalement d'un hémisphère flottant en fonction du nombre d'inconnues obtenus avec *Hélios* via une discrétisation linéaire (rouge) et constante (bleu) et comparés à la solution analytique de Hulme [14]

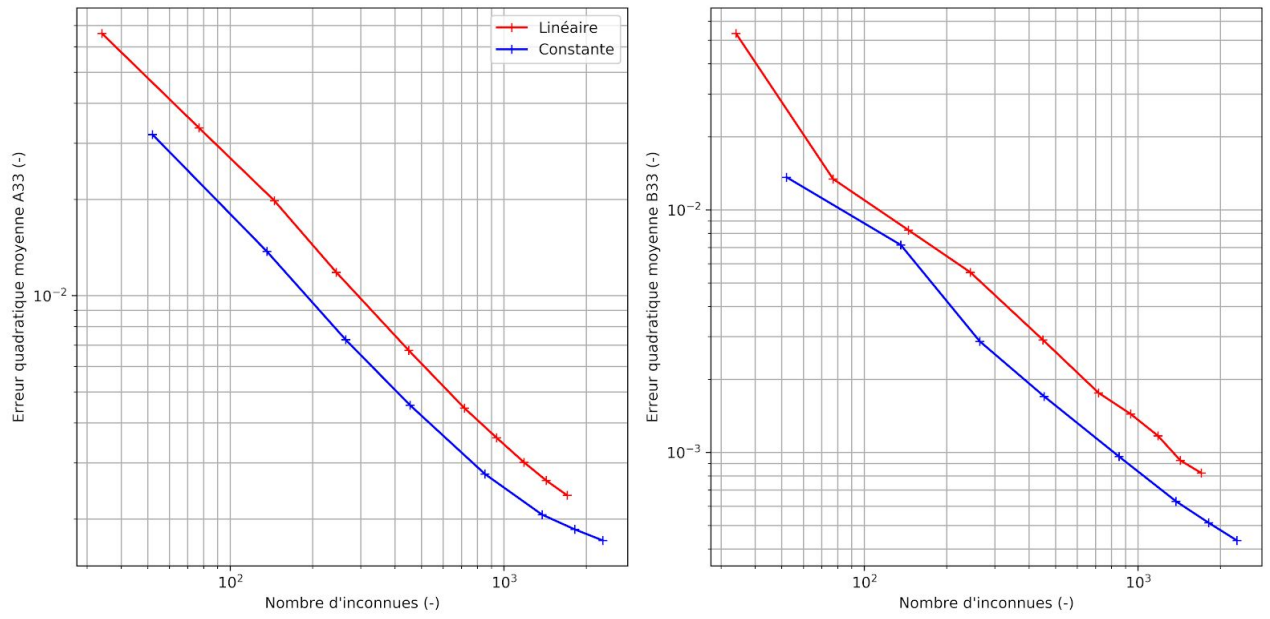


Figure 6. Erreur quadratique moyenne sur la masse d'eau ajoutée (gauche) et l'amortissement hydrodynamique (droite) en pilonnement d'un hémisphère flottant en fonction du nombre d'inconnues obtenus avec *Hélios* via une discrétisation linéaire (rouge) et constante (bleu) et comparés à la solution analytique de Hulme [14]

5. Conclusion

Ce papier présente les bases d'un nouveau code de diffraction - radiation : *Hélios*. Dans *Hélios* les quantités physiques peuvent soit être discrétisées linéairement sur chaque facette du maillage soit y être supposées constantes. Cette dernière approche, souvent nommée méthode des panneaux constants est classiquement utilisée dans les autres logiciels du même type. Après la validation de la bonne implémentation des deux méthodes, une comparaison des deux formulations a été entreprise dans le cas d'un hémisphère où une solution analytique pour les masses d'eau ajoutée et les amortissements hydrodynamiques existe. Malheureusement, dans ce cas-là, il n'a pas été possible de mettre en exergue un intérêt de l'utilisation de la discrétisation linéaire par rapport à la discrétisation constante. Une perte de précision lors du calcul de l'angle solide quand la discrétisation linéaire est utilisée est très probablement la cause de ce résultat. L'utilisation d'un autre cas de validation avec un cylindre ou une barge, où des arêtes vives, engendrant des discontinuités du potentiel de vitesse, sont présentes, pourraient sûrement permettre d'affiner la conclusion quant à l'intérêt de l'utilisation d'une discrétisation linéaire par rapport à une discrétisation constante.

Références

- [1] A. Babarit et G. Delhommeau, “Theoretical and numerical aspects of the open source BEM solver NEMOH,” in *Proceedings of the 11th European Wave and Tidal Energy Conference, EWTEC2015, Nantes, France, 2015*.
- [2] Lee, C.-H. “*WAMIT Theory Manual*”, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [3] I. Martić, N. Degiuli, S. Malenica et A. Farkas, “Discussions on the convergence of the seakeeping simulations based on the panel methods” in *Proceedings of the ASME2018 37th International Conference on Ocean Offshore and Arctic Engineering, OMAE2018, Madrid, Espagne, 2018*.
- [4] <https://www.orcina.com/webhelp/OrcaWave/>
- [5] B. Teng et R. Eatock Taylor, “New higher-order boundary element methods for wave diffraction / radiation”, *Applied Ocean Research*, vol 17, pp. 71-77, 1995.
- [6] T. Utsunomiya et E. Watanabe, “Accelerated higher order boundary element method for wave diffraction/radiation problems and its applications”, in *Proceedings of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE2002, Kitakyushu, Japon, 2002*.
- [7] Y. R. Choi, S. Y. Hong et H. S. Choi, “An analysis of second-order wave forces on floating bodies by using a higher-order boundary element method”, *Ocean Engineering*, vol 28, pp. 117-138, 2000.
- [8] L. Letournel, C. Chauvigné, B. Gelly, A. Babarit, G. Ducrozet, P. Ferrant, “Weakly nonlinear modeling of submerged wave energy converters”, *Applied Ocean Research*, vol 75, pp. 201-222, 2018.
- [9] C. Xie, Y. Choi, F. Rongère, A. H. Clément, G. Delhommeau et A. Babarit, “Comparison of existing methods for the calculation of the infinite water depth free-surface Green function for the wave-structure interaction problem”, *Applied Ocean Research*, vol 81, pp. 150-163, 2018.
- [10] H. Wu, C. Zhang, Y. Zhu, W. Li, D. Wan et F. Noblesse, “A global approximation to the Green function for diffraction radiation of water waves”, vol 65, pp. 54-64, 2017.
- [11] H. Wu, H. Liang et F. Noblesse, “Wave component in the Green function for diffraction radiation of regular water waves”, *Applied Ocean Research*, vol 81, pp 72-75, 2018.
- [12] D. A. Dunavant. “High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 21, pp 1129-1148, 1985.
- [13] S. Ohmatsu. “On the irregular frequencies in the theory of oscillating bodies in a free surface”, *Ship Research Institute*, paper 48, 1975.
- [14] A. Hulme. “The wave forces acting on a floating hemisphere undergoing forced periodic oscillations”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol 121, pp 443-463, 1982.
- [15] V. mantic. “A new formula for the C-matrix in the Somigliana identity”, *Journal of Elasticity*, vol 33, pp 191-201, 1993.
- [16] D.-Z. Ning, B. Teng, H.-T. Zhao et C.-L. Hao, “A comparison of two methods for calculating solid angle coefficients in a BIEM numerical wave tank”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 34, pp 92-96, 2010.