



## 16<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique

27-29 novembre 2018 - Marseille



# MODELISATION NUMERIQUE DU BALLOTTEMENT DES LIQUIDES DANS LES RESERVOIRS

L. KHOUF<sup>(1,2)</sup>, A. SEGHIR<sup>(1)</sup>, M.BENAOUICHA<sup>(2,3)</sup>, S.GUILLOU<sup>(2)</sup>

lydia.khouf@unicaen.fr ; seghir.a@gmail.com ; mustapha.benaouicha@segula.fr ; sylvain.guillou@unicaen.fr

<sup>(1)</sup> : *Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement. Université de Bejaia, Algérie*

<sup>(2)</sup> : *Laboratoire Universitaire des Sciences Appliquées de Cherbourg. Université de Caen, France*

<sup>(3)</sup> : *Cellule de Recherche & Innovation en ingénierie Navale & Energie. Segula Technologies*

### Résumé

Le présent travail concerne la modélisation numérique bidimensionnelle du ballonnement de liquides contenus dans des réservoirs. A cet effet, deux approches ont été comparées. La première approche est basée sur un modèle simplifié qui décrit les variations de la pression dans la masse liquide par l'équation de Laplace. La résolution a été réalisée avec la méthode des éléments finis. La deuxième approche, utilise un modèle CFD traitant le ballonnement comme un écoulement diphasique, où le domaine fluide est discrétisé en volumes finis, et les mouvements de la surface libre sont suivis en utilisant la méthode VOF (Volume Of Fluid) couplée avec la méthode Level Set. Les résultats montrent que les deux modèles reproduisent fidèlement les fluctuations de la surface libre par rapport aux résultats analytiques issus d'une solution exacte applicable au cas de réservoir rectangulaire soumis à une excitation harmonique.

### Abstract

The present study deals with numerical modeling of a two dimensional liquid tank. To this purpose, two approaches have been used and compared. An approach based on a simplified model, which describes variations of the liquid pressure by the Laplace's equation. The resolution of the equation was achieved by using the finite element method. The second approach uses a CFD model treating the sloshing as a two-phase flow, where the fluid domain is discretized into finite volumes, and the free surface motions are tracked using a coupled VOF-Level Set method. The results showed a good agreement between the aforementioned methods and an analytical solution, applicable for a rectangular tank subjected to a harmonic excitation.

## I. Introduction

Le ballottement est un phénomène qui peut être observé si un réservoir partiellement rempli de liquide est soumis à des forces excitatrices. Le mouvement total du liquide, est composé du déplacement du liquide qui suit l'excitation externe, ainsi que du mouvement associé aux oscillations de la surface libre. Il s'agit d'un phénomène complexe qui couvre divers domaines d'activité comme l'énergie, l'aérospatial, l'architecture navale, le transport routier de liquides [1], [2]. Les caractéristiques du ballottement sont étroitement liées à la géométrie du réservoir, à l'intensité de la force externe ainsi qu'au type du liquide étudié. Les réservoirs sont le plus souvent de type rectangulaire [3] ou cylindriques [4].

Compte tenu des conséquences parfois fatales du ballottement, son étude et son analyse sont abordés depuis plusieurs années. Les expérimentations des années 60 et 70 étaient à l'origine de la caractérisation du phénomène, de sa compréhension et de quelques solutions analytiques [5,6]. Un ensemble de travaux basé sur l'approche expérimentale peut être trouvé dans [5] et [6]. Plus tard, avec la révolution informatique, les méthodes numériques ont été développées afin de traiter le problème avec précision. Selon leurs discrétisations spatiales, les méthodes numériques peuvent être classées grossièrement en trois catégories. Premièrement, les méthodes à maillage fixe tel que la méthode VOF, la méthode des Marqueurs, et la méthode Level-Set. [7]. Deuxièmement, les méthodes à maillage déformable ou mobile comme les méthodes Lagrangiennes et les formulations mixtes Lagrange-Euler [8]. Troisièmement, les méthodes sans maillage telles que la SPH, Integral Methods, Partical Methods [9].

La méthode VOF 'Volume Of Fluid' permet de traiter les écoulements à deux phases 'air-liquide' en utilisant un maillage fixe. Cette méthode est bien adaptée au cas du ballottement et a déjà été utilisée par [10], [11]. La méthode Level-Set permet d'affiner le traitement de la surface libre réalisé par la méthode VOF. En dépit d'un problème de non conservation de la masse à l'interface air-eau, cette méthode est très avantageuse et pratique. Son couplage avec la méthode VOF permet de contourner ce problème et de préserver les caractéristiques de l'écoulement.

Dans le présent travail, on s'intéresse à la simulation bidimensionnelle d'un liquide contenu dans un réservoir rectangulaire rigide soumis à une excitation externe harmonique horizontale, tel que représenté sur le schéma de la *figure 1*. Pour ce faire, deux modèles ont été appliqués. Un premier modèle simplifié s'appuie sur la description des variations de la pression dans la masse liquide par l'équation de Laplace. Dans ce modèle, le liquide est supposé incompressible, en écoulement irrotationnel. Dans ce cas la condition d'onde de surface linéarisée est imposée le long de la surface libre. Les équations sont résolues avec la méthode des éléments finis. Le deuxième modèle s'appuie sur la CFD et traite le ballottement comme un écoulement diphasique liquide-air non miscibles. Dans ce cas, le domaine fluide est discrétisé en volumes finis, et le suivi de la surface libre est réalisé en utilisant la méthode VOF (Volume Of Fluid) couplée avec la méthode Level Set. Cette technique de couplage est très rentable en terme de précision de résultats par rapport à l'utilisation d'une ou l'autre méthode individuellement

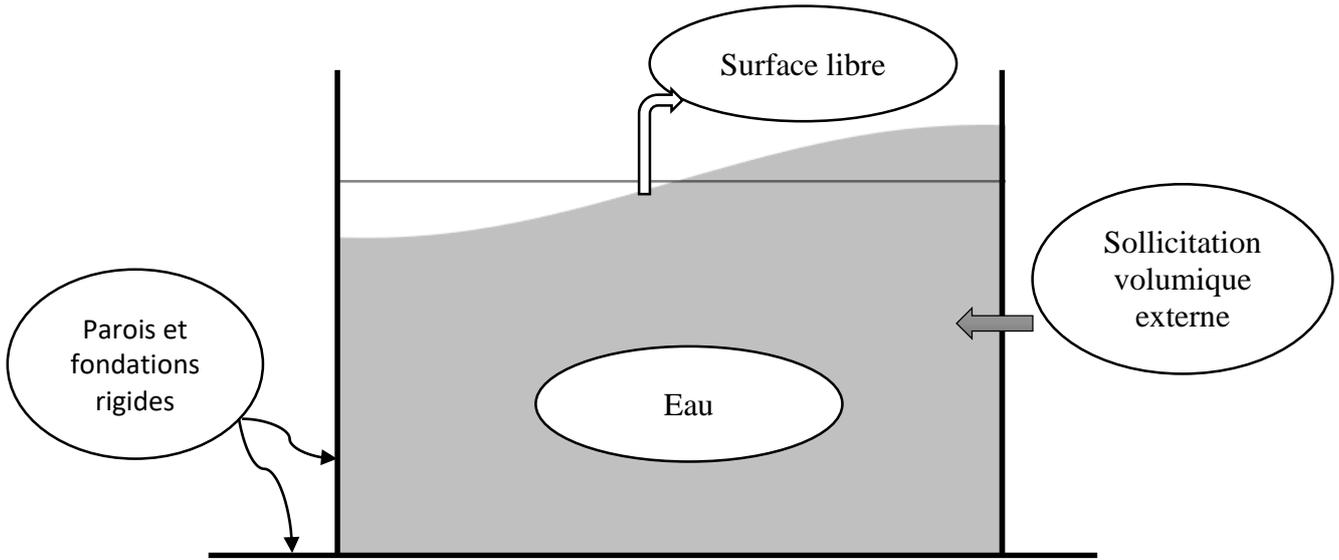


Figure 1 : Schéma représentant le cas de la présente étude

## II. Modélisation

Afin d'étudier le liquide, deux modèles sont établis. L'un des modèles est basé sur l'équation de Laplace et l'autre sur les équations générales de Navier-Stokes. Un modèle analytique a aussi été utilisé.

### II.1 Modèle analytique :

La solution analytique utilisée dans ce travail concerne le ballonnement d'un liquide dans un réservoir rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , soumis à une excitation horizontale périodique. Le liquide est supposé non visqueux, incompressible en écoulement irrotationnel, ce qui mène à résoudre l'équation de Laplace pour un potentiel de vitesse, [12]. Le potentiel de vitesse  $\phi$  peut être converti à un déplacement de la surface libre [14]

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

$$\eta = \frac{1}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{L} x \right\} \cosh \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{L} h \right\} [-A_n \omega_n \sin \omega_n t - C_n \omega \sin \omega t]$$

$$- \frac{1}{g} A \omega x \sin \omega t$$

$$\omega_n^2 = g \frac{(2n+1)\pi}{L} \tanh \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{L} H \right\} ; C_n = \frac{\omega(K_n)}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$K_n = \frac{\omega \cdot A}{\cosh\left\{\frac{(2n+1)\pi}{L} \cdot H\right\}} \frac{4}{L} \left[\frac{L}{(2n+1)\pi}\right]^2 (-1)^n; \quad A_n = -C_n - \frac{K_n}{\omega}$$

$\omega_n$  est la pulsation propre du fluide qui correspond au mode de vibration  $n$ .

$\omega$  est la pulsation de l'excitation externe et  $A$  son amplitude

L'application de ce modèle se limite à des cas de ballottement de faible amplitude.

## II.2 Modèle simplifié :

Le premier modèle basé sur l'approche simplifiée est décrit par l'équation de Laplace (équation (1)), obtenue à partir des équations de Navier-Stokes pour un fluide non visqueux en écoulement incompressible et irrotationnel.

$$\Delta P = 0 \quad (1)$$

Le système en son état, ne prend pas en compte les fluctuations de la surface libre. Alors dans le but de quantifier ces fluctuations ou le ballottement, on applique la condition d'onde de surface linéarisée (équation (2)) basé sur le principe d'une distribution hydrostatique de la pression à la surface libre, [13]

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{p} \quad (2)$$

Le système d'équation est résolu par la méthode BDF, (Backward differential Formulation), à l'ordre 2 ;

$$P_n = \frac{4}{3}P_{n-1} - \frac{1}{3}P_{n-2} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot \dot{P}_n \quad (4)$$

Rappelons que l'équation (4) est seulement valable dans le cas de pas de temps fixes.

La configuration de la surface libre est obtenue grâce à l'équation (2).

## II.3 Modèle CFD

Dans ce modèle, le système diphasique (eau/air) est discrétisé en volumes finis, le suivi des mouvements de l'interface eau-air est réalisé avec la méthode VOF couplée à la méthode Level-Set. Ce couplage VOF-Level Set, permet d'avoir de meilleures performances que si l'on utilisait chacun des schémas individuellement.

Le principe de la méthode VOF est basée sur l'utilisation de la fraction volumique notée ' $\Psi$ '. L'advection de cette fonction par l'équation (5) permet de reconstruire la surface libre. Cette

fonction représente le volume occupé par l'un des fluides dans une cellule de calcul, et sa valeur varie de 0 à 1.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u \nabla \Psi = 0 \quad (5)$$

Ainsi, une maille pleine du fluide de référence à la valeur 1 et une maille pleine de l'autre fluide à la valeur 0. Si la valeur de la fraction volumique est comprise entre 0 et 1, cela veut dire que le volume de control contient un mélange des phases. Ce qui indique la présence de l'interface dans cette cellule. Pour prendre en compte la présence des deux fluides dans le domaine de calcul, cette fonction est directement reliée à la masse volumique par l'équation (6).

$$\rho = \rho_1 \cdot \Psi + \rho_2 \cdot (1 - \Psi) \quad (6)$$

$\rho_1$  est la masse volumique du fluide de référence et  $\rho_2$  est la masse volumique de l'autre fluide

Concernant la méthode Level Set, une fonction niveau  $\varphi$  est introduite sur tout le domaine, le contour de l'interface considérée est représenté par  $\varphi = 0$  à tout instant t. il s'agit de l'interface que l'on cherche à décrire. Les valeurs de  $\varphi$  sont positives d'une part de l'interface et négatives de l'autre part, (équation(7)).

$$\varphi = \begin{cases} +1, & \text{si } x \in \text{la première phase} \\ 0, & \text{si } x \in \text{l'interface} \\ -1, & \text{si } x \in \text{la deuxième phase} \end{cases} \quad (7)$$

La fonction  $\varphi$  est régie par l'équation de transport (équation (8)). La résolution de cette équation, permet de prédire les mouvements de l'interface. La méthode Level-Set permet de calculer les caractéristiques géométriques à partir de la fonction  $\varphi$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \nabla \varphi = 0 \quad (8)$$

Cependant, les performances de cette méthode, peuvent être influencées par une mauvaise conservation de la masse, qui est dû à des erreurs numériques, d'où le couplage avec la méthode VOF.

La méthode issue du couplage des deux schémas, bénéficie à la fois des avantages de la méthode VOF et de ceux de la méthode Level-Set. La masse est bien conservée, ce qui est le principe de base de la méthode VOF, et les propriétés géométriques peuvent être facilement calculées, grâce à la méthode Level Set.

## II.4 Paramétrisation

Le cas d'étude considéré dans ce travail, consiste en un réservoir rectangulaire bidimensionnel, ayant 2 mètres de longueur et rempli à une hauteur de 1 mètre avec de l'eau. Ledit réservoir est soumis à une excitation externe de type sinusoïdale, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_e = A * \sin(w.t) \quad (9)$$

Avec :  $F_e$  est la force excitatrice externe,  $A$  est l'amplitude de l'accélération,  $w$  est la fréquence d'excitation et  $t$  représente le temps.

La fréquence de la sollicitation externe est proche de la fréquence du premier mode propre du système,  $w = 1.1 * w_1$  sachant que la fréquence de résonance du premier mode est  $w_1 = 3.7587 \text{ s}^{-1}$ .

Dans le modèle simplifié, la masse liquide a été discrétisée en éléments finis quadrangulaires de deuxième ordre et les équations de forme sont du type Lagrange. Pour le modèle CFD, la discrétisation spatiale a été faite en volumes finis quadrangulaires. Une étude de sensibilité du maillage a été effectuée, et a permis de fixer la taille des mailles à un minimum de 0.06 m à la surface libre pour le modèle simplifié, et à 0.01m pour le modèle CFD.

On réalise les simulations pour une durée de 20s avec un pas de temps égal à 0.02s.

## III. Résultats

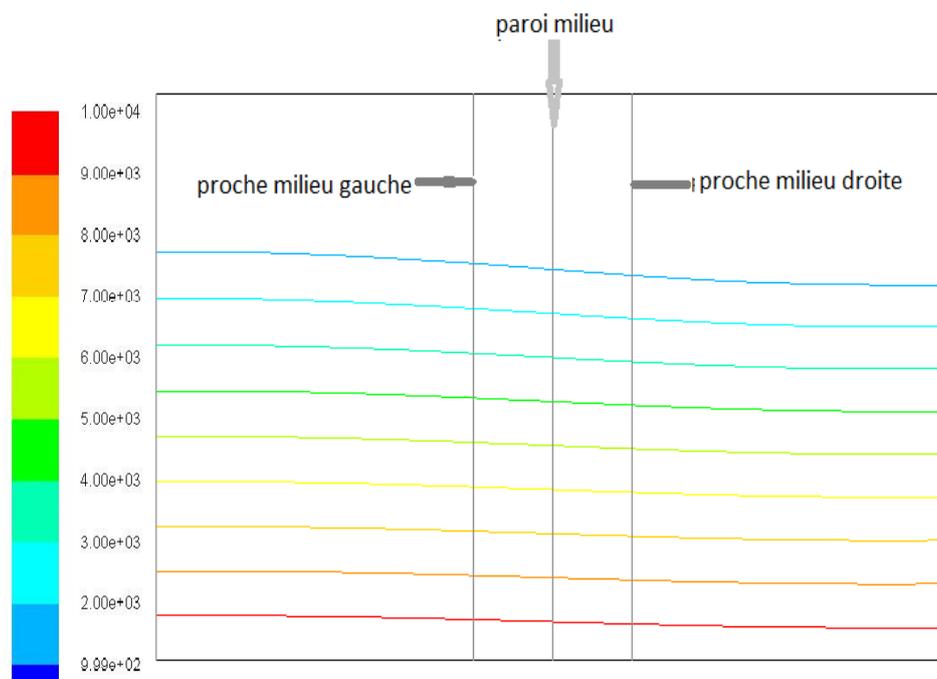


Figure 2 : Iso-contours de pression à l'intérieur du réservoir obtenu avec le modèle CFD+ lignes de coupe

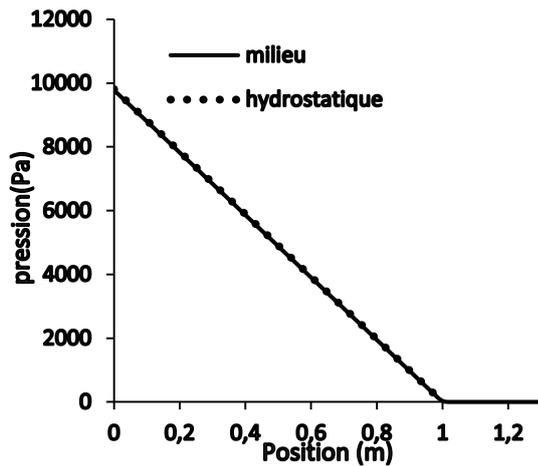


Figure 4 : la pression hydrostatique et la pression sur la ligne du milieu issu du modèle CFD

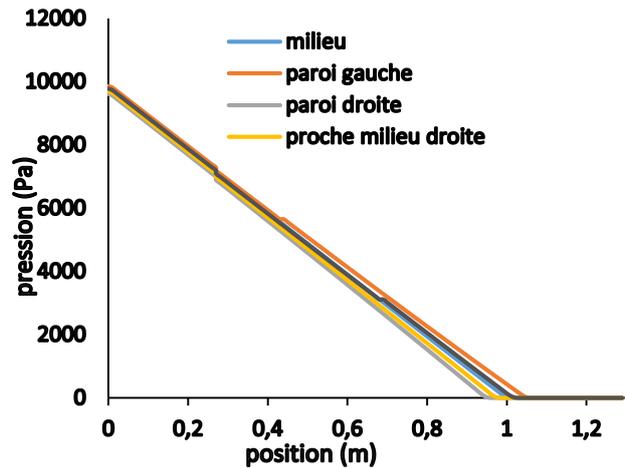


Figure 5 : Pression à différentes lignes de coupes issues du modèle CFD

Les iso-contours de la pression obtenus avec le modèle CFD, qui est le plus complet, ont été tracés sur la Figure 3. Cette figure montre bien un comportement hydrostatique de la pression. Ceci est confirmé par les profils verticaux de pression (Figure 4) au milieu du réservoir. Cependant plus on s'éloigne du profil central (figure 5) et plus l'écart par rapport à la pression hydrostatique est important. Cet écart est plus grand proche de la surface libre

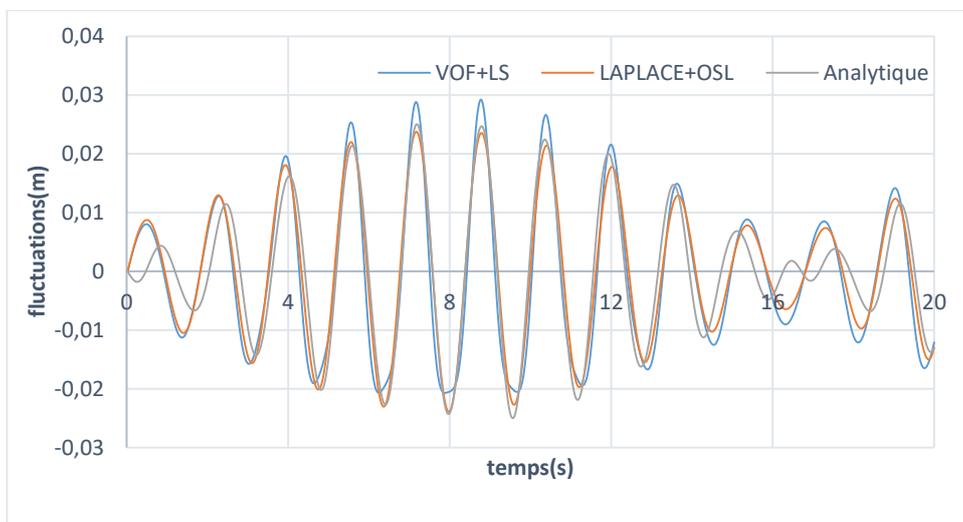


Figure 6 : oscillation de la surface libre (superposition de la solution issue du modèle Laplace, Navier-Stokes) sur la limite gauche.

La figure 6 présente une superposition des fluctuations de la surface libre obtenue par les trois méthodes. A noter que la surface libre est calculée à partir de la pression dans le cas du modèle CFD. On reconnaît l'apparition du phénomène de battement dû à la proximité de  $w$  par rapport à  $w_1$ , induisant une réponse cyclique de période 17s. On constate un écart entre les différentes solutions. Les solutions VOF+LS et Laplace sont en phase, contrairement à la solution analytique qui est en léger décalage avec les deux autres solutions au début et à la fin du cycle. On remarque

aussi une différence au niveau de l'amplitude des fluctuations qui est un peu plus importante dans le cas de la solution CFD. Les différences sont les plus importantes au milieu du cycle (8s) où l'erreur maximale des deux modèles par rapport au modèle CFD atteint 27.1 %. L'erreur moyenne est de 2.13 %.

Les sources des différences entre la solution CFD, d'une part, les solutions, analytique et Laplace, d'autre part, peuvent provenir des hypothèses simplificatrices à l'origine de ces deux dernières solutions. Deux voies majeures peuvent être évoquées : la simplification des forces inertielles et l'hypothèse de la pression hydrostatique. La simulation CFD montre une pression dynamique très faible (de l'ordre de 6 Pa max) par rapport à la pression statique (de l'ordre de 10000Pa). Ceci écarte l'effet des forces inertielles. Les erreurs sont donc dues à un écart par rapport à la pression hydrostatique que l'on peut constater sur la figure 5.

### III.1 Analyse modale :

Le système global qui gouverne le problème dans le cas du modèle simplifié (Laplace), est écrit sous forme matricielle faisant intervenir les matrices de "masse" et de "rigidité" du liquide respectivement  $K$  et  $M$ .

$$[K]\{P\} + [M]\{\ddot{P}\} = F$$

$K$  provient de la discrétisation de l'opérateur Laplace, et  $M$  de la discrétisation de la condition de surface libre.

On détermine les valeurs propres en supposant une solution exponentielle :  $P = \bar{P}e^{-i\omega t}$ . Les modes propres sont représentés en *figure 7*. Le premier mode est caractérisé par une sinusoïde centrée sur le milieu du bassin au niveau de la hauteur moyenne. Ceci est imputable à l'écart de la pression loin du centre par rapport à la pression hydrostatique (voir *Figure 5*)

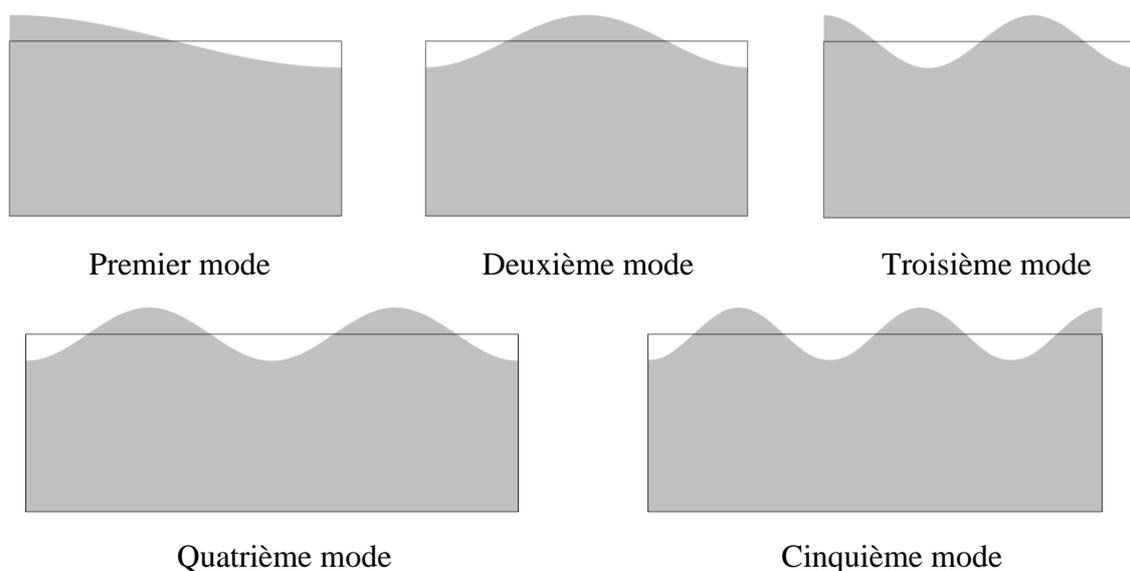


Figure 7 : Représentation des cinq premiers modes de ballotement issus du modèle simplifié

Une comparaison des caractéristiques des modes propres des solutions simplifiée et analytique est proposée dans le tableau 1.

En comparant les résultats issus du modèle simplifié, aux résultats analytiques, une très bonne concordance est constatée. L'erreur est presque nulle pour les fréquences des cinq modes propres calculés.

*Tableau 1 : valeurs des fréquences et périodes des cinq premiers modes propres de ballottement issus du modèle simplifié*

| N° mode  | Pulsation modèle simplifié (rad/s) | Pulsation analytique (rad/s) | Période(s) | Période analytique (s) | Erreur absolue |
|----------|------------------------------------|------------------------------|------------|------------------------|----------------|
| <b>1</b> | 3.7587                             | 3.7594                       | 1.6716     | 1.6713                 | 0.0007         |
| <b>2</b> | 5.5402                             | 5.5411                       | 1.1341     | 1.1339                 | 0.0009         |
| <b>3</b> | 6.7978                             | 6.7986                       | 0.9243     | 0.9241                 | 0.0008         |
| <b>4</b> | 7.8496                             | 7.8510                       | 0.8004     | 0.8004                 | 0.0014         |
| <b>5</b> | 8.7764                             | 8.7777                       | 0.7159     | 0.7159                 | 0.0013         |

#### **IV. Conclusion**

Cet article porte sur la modélisation du phénomène de ballottement d'un liquide dans un réservoir de stockage. Au cours de ce travail, un modèle simplifié basé sur l'équation de Laplace et sur la condition d'onde de surface linéarisée a été validé par rapport à des résultats analytiques et une simulation numérique avec un modèle CFD. Ce dernier est basé sur la méthode VOF couplée à la méthode Level Set pour capturer la surface libre. Dans le cas étudié la pression peut être considérée comme hydrostatique et les solutions sont proches. On note des différences avec la solution analytique et on montre que la solution simplifiée est plus précise que la solution analytique. Une étude complémentaire est en cours afin de mieux identifier les limites de ces deux dernières solutions.

Ce modèle est une première étape dans l'étude du ballottement dans les cuves soumises à des sollicitations externes plus complexes et à l'étude de l'interaction avec les parois de la cuve. L'objectif est de proposer une solution simple d'estimation des efforts et des déformations dans les parois de la cuve en vue d'un dimensionnement efficace.

## V. Bibliographie

- [1] G. Bulian et J. L. Cercos-Pita, « Co-simulation of ship motions and sloshing in tanks », *Ocean Eng.*, vol. 152, n° October 2017, p. 353-376, 2018.
- [2] H. G.-C. J. L. Bautista-Jacobo, E. Rodríguez-Morales, J. J. Montes-Rodríguez, « Effect of Baffles on the Sloshing in Road Tankers Carrying LPG : A Comparative Numerical Study Effect of Baffles on the Sloshing in Road Tankers Carrying LPG : A Comparative Numerical Study », *Math. Probl. Eng.*, vol. 2015, n° March, 2016.
- [3] A. Kumar et K. P. Sinhamahapatra, « Dynamics of Partially Filled Rectangular Rigid Tank with Surface Piercing Elements », *Int. J. Fluid Mech. Res.*, vol. 41, n° 5, p. 379-408, 2014.
- [4] W. Wang, J. Li, et T. Wang, « Damping computation of liquid sloshing with small amplitude in rigid container using FEM \* », p. 93-94, 2006.
- [5] Raouf A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics Theory and Applications*. 2005.
- [6] M. Eswaran and Ujjwal K. Saha, « Sloshing of liquids in partially filled tanks – a review of experimental investigations », *Ocean Syst. Eng.*, vol. 1, n° 2, p. 131-155, 2011.
- [7] L. Hou, F. Li, et C. Wu, « A numerical study of liquid sloshing in a two-dimensional tank under external excitations », *J. Mar. Sci. Appl.*, vol. 11, n° 3, p. 305-310, 2012.
- [8] R. Belakroum, M. Kadja, T. H. Mai, et C. Maalouf, « An efficient passive technique for reducing sloshing in rectangular tanks partially filled with liquid », *Mech. Res. Commun.*, vol. 37, n° 3, p. 341-346, 2010.
- [9] B. Boroomand, S. Bazazzadeh, et S. M. Zandi, « On the use of Laplace ' s equation for pressure and a mesh-free method for 3D simulation of nonlinear sloshing in tanks », *Ocean Eng.*, vol. 122, p. 54-67, 2016.
- [10] M. Eswaran et G. R. Reddy, « Liquid Sloshing in Fuel Storage Bays of Advanced Reactor Subjected to Earthquake Loading », *Procedia Eng.*, vol. 144, p. 1278-1285, 2016.
- [11] R. Rajagounder, G. V. Mohanasundaram, et P. Kalakkath, « A Study of Liquid Sloshing in an Automotive Fuel Tank under Uniform Acceleration », *Eng. J.*, vol. 20, n° 1, p. 71-85, 2016.
- [12] Dongming Liu et Pengzhi Lin, « A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks », *J. Comput. Phys.*, vol. 227, n° 8, p. 3921-3939, 2008.
- [13] A. S. Contribution, « Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure : application à l'étude des barrages poids en b éton Abdelghani Seghir To cite this version » :

- [14] M.O.Faltinsen, «a numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow», J. Ship Res. 22 (1978) 193-202