



16^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique

27-29 novembre 2018 - Marseille



DEVELOPPEMENT D'UNE HYDROLIENNE OSCILLANTE

DEVELOPMENT OF AN OSCILLATING TURBINE

S. COSTA⁽¹⁾, L. CHATELLIER⁽¹⁾, F. PONS⁽¹⁾, M. BA⁽¹⁾

sylvain.costa@ensma.fr ; ludovic.chatellier@univ-poitiers.fr ; frederic.pons@ensma.fr ; malick.ba@ensma.fr

⁽¹⁾ *Institut PPRIME – UPR 3346 CNRS – Université de Poitiers – ISAE-ENSMA*

Résumé

Un concept de récupérateur d'énergie oscillant entièrement entretenu par l'interaction fluide-structure est proposé dans cet article. Le principe du mécanisme repose sur l'extraction de la quantité d'énergie cinétique associée à la re-stabilisation dynamique d'un mouvement d'oscillation instable (flutter). Dans cette optique, un modèle dynamique à deux degrés de liberté est développé à partir du mouvement d'articulation d'une aile et d'un bras oscillant. La première étape du dimensionnement consiste à réaliser une oscillation auto-entretenu, de ce montage dynamique, par l'utilisation de ressorts de torsion et d'amortisseur visqueux dont les caractéristiques linéaires sont déterminées en fonction d'un modèle théorique. La puissance extraite de chaque mouvement d'oscillation auto-entretenu est ensuite estimée numériquement via des simulations CFD de façon à prendre en compte les aspects aérodynamiques et dynamiques non-linéaires. Dans cette étude, une attention particulière est portée à l'optimisation de la configuration du montage dynamique de façon à concevoir un mécanisme de récupération énergétique oscillant répondant aux besoins de sources d'énergie renouvelables alternatives.

Summary

A concept of a fully passive energy harvester driven by the current-foil interaction phenomena is proposed. The principle of this mechanism is to convert the kinetic energy of the oscillating device in flutter regime by re-stabilizing its unstable motion through energy harvesting. For that purpose, a two degrees-of-freedom dynamic system sensitive to flutter is defined by articulating an airfoil on an upstream swing-arm in an initially unstable configuration. The self-sustained oscillations of the multi body device and energy harvesting are then ensured by the use of rotational springs and dampers. In this study, functional configurations of the oscillating device are approached by a multi-physics theoretical model. The related non-linear flapping are then computed both analytically and numerically using CFD simulations. In the present article, attention is paid on the optimized self-sustained oscillations in order to design a realistic hydro-generator addressing the need for alternative renewable energy sources.

I – Introduction

La conversion, pour des fins de récupération d'énergie, de l'énergie cinétique d'un écoulement en une énergie mécanique peut être réalisée de différente manière selon le dispositif dynamique immergé dans le fluide. Généralement, les hydroliennes classiques, exploitent un mouvement de pales à rotation constante selon un axe horizontale. D'autres concepts, comme la turbine Darrieus, utilisent les mouvements de rotation selon un axe verticale. Le type de fonctionnement (portant ou à trainée différentielle) est également un aspect important à prendre en compte dans le dimensionnement de ces dispositifs. En effet, en changeant le type de fonctionnement une turbine Darrieus se convertit en turbine Savonius pour un même mouvement de rotation verticale. Pour un type de fonctionnement donné, le choix de la dynamique a un rôle primordial dans le potentiel énergétique de ces concepts dynamique. Ainsi, après une contribution à la turbine Darrieus (Gorle [1]) dans laquelle la théorie de Couchet instationnaire a permis d'identifier des lois particulières de déplacement des pales, l'attention est portée sur le développement d'un type d'hydrolienne oscillante. Dans cette catégorie de mouvement, plusieurs distinctions sont identifiées par [2] et [3]. Le présent article s'intéresse au concept d'hydrolienne oscillant exploitant uniquement les interactions fluide-structure d'un écoulement uniforme. L'analyse s'inspire des études théoriques et numériques (CFD) entreprises par Peng et Zhu [4] pour optimiser le rendement énergétique d'un dispositif mécanique conservant la stabilité dynamique d'un mouvement d'oscillation à deux degrés de liberté (translation verticale et de tangage) d'une aile rectangulaire. Bien souvent, la théorie de Theodorsen [5] est utilisée pour modéliser l'action du fluide sur un profil d'aile bidimensionnel lors d'un mouvement d'oscillation. L'application restreinte aux oscillations symétriques rend le modèle théorique basé sur la théorie de Theodorsen peu adapté à la dynamique d'interaction fluide-structure. Dans ce cas, la théorie de Couchet [6] constitue une alternative plus réaliste aux types de mouvement d'oscillation asymétrique que l'on peut rencontrer pour des systèmes dynamiques passifs aéro-élastiques. Une approche numérique (CFD) utilise ensuite cette théorie pour optimiser le rendement énergétique, de l'hydrolienne, en identifiant des dynamiques d'oscillations asymétriques adaptées à la récupération d'énergie.

II – Présentation du mécanisme de l'Hydrolienne Oscillante

La modélisation d'un modèle dynamique d'hydrolienne oscillante requiert la compréhension du phénomène d'interaction fluide-structure d'un corps profilé immergé dans un courant uniforme. Ce phénomène est généralement représenté par l'illustration du triangle de Collar dans lequel les composantes d'inertie, hydro-aérodynamique et de la structure mécaniques sont couplées pour former un système aéroélastique. Peng et Zhu [4] identifie plusieurs réponses dynamiques possible selon de la configuration géométrique et la raideur de ce système. Parmi ces réponses, l'oscillation périodique auto-entretenu par l'action du fluide est retenue pour développer un récupérateur d'énergie oscillant. Dans notre étude, le montage du dispositif dynamique de Peng et Zhu [4] est légèrement modifié pour intégrer un mouvement de balancier gouverné par la dynamique d'un bras oscillant de longueur L . Une aile rectangulaire, de masse $m_2 = 2kg$, d'envergure $s = 0.4m$, de section NACA0012 et de corde $c = 0.2m$, est reliée par une liaison cylindrique au bras oscillant sur sa corde à une distance d'excentration (b) du centre géométrique de l'aile. L'interaction fluide-structure est enfin réalisée par la réaction mécanique du système oscillant modélisée par la raideur des ressorts de torsion (k_1 et k_2) représentés par la figure 1. Pour bénéficier d'un apport énergétique continu du fluide, l'oscillateur aéroélastique doit dissiper l'instabilité dynamique du phénomène de flottement (flutter) par le biais d'amortisseurs visqueux ou de génératrices de courant. L'objet du modèle théorique est donc de déterminer le facteur d'amortissement linéaire (c_1 et c_2) nécessaire à la stabilisation du régime d'oscillation de flutter.

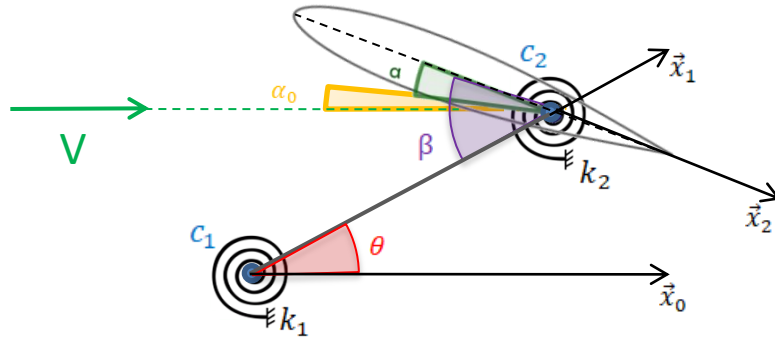


Figure 1. Schématisation d'un montage de l'hydrolienne oscillante

La puissance, associée à la re-stabilisation du phénomène instable (flutter) de l'hydrolienne oscillante, fait l'objet d'une attention particulière ici puisque cette puissance coïncide également avec la puissance utile récupérée par le convertisseur d'énergie. Le choix du mouvement d'oscillation impacte cette quantité d'énergie extraite du système. On définit $\alpha(t) = (\beta - \theta)(t) + \alpha_0$ l'angle d'incidence de l'aile au cours du déplacement aéroélastique avec $\theta(t)$ le déplacement angulaire du bras oscillant et $\beta(t)$ le déplacement angulaire de l'aile. L'interaction fluide-structure influence, quasi-systématiquement, la dynamique d'oscillation de l'aile en imposant une incidence moyenne non-nulle ($\alpha_0 \neq 0$) de l'aile.

II – 1 Modèle d'hydrodynamique instationnaire

Les efforts fluidiques instationnaires d'un profil d'aile lors d'un mouvement d'oscillation sont souvent estimés par la formulation potentielle de la théorie de Theodorsen [5]. Le présent article se distingue du développement de Peng et Zhu [4] en utilisant une généralisation de la théorie de Theodorsen : la théorie de Couchet [6]. Ce modèle prend en compte l'asymétrie ($\alpha_0 \neq 0$) des oscillations, par rapport au sens de l'écoulement, dans la formulation des efforts hydrodynamiques instationnaires. Dans une formulation potentielle, cette angle d'incidence moyenne non-nulle modifie la circulation autour du profil d'aile (Γ) telle que en moyenne $\langle \Gamma(t) \rangle = \Gamma_0 \neq 0$. De plus, l'application de la transformée conforme dans la théorie de Couchet permet de ne pas réduire systématiquement un profil d'aile en une plaque plane. Ainsi, le modèle théorique est en plus enrichi par les efforts instationnaires associés à l'épaisseur de l'aile. Ces modifications se répercutent sur l'expression des forces hydrodynamiques instationnaires et plus particulièrement sur la modélisation du sillage jusqu'alors caractérisée par la fonction de Theodorsen $C(K)$ pour une fréquence d'oscillation de l'aile adimensionnée (K). En suivant le même raisonnement, on peut définir l'expression de la fonction de Couchet $D(K, p, \alpha_0)$ qui caractérise l'action d'un sillage sur un profil d'aile épais, avec p le coefficient d'épaisseur, lors d'un mouvement d'oscillation asymétrique ($\alpha_0 \neq 0$) par rapport au sens de l'écoulement. Cet indicateur se déduit du rapport des efforts du sillage ($i\rho V\Gamma_T$), généré par une ligne d'émission tourbillonnaire, rationalisé sur les forces quasi-stationnaires ($i\rho V\Gamma$).

$$D(K, p, \alpha_0) = i\rho V\Gamma_T / i\rho V\Gamma \quad (1)$$

Soit

$$D(K, p, \alpha_0) = C(K) + pC_n(K) + i\alpha_0(-1 + C(K))$$

L'équivalence de la fonction de Couchet pour le moment hydrodynamique est

$$E(K, p) = 1 - \left(\text{Re}(C(K)) + \text{Im}(C(K)) \right) - pC_m(K)$$

avec $C_n(K)$ et $C_m(K)$ des fonctions qui caractérisent l'influence de l'épaisseur du profil d'aile sur l'action du sillage. On remarque que l'oscillation symétrique ($\alpha_0 = 0$) d'un profil d'aile réduit en une plaque plane ($p = 0$) conduit à faire tendre le modèle instationnaire de Couchet et le modèle instationnaire de Theodorsen. Dans ces expressions, ρ est associé à la masse volumique du fluide et V est la vitesse uniforme de l'écoulement. On pose ω et $K = 2a\omega/V$ respectivement la fréquence d'oscillation de l'aile et la fréquence adimensionnée. La longueur de référence a correspond au rayon du cercle de la transformée conforme utilisé pour définir la géométrie du profil d'aile. Les forces et moment instationnaires appliqués au centre du profil d'aile sont présentés dans la théorie de Couchet comme,

$$\begin{aligned} X + iY &= i\rho V(\Gamma_0 + \Gamma D(K, p, \alpha_0)) + \rho\omega I - i\rho \frac{dI}{dt} \\ M_Z &= a\rho V\Gamma E(K, p) - \rho \operatorname{Re}\left((\lambda - i\mu)I + \frac{dJ}{dt}\right) + a\rho V\Gamma_0(2p - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

avec $I = A\lambda + B\mu + C\omega$ et $J = iC(\lambda - i\mu) + P\omega$. On introduit, dans l'équation (2), la vitesse d'avancement longitudinale λ , la vitesse d'avancement transverse μ , la vitesse angulaire ω et des paramètres géométriques du profil d'aile (A , B , C et P). Dans l'équation (2), les termes proportionnels à ces vitesses sont des efforts et moment d'inerties relatifs à la masse ajoutée par le fluide sur la structure mobile, de la même manière, les termes proportionnels à la circulation moyenne (Γ_0) correspondent à la composante stationnaire des forces et moment hydrodynamiques.

II – 2 Modèle d'interaction Fluide-Structure (FSI)

Le mouvement d'oscillation de l'aile, nécessaire au processus de conversion énergétique de l'hydrolienne, peut être régi par la mécanique Newtonienne. Le système à deux degrés de liberté, illustré par la figure 1, est ici linéarisé tel que

$$\begin{aligned} I_\theta \ddot{\theta} + S_\theta \ddot{\beta} - c_1 \dot{\theta} - k_1 \theta - M_\theta &= 0 \\ I_\beta \ddot{\theta} + S_\beta \ddot{\beta} - c_2 \dot{\beta} - k_2 \beta - M_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Avec

$$I_\theta = m_1 L^2 / 4 + m_2 L^2 + m_2 (\Pi + b^2 - 2Lb \cos(\beta))$$

$$S_\theta = m_2 (\Pi + b^2 - Lb \cos(\beta))$$

$$I_\beta = m_2 (\Pi + b^2)$$

$$S_\beta = m_2 (\Pi + b^2 - Lb \cos(\beta))$$

$$M_\theta(O) = M_\beta(G) + bY - LY_1 = N_1 \ddot{\theta} + N_2 \ddot{\beta} + N_3 \dot{\theta} + N_4 \dot{\beta}$$

$$M_\beta(G) = M_Z - dY = N_5 \ddot{\theta} + N_6 \ddot{\beta} + N_7 \dot{\theta} + N_8 \dot{\beta}$$

Et Π la composante rotationnelle de la matrice d'inertie du profil d'aile, b la distance d'excentricité de l'aile par rapport au centre géométrique du profil, Y_1 la force normale appliquée sur le bras oscillant et d l'écart entre le centre géométrique (O) et le centre de gravité de l'aile (G). Le système linéaire multi-physique (3) peut être réécrit sous une forme matricielle,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0, \quad (4)$$

avec $X = [\theta, \beta]^T$. Ainsi l'interaction fluide-structure (FSI) du mécanisme d'aile oscillante immergé dans un écoulement uniforme est gouvernée par un système d'équations d'états selon le vecteur d'état $Y = [X, \dot{X}]^T$,

$$\dot{Y} = AY, \quad (5)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

Les termes en gras, dans les expressions (4) et (5), sont associés à des matrices. Ici, la simplicité des systèmes linéarisés est préférée pour l'analyse de la stabilité des oscillations à venir. En effet, la considération de systèmes faiblement perturbés, au voisinage d'un point d'équilibre, peut justifier l'approximation linéaire des équations de la dynamique. Lorsque les effets non-linéaires deviennent non-négligeables, l'analyse de la stabilité du système dynamique requière une méthode des perturbations Nayfeh [7]. D'un point de vue purement hydrodynamique, la prise en compte d'effets non-linéaires est réalisée par l'approche numérique CFD.

III – Dimensionnement d'une Hydrolienne oscillante

III – 1 Cycle Limite d'Oscillation (LCO)

La première étape nécessaire à la réalisation d'un hydrolienne oscillante passive est de déterminer les conditions structurelles adaptées à un déplacement continu, sans correction de la trajectoire, dont le mouvement oscillatoire peut être converti en énergie utile. Pour un système passif, cette conversion continue de l'énergie cinétique en énergie utile (stockable) est effectuée par un couplage aéroélastique particulier conduisant à une oscillation auto-entretenu par l'action du fluide. Ce type de dynamique est encore connu sous le terme de cycle limite d'oscillation (LCO) dans de nombreux systèmes multi-physiques. L'objet du dimensionnement est donc ici de d'identifier les paramètres géométriques (L et b), de raideur (k_1 et k_2) et d'amortissement (c_1 et c_2) compatibles avec des cycles d'oscillations périodiques. Le reste du dimensionnement consiste à optimiser le rendement énergétique de l'hydrolienne en variant ces paramètres structuraux. En se basant sur les systèmes dynamiques (4) et (5), la stabilité dynamique du mouvement d'oscillation est assurée par l'analyse de la stabilité du polynôme caractéristique associé à la matrice A du système d'état (5),

$$P(\sigma) = a_4\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0 \quad (7)$$

Avec $a_i > 0$. Pour un système dynamique avec peu de degrés de liberté, on peut définir un cycle limite d'oscillation en appliquant le critère de Routh-Hurwitz présenté dans Liu [8]. Ce critère, basé sur les propriétés du polynôme caractéristique, impose une paire de racines purement imaginaire et le reste des racines à partir réelles négatives

$$D_1 = a_1 \geq 0; \quad D_2 = a_1a_2 - a_0 \geq 0; \quad D_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_0a_3^2 = 0. \quad (8)$$

De manière à simplifier la résolution du problème, les paramètres géométriques sont fixés tels la distance d'excentration de l'aile coïncide avec la longueur du bras oscillant ($L = b = 0.076m$). De la même manière, on pose la masse du bras oscillant (m_1) comme étant identique à la masse de l'aile ($m_2 = 2kg$). La masse volumique ρ coïncide à celle de l'eau à température ambiante et l'écoulement est fixé à une vitesse uniforme $V=1m/s$. Dans ces conditions, un cycle limite d'oscillation est défini par la résolution des facteurs d'amortissement (c_1 et c_2), selon le critère de Routh-Hurwitz, pour une variation des raideurs (k_1 et k_2) associées à une incidence moyenne ($\alpha_0 \neq 0$) désirée.

III – 2 Analyse CFD des Cycles Limites d'Oscillation

Une fois la stabilité dynamique des oscillations assurée linéairement, par le biais du critère de Routh-Hurwitz, il convient d'estimer la quantité d'énergie utile extraite de chaque cycle d'oscillation. Cette étape est réalisée soit par l'analyse du modèle théorique (4) soit par une simulation numérique CFD. Ici l'approche numérique est préférée pour la prise en compte des effets non-linéaires hydrodynamiques et la dynamique non-linéaire du système oscillant. L'interaction fluide-structure du système à deux degrés de liberté est réalisée numériquement par une co-simulation FSI qui calcule simultanément le déplacement d'une aile résultant à l'application des efforts hydrodynamiques. Dans ce système multi-physique, la dynamique de l'aile est obtenue à partir de la mécanique Newtonienne tandis que la composante fluide est calculée en fonction de la résolution des équations de Navier-Stokes. Ce système d'équations est appliqué à un domaine discrétisé (maillage cylindrique de diamètre 30 fois la corde du profil) mobile entourant un profil d'aile NACA 0012 extrudé selon l'envergure de l'aile ($s = 0.4m$). Deux liaisons cylindriques, reliant le bras oscillant-aile et le bras oscillant-environnement, sont modélisées de façon à réaliser un mouvement plan à deux degrés de liberté. Cependant, contrairement à l'aile, le bras oscillant n'est pas inclus dans le maillage du domaine fluide ce qui indique que le corps n'est pas immergé dans l'écoulement. Le couplage hydro-élastique est complété, dans la co-simulation FSI, par la modélisation de ressorts de torsion et d'amortisseurs visqueux permettant un mouvement d'oscillation auto-entretenu.

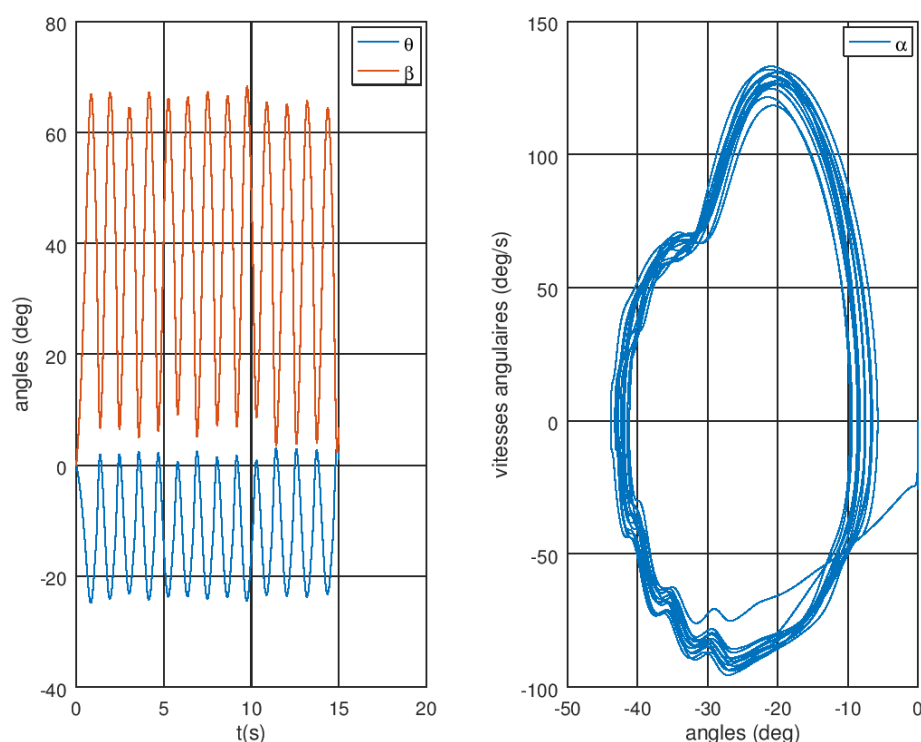


Figure 2. Diagramme temporelle et diagramme de phase des degrés de liberté (analyse CFD)

La figure 2 présente le cycle limite d'oscillation, simulé par la co-simulation FSI, obtenu à partir des paramètres de raideur ($k_1 = 8.3 \text{ Nm/rad}$ et $k_2 = 28.04 \text{ Nm/rad}$) et d'amortissement ($c_1 = 1.85 \text{ kg m}^2\text{/s}$ et $c_2 = 11.03 \text{ kg m}^2\text{/s}$) répondant au critère de Routh-Hurwitz.

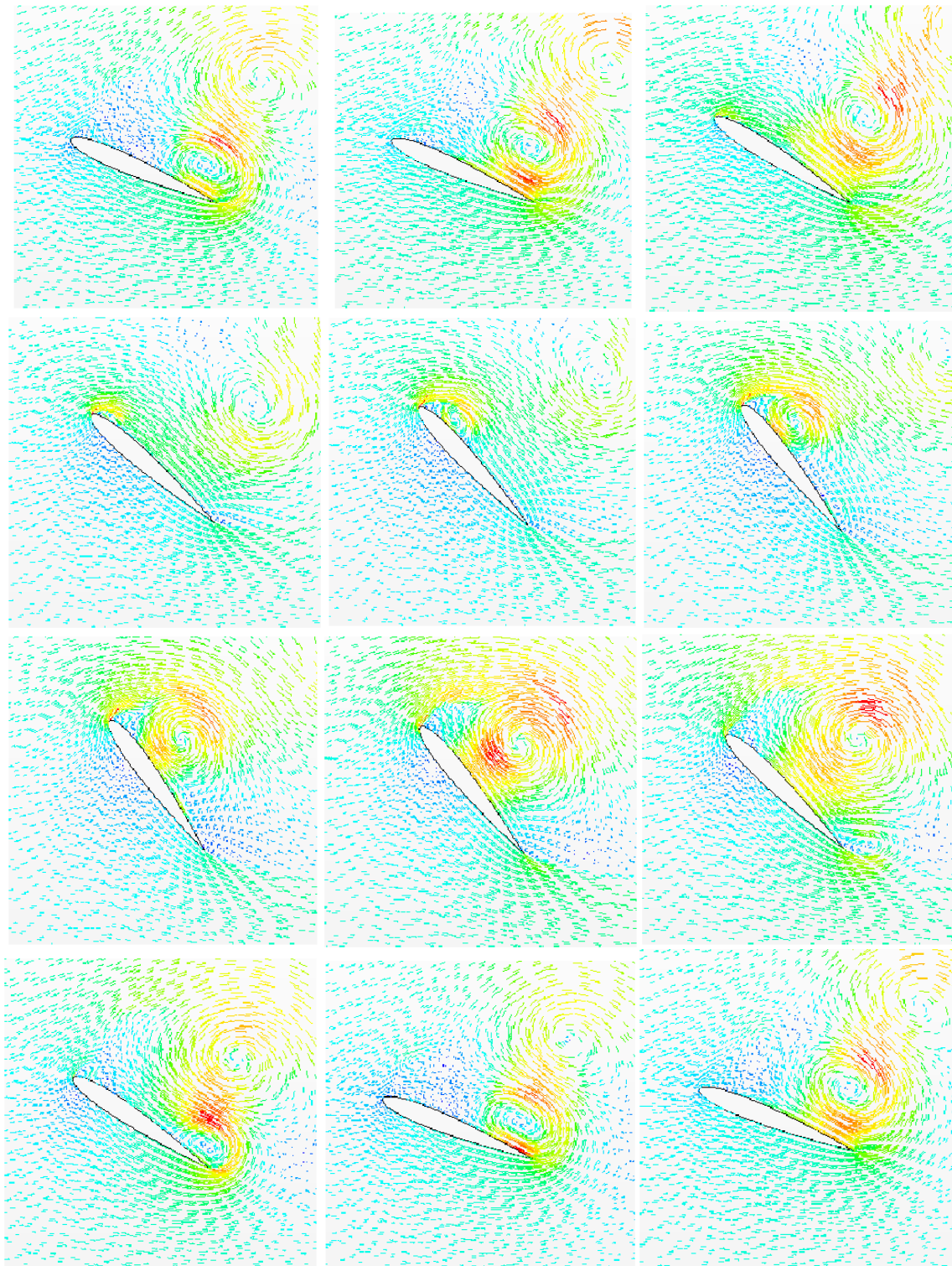


Figure 3. Champs de vitesse durant un cycle d'oscillation (analyse CFD)

La prise en compte de mécanismes hydrodynamiques non-linéaires illustrés, dans la figure 3, justifie l'utilisation de l'approche CFD pour estimer la puissance utile récupérée par l'hydrolienne. En effet, on constate que l'évolution des champs de vitesse présente la génération et l'émission d'un décrochage dynamique de tourbillons au bord d'attaque de l'aile qui ne peut pas être modélisé par la méthode potentielle de Couchet. Cependant la co-simulation FSI simule la dynamique de l'oscillation mais n'assure pas la stabilité du mouvement. Le modèle théorique de Couchet est donc ici utilisé en complément de la simulation CFD pour sélectionner et estimer numériquement des mouvements d'oscillation auto-entretenus.

III – 3 Optimisation Energétique

On recherche à optimiser le rendement énergétique de l'hydrolienne oscillante en identifiant les oscillations adaptées à la récupération d'énergie. Pour cela, on s'intéresse ici à l'asymétrie des oscillations qui sont caractérisées, dans la théorie de Couchet, par l'angle d'incidence moyen (α_0). On constate que chaque variation de cet angle moyen modifie les raideurs des ressorts de torsion (k_1 et k_2) et donc les facteurs d'amortissement (c_1 et c_2) nécessaires au respect du critère de Routh-Hurwitz. Le problème d'optimisation est donc qualifié d'unidimensionnel en fonction de la valeur de l'incidence moyenne et donc l'asymétrie de l'oscillation désirée. Les différentes configurations d'hydroliennes oscillantes sont ensuite comparées l'efficacité énergétique $\eta = \mathcal{P}/\mathcal{P}_f$, avec $\mathcal{P} = 1/T \int_0^T (c_1 \dot{\theta}^2 + c_2 \dot{\beta}^2) dt$ la puissance dissipée par les amortisseurs visqueux pendant une période T d'oscillation et $\mathcal{P}_f = \rho V^3 sh/2$ la puissance disponible dans une section h de l'écoulement. Cette section est, dans le cas d'une hydrolienne oscillante, équivalente à l'amplitude maximum du déplacement transversal à l'écoulement.

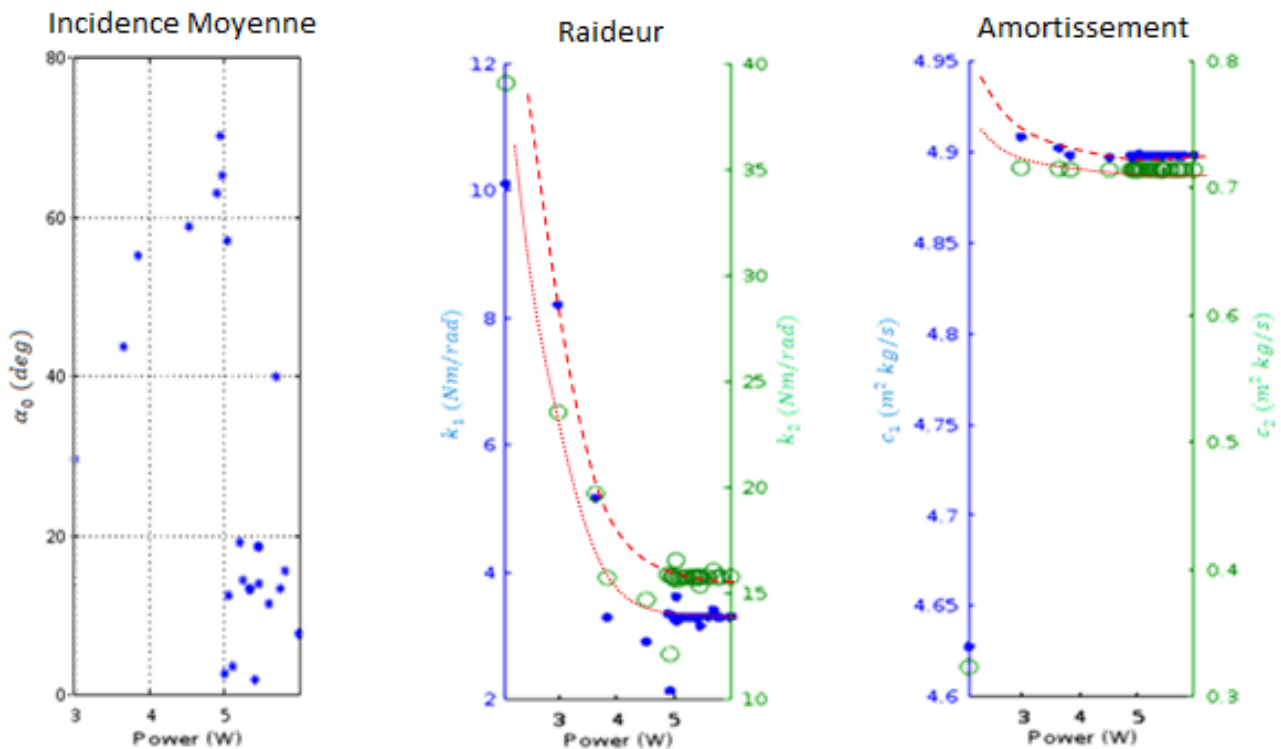


Figure 4. Evolution des raideurs et d'amortissements en fonction de l'incidence moyenne

On constate que l'asymétrie des oscillations possède un rôle déterminant dans la puissance récupérée par l'hydrolienne. La figure 4 montre que le problème d'optimisation, basé sur la valeur cible de l'incidence moyenne (α_0), converge vers une configuration de montage avoisinant une puissance extraite $\mathcal{P} = 6W$ et une efficacité $\eta = 28\%$.

IV – Conclusions

Cette approche propose le dimensionnement d'une hydrolienne oscillante passive, autonome, basée sur les interactions fluide-structure d'une aile immergée dans un écoulement uniforme. Les efforts hydrodynamiques instationnaires associés à cette interaction multi-physiques sont ici estimés numériquement par une co-simulation FSI. Cette méthode numérique couple l'approche CFD classique avec la mécanique Newtonienne de façon à déterminer le déplacement équivalent à la sollicitation hydrodynamique de l'écoulement. La stabilité dynamique de l'oscillation est assurée par un modèle théorique basé sur la théorie instationnaire de Couchet. Dans ce cas, le critère de Routh-Hurwitz est utilisé pour définir les facteurs d'amortissement, pour une configuration du dispositif donnée, de manière à imposer un cycle limite d'oscillation. Les deux approches (théorique et numérique) sont donc employées de façon complémentaires dans le dimensionnement pour aboutir à des oscillations auto-entretenues par le fluide. Le type de mouvement, et plus particulièrement l'asymétrie de l'oscillation, est utilisée pour optimiser le rendement énergétique du convertisseur énergétique. On constate que la boucle d'optimisation converge vers une solution maximisant la puissance dissipée, extraite du système dynamique par les amortisseurs visqueux. Une efficacité de 28% est déterminée à l'issue de cette optimisation. Ces résultats prometteurs sont à valider expérimentalement dans un canal hydraulique. Un prototype d'hydrolienne oscillant est en cours de conception. Les critères de fabrication sont basés sur le rendement énergétique, la facilité de conception, l'amplitude des battements d'aile et la stabilité des oscillations.

Références

- [1] Gorle, J.M.R, Chatellier, L, Pons, F & Ba, M. 2017. Operation of Darrieus turbines in constant circulation framework. *Physics of Fluids* (29), 075103.
- [2] Young, J., Lai, J.C.S. & Platzer, M.F. 2014, A review of progress and challenges in flapping foil power generation. *Progress in Aerospace Sciences* (67), pp.2–28.
- [3] Xiao, Q. & Zhu, Q. 2014, A review on flow energy harvesters based on flapping foils, *Journal of Fluids and Structures* (46), pp.174–191.
- [4] Peng, Z. & Zhu, Q. 2009, Energy harvesting through flow-induced oscillations of a foil, *Physics of Fluids* (21), 123602.
- [5] Theodorsen, T.1935, General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, *NACA Technical Report* (496), 19930090935.
- [6] Couchet, G. 1959, Etude de quelques mouvements infiniment voisins de la translation à circulation non-nulle, *Onera* (59), Paris
- [7] Nayfeh, A.H. 2004, *Perturbation methods*, Weinheim: Wiley-VCH.
- [8] Liu, W. 1994, Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (182), pp. 250-256.