



16^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique

27-29 novembre 2018 - Marseille



CENTRALE
MARSEILLE



AUDIT DES MÉTHODES SPH POUR CONSTRUIRE UN CODE D'ÉCOULEMENTS COMPLEXES DANS DES MILIEUX OUVERTS ET FERMÉS

AUDIT OF SPH METHODS TO BUILD A CODE OF COMPLEX FLOWS IN OPEN AND CLOSED SYSTEMS

M. RAMOS ORTEGA⁽¹⁾, A. BEAUDOIN⁽¹⁾, S. HUBERSON⁽¹⁾

*melissa.ramos.ortega@univ-poitiers.fr ; anthony.beaudoin@univ-poitiers.fr ;
serge.huberson@univ-poitiers.fr*

⁽¹⁾Institut Pprime, Université de Poitiers, Poitiers

Résumé

Une étude de convergence est proposée pour choisir la méthode la plus performante des trois approches SPH : WCSPH, ISPH à divergence nulle et ISPH à densité invariante. L'approche sélectionnée permettra de simuler les ondes de batillage et d'étudier leur impact dans les berges. L'écoulement dans une cavité entraînée bidimensionnelle ($100 \leq Re \leq 1000$) est pris comme benchmark. Les résultats numériques obtenus avec les trois méthodes SPH sont comparés aux résultats numériques de Ghia *et al.* [8]. La précision et la convergence des trois méthodes SPH sont évaluées avec le calcul de l'erreur de norme L_2 sur la composante horizontale U de la vitesse. La taille des particules dx , le pas de temps Δt et le temps CPU sont les paramètres étudiés. Le couplage ISPH-maillage est proposé pour obtenir une méthode SPH performante.

Summary

A convergence study is proposed to choose the most efficient method of three SPH approaches : WCSPH, free-divergence ISPH and density invariance ISPH. The selected approach will simulate the ship generated waves and will study their impact on the river banks. A 2D lid-driven cavity flow ($100 \leq Re \leq 1000$) is taken as a benchmark. The numerical results obtained with the three SPH methods are compared to the numerical results of Ghia *et al.* [8]. The accuracy and convergence of the three SPH methods are evaluated with the error of L_2 norm on the horizontal component U of the flow velocity . The particle size dx , the time step Δt and the CPU time are the parameters to be studied. ISPH-mesh coupling is proposed to obtain an efficient SPH method.

I – Introduction

L'énergie transmise par les ondes de batillage dans les berges est dissipée par la friction de l'écoulement à l'intérieur des berges. Lorsque cet écoulement interne est intense, le risque d'érosion de ces berges apparaît [7]. Les ondes de batillage peuvent alors être à l'origine de la destruction des berges. Pour connaître la stabilité des berges des canaux navigables, il faut estimer le comportement de l'écoulement à la fois dans les canaux navigables mais aussi dans les berges.

Dans la littérature, les méthodes numériques particulières Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) [14, 10] ont été utilisées pour simuler les interactions d'une onde avec un milieu poreux [9, 18]. Leur aspect lagrangien permet de modéliser des écoulements qui présentent de très fortes perturbations, comme le cas des problèmes d'impact en dynamique des fluides. Les méthodes SPH sont classées en deux familles suivant si la compressibilité du fluide est prise en compte dans l'estimation de la pression du fluide. Les méthodes SPH faiblement compressibles (WCSPH : weakly compressible SPH) utilisent une loi d'état pour évaluer la pression du fluide à partir de la densité du fluide qui peut faiblement varier. Les méthodes SPH incompressibles (ISPH : incompressible SPH) calculent la pression soit avec une formulation de divergence nulle ou avec une formulation de densité invariante.

Passant par l'estimation de la densité du fluide à partir du nuage de particules, les méthodes WCSPH doivent respecter des critères sur le nombre de particules émises et le pas de temps utilisé pour ne pas introduire d'oscillations numériques dans la pression du fluide. Pour remédier à ce problème, des améliorations ont été proposées comme l'utilisation des techniques de remaillage pour garantir une répartition uniforme des particules. Mais, les temps de calcul restent importants [12, 11, 13]. Ne passant pas par l'estimation de la densité du fluide à partir du nuage de particules, les méthodes ISPH ne sont pas confrontées à ces problèmes. Par contre, la mise en œuvre numérique de la formulation de divergence nulle ou de densité invariante coûte chère en temps CPU. Pour réduire ce temps CPU, un couplage ISPH-maillage a été proposé. L'équation de Poisson pour le calcul de pression est maintenant effectué sur une grille cartésienne, fixe et uniforme [12, 6].

L'objectif de ce travail est de faire un audit sur les méthodes particulières SPH, WCSPH et ISPH. Cela permettra de sélectionner la méthode SPH la plus robuste pour construire un code permettant de simuler les ondes de batillage et leur propagation dans les berges. Nous disposerons alors d'un modèle numérique performant permettant d'étudier l'érosion des berges des rivières sous l'effet des ondes de batillage. L'audit est basé sur une étude de convergence des trois méthodes SPH, WCSPH, ISPH à divergence nulle et ISPH à densité invariante. Un benchmark a été utilisé, l'écoulement dans une cavité entraînée.

La structure de ce papier est la suivante. Dans la section II, la formulation générale de la méthode SPH implémentée dans notre code pour résoudre les équations de Navier-Stokes est décrite, ISPH (densité invariante et divergence nulle) et WCSPH. La validation des schémas est présentée dans la section III, en comparant les résultats ISPH et WSPH avec ceux obtenus par Ghia *et al.* [8]. Finalement, les conclusions sont résumées à la section IV.

II – Présentation de la méthode

SPH est une méthode particulière lagrangienne qui est utilisée pour modéliser des milieux continus en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles associées aux lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie [14]. En CFD, elle a été initialement utilisée pour simuler des fluides compressibles et plus récemment pour simuler des écoulements incompressibles, en utilisant une approche faiblement compressible.

La description lagrangienne des lois physiques gouvernant le mouvement des fluides ou les équations de Navier-Stokes exprimées sous forme du SPH sont :

$$\frac{dr_i}{dt} = u_i, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N (u_j - u_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N (p_j + p_i) \nabla_i W_{ij} V_j + \nu K \sum_{j=1}^N \frac{(u_j - u_i) \cdot (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^2} \nabla_i W_{ij} V_j + F_i \quad (3)$$

où r_i , u_i , ρ_i et p_i sont la position, la vitesse, la masse volumique et la pression de la particule i . $V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$ est le volume de la particule i où m_i est sa masse. F_i sont les forces massiques sur la particule i . N est la quantité des particules voisines de la particule cible i à l'intérieur du support. ν est la viscosité cinématique du fluide. $K = 2(n + 2)$ est une constante où n correspond aux dimensions du problème. ∇_i est le gradient par rapport à la position r_i de la particule i . Et $W_{ij} = W(r_i - r_j, h)$ est la fonction de lissage du noyau ou fonction Kernel, où h est la longueur de lissage caractérisant la taille du support du Kernel.

II – 1 Outils basiques

II – 1.1 Technique d'interpolation

La méthode SPH modélise le domaine en le discrétisant en particules mouvantes. Dû à la nature lagrangienne de SPH, les particules sont advectées avec le flux. Chaque particule transporte une quantité physique $f_i = f(r_i)$ pour déterminer une approximation de l'évolution spatio-temporelle d'une grandeur physique. La représentation intégrale d'une fonction $f(r_i)$ décrivant cette évolution est obtenue par le produit de convolution suivant :

$$f(r_i) = \int_{\Omega} f(r) \delta(r_i - r) d\Omega \approx \int_{\Omega} f(r) W(r_i - r, h) d\Omega \quad (4)$$

où $\delta(r - r_i)$ est une fonction delta de Dirac. Cette distribution de delta de Dirac peut être remplacée par une fonction de lissage du noyau ou fonction Kernel $W(r_i - r_j, h)$, quand $h \rightarrow 0$. h est la longueur de lissage caractérisant la taille du support du Kernel et Ω est le volume de l'intégrale qui contient r .

Pour l'utilisation numérique, la représentation intégrale peut être approximée par une représentation particulière obtenue avec une sommation de l'ensemble des particules voisines placées dans le support du domaine :

$$f_i \approx \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (5)$$

Les gradients de la représentation particulaire de f_i sont obtenus par une différenciation ordinaire exprimée comme :

$$\nabla f_i \approx \sum_{j=1}^N f_j \nabla_i W_{ij} V_j \quad (6)$$

II – 1.2 Fonction Kernel

L'interpolation des particules fluides dépend de la fonction Kernel choisie. Cette dernière détermine la convergence, la stabilité et la rapidité du calcul numérique. Pour ce travail, est adoptée une fonction Kernel W_{ij} basée sur des fonctions splines, en particulier une spline cubique proposée par Monaghan [13], définie comme :

$$W_{ij} = \frac{\sigma}{h^n} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & 0 \leq s < 1, \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & 1 \leq s < 2, \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad \text{avec } s = \frac{|r_i - r_j|}{h} \quad (7)$$

où σ est une constante de normalisation qui dépend des dimensions de l'espace, $\sigma = \frac{10}{7\pi}$ pour les cas bidimensionnels.

II – 1.3 Remaillage

La précision des approximations des opérateurs est conditionnée par l'espacement uniforme des particules. Cette distribution uniforme n'est pas garantie pendant la durée des simulations mais seulement dans l'instant initial. Les particules ont tendance à s'agglomérer dans les zones de forts gradients, d'où l'hétérogénéité de la distribution des particules et les approximations erronées des opérateurs.

Pour limiter la distorsion des particules, la technique de remaillage est utilisée. Elle consiste en une réinitialisation périodique de la position des particules r_i sur une grille régulière d'un espacement dx (comme dans les méthodes de grilles). Ensuite, elle interpole les grandeurs physiques f (comme la masse, l'impulsion et l'énergie) sur les nouvelles positions \tilde{r} , assurant que les lois de conservation soient satisfaites.

L'interpolation de f sur les nouvelles positions est dénotée \tilde{f} . Elle est calculée comme :

$$f(\tilde{r}_i) = V_i \sum_{j=1}^N f(r_j) M'_4(\tilde{r}_i - r_j, dx). \quad (8)$$

Dans cette recherche, les interpolations ont été faites en utilisant une fonction de lissage du troisième ordre M'_4 [13] :

$$M'_4(\tilde{r}_i - r_j, dx) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s^3 & 0 \leq s < 1, \\ \frac{1}{2}(2-s)^2(1-s) & 1 \leq s < 2, \\ 0 & s \geq 2. \end{cases} \quad \text{avec } s = \frac{|\tilde{r}_i - r_j|}{dx}. \quad (9)$$

II – 2 WCSPH : SPH faiblement compressible

II – 2.1 Équation d'état

WCSPH est une méthode pseudo-compressible introduite par Monaghan [14]. Dû à l'état compressible de la méthode, la divergence de la vitesse de l'équation (2) a une valeur non nulle [12]. Les précédentes équations différentielles sont complétées par une équation d'état artificielle qui évalue le champ de pression p à travers la masse volumique de fluide ρ sous une contrainte d'incompressibilité [3] :

$$p_i(\rho) = p_0 + c_0^2 (\rho_i - \rho_0) \quad (10)$$

où c_0 est la vitesse du son déterminée par $c_0 = 100 u_{max}$, avec u_{max} comme la vitesse maximale de l'écoulement. Et ρ_0 est la masse volumique initiale du fluide. Pour modéliser les écoulements à surface libre, l'équation de Tait introduit moins de variations de densité [2]. Si la pression atmosphérique est négligée, l'équation de Tait est réduite à :

$$p_i = p_0 + \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (11)$$

avec $\gamma = 7$ pour l'eau.

II – 2.2 Réinitialisation de la masse volumique

Pour éviter les oscillations du champ de pression, une réinitialisation périodique de la densité de chaque particule est proposée [5]. Cette correction de la densité est requise lorsqu'une particule est proche de la surface de l'eau ou proche aux bornes du domaine :

$$\bar{\rho}_i = \sum_{j=1}^N \rho_j \bar{W}_{ij} \nu_j = \sum_{j=1}^N m_j \bar{W}_{ij} \quad (12)$$

où $\bar{\rho}_i$ est la nouvelle densité de la particule i . \bar{W}_{ij} est la fonction Kernel corrigée en appliquant un filtre de Shepard d'ordre zéro [16] pendant une fréquence de filtre définie :

$$\bar{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{j=1}^N W_{ij} \nu_j}. \quad (13)$$

II – 3 ISPH : SPH incompressible

II – 3.1 Méthode de projection

Les méthodes ISPH ont été créées pour simuler des écoulements complètement incompressibles. Elles sont basées sur la méthode de projection introduite par Chorin [3] où le champ de pression est résolu en utilisant une équation de Poisson afin d'imposer l'incompressibilité.

L'incompressibilité n'implique aucune variation volumétrique. La densité et la masse sont constantes, le champ de vitesse doit être exempt de divergence [6]. Pour la méthode ISPH à densité invariante, une invariance de la masse volumique du fluide est imposée dans la méthode de projection [17].

1. La position des particules r_i^n est advectée à une position intermédiaire r_i^* à une vitesse u_i^n en utilisant :

$$r_i^* = r_i^n + u_i^n \Delta t. \quad (14)$$

2. Une vitesse intermédiaire u_i^* est calculée à la position r_i^* en considérant seulement les forces visqueuses et les forces massiques F_i^n de l'équation du momentum :

$$u_i^* = u_i^n + (\nu \nabla^2 u_i^n + F_i^n) \Delta t. \quad (15)$$

3. Une masse volumique intermédiaire ρ_i^* est calculée à la position r_i^* en utilisant une technique d'interpolation :

$$\rho_i^* = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}. \quad (16)$$

4. Le champ de pression p_i^{n+1} est calculé avec l'équation de Poisson en imposant, soit une condition de divergence nulle, soit une invariance de densité :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i^{n+1} \right)_i = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot u_i^* \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_i^*} \nabla p_i^{n+1} \right)_i = \frac{\rho_i^0 - \rho_i^*}{\rho_i^0 \Delta t^2}. \quad (17)$$

5. La vitesse u_i^{n+1} est obtenue avec la projection de la vitesse intermédiaire u_i^* . Le gradient de pression est ajouté pour obtenir le champ de vitesse à divergence nulle :

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i^{n+1} \right) \Delta t. \quad (18)$$

6. Les particules sont advectées à la nouvelle position r_i^{n+1} :

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \left(\frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2} \right) \Delta t. \quad (19)$$

II – 3.2 Couplage SPH-maillage

Dans le cas des méthodes SPH pour la simulation des écoulements incompressibles, le calcul du champ de pression avec l'équation de Poisson est plus précis qu'avec une loi d'état. Cependant, les méthodes ISPH sont plus coûteuses en temps de calcul CPU. Il est nécessaire d'inverser l'opérateur $\nabla (1/\rho \nabla)$ par un processus itératif et de calculer le second élément de l'équation de Poisson.

La taille du noyau du support h définit la quantité de particules à évaluer. Elle est proportionnelle au temps du calcul CPU. L'utilisation de la méthode PIC (Particle in cell) [4] permet d'accélérer le temps de calcul de l'équation de Poisson sur les particules. Dans cette approche, l'équation de Poisson est calculée sur une grille cartésienne en utilisant un solveur de différentiation classique [12]. Les vitesses intermédiaires u_i^* (Eq. 15) sont projetées sur les nœuds de la grille cartésienne. Le champ de pression est calculé sur la même grille cartésienne, puis interpolé sur les particules.

III – Resultats numériques

Les trois méthodes SPH présentées dans ce papier ont été appliquées à un benchmark qui a été étudié dans la littérature : l'écoulement dans une cavité entraînée ($100 \leq Re \leq 1000$). Les résultats de ce benchmark sont très proches des observations physiques des écoulements dans les canaux et les berges. En raison de zones de recirculation, ce benchmark rend difficile le calcul des trajectoires de particules et indirectement la densité.

Des résultats numériques de référence ont été obtenus avec une méthode implicite et une technique multigrille utilisées par Ghia *et al.* [8]. Elles permettent de valider et de contrôler les trois méthodes SPH. L'évolution temporelle de l'erreur de norme L_2 permet d'évaluer la précision et la convergence des trois méthodes SPH. Elle est calculée selon :

$$L_2(U) \text{ error} = \sqrt{\left(\frac{\sum_i^N (U_{i,ref} - U_{i,SPH})^2}{\sum_i^N U_{i,ref}^2} \right)} \quad (20)$$

où $U_{i,ref}$ et $U_{i,SPH}$ sont la composante horizontale du champ de vitesse calculée avec la solution de référence et avec les trois méthodes SPH pour chaque particule i , respectivement.

III – 1 Écoulement en cavité entraînée

Deux nombres de Reynolds, $Re = \frac{U_c L}{\nu} = 100$ et 1000 , ont été simulés. Le domaine fluide est une cavité carrée bidimensionnelle de $L \times L = 1m \times 1m$, où la paroi supérieure se déplace vers la droite à une vitesse $U_c = 1m/s$. La masse volumique du fluide est $\rho = 1kg/m^3$. À l'aide des trois méthodes SPH, les champs de vitesse et de pression ont été résolus.

La Figure 1 (ci-dessous) montre les résultats numériques de la composante horizontale U du champ de vitesse. La ligne pointillée représente les résultats obtenus par Ghia *et al.* [8]. Les lignes continues sont les résultats des trois méthodes SPH.

L'espacement initial des particules est $dx = 0,01m$ et les profils de vitesse sont pris à $x = 0,5m$. Les simulations numériques durent $t = 1s$ et les résultats sont pris à la fin des simulations. En utilisant une fonction de remaillage toutes les 4 itérations et une réinitialisation de la masse volumique à chaque itération, une bonne approximation des trois méthodes est alors obtenue.

III – 1.1 En fonction de l'espacement des particules dx

La Figure 2 montre une comparaison du logarithme de l'erreur de norme L_2 sur la composante horizontale U de la vitesse en fonction du logarithme de la taille des particules dx pour les trois méthodes SPH, WSPH et ISPH. Les deux nombres de Reynolds, $Re = 100$ et 1000 , sont simulés avec un pas de temps $dt = 0,0001s$. Avec l'incrément de la taille des particules, l'erreur des méthodes ISPH reste similaire entre elles avec une pente inférieure de celle de la méthode WCSPH. L'erreur augmente quand la taille des particules augmente. Pour le cas de $Re = 1000$, à $dx = 0,04m$, l'erreur pour ISPH est de 25 % et pour WCSPH de 60 %.

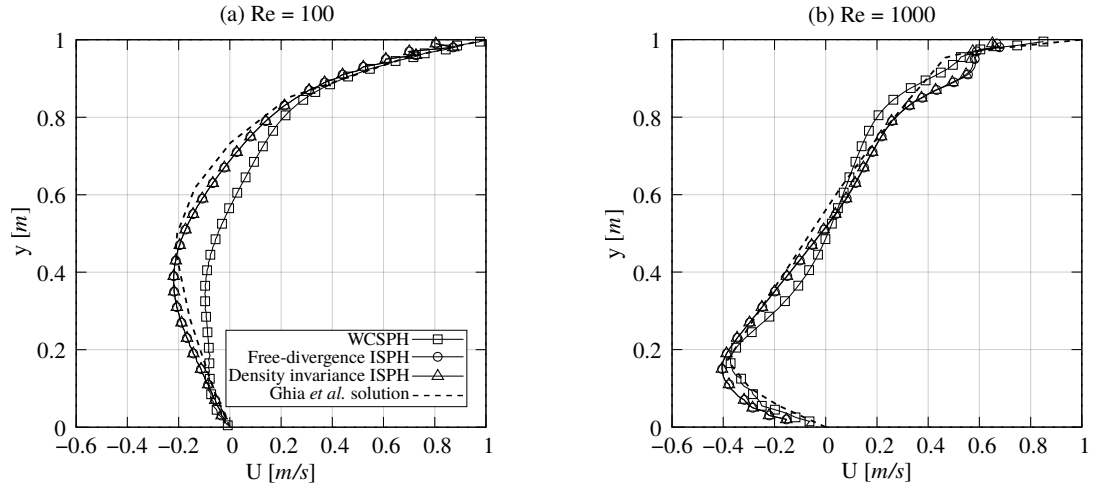


FIGURE 1 – Profil de la composante horizontale U de la vitesse pour le cas de la cavité entraînée avec deux nombres de Reynolds, $Re = 100$ et 1000 .

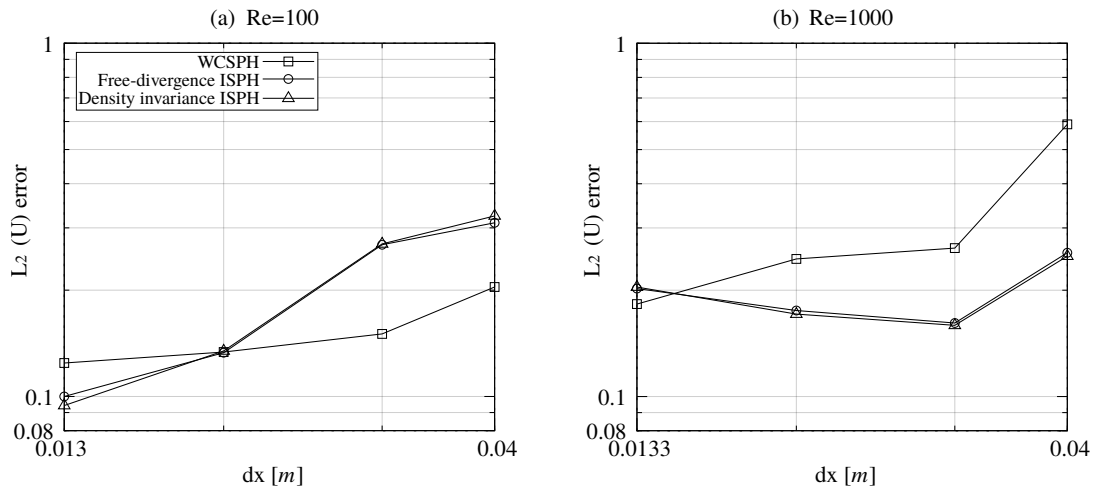


FIGURE 2 – Logarithme de l'erreur de norme L_2 sur la composante horizontale U de la vitesse en fonction du logarithme de la taille des particules dx pour deux nombres de Reynolds, $Re = 100$ et 1000 , avec un pas de temps $dt = 0,0001s$.

III – 1.2 En fonction du pas de temps Δt

La convergence des simulations numériques dépend fortement du pas de temps Δt choisi. La Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) permet d'établir le pas de temps Δt pour assurer la convergence et la stabilité du calcul [19]. La Figure 3 montre le logarithme de l'erreur de norme L_2 sur la composante horizontale U de la vitesse en fonction du logarithme du pas de temps Δt pour les trois méthodes SPH avec $dx = 0,02m$ et $Re = 100$. Les valeurs de l'erreur pour les méthodes ISPH sont inférieures à celles de la méthode WCSPH. Les méthodes ISPH présentent à peu près le même comportement. Leur erreur est presque constante pour toutes les valeurs de pas de temps Δt . Par contre pour la méthode WCSPH, l'erreur augmente à partir de sa valeur limite de condition CFL, calculée par :

$$\Delta t \leq \lambda \min \left(\frac{h}{c_0}, \frac{h^2}{\nu} \right) \quad (21)$$

où λ est une constante égal à 0.25. Dans le cas de $Re = 100$, avec $\Delta t = 0,002s$, l'erreur est d'environ 15% et de 35% pour ISPH et WSPH, respectivement. Ces résultats démontrent l'avantage de la formulation ISPH.

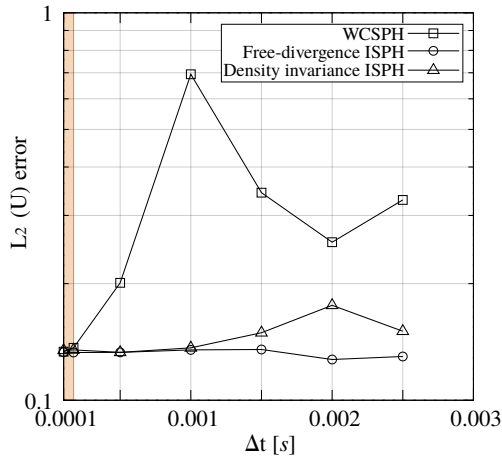


FIGURE 3 – Logarithme de l'erreur de norme L_2 sur la composante horizontale U de la vitesse en fonction du pas de temps Δt avec $dx = 0,02m$ et $Re = 100$.

III – 1.3 En fonction du pas de temps CPU

La Figure 4 montre le temps de calcul CPU en fonction de la taille des particules dx simulée pour les trois méthodes SPH pour $Re = 100$. Deux valeurs de pas de temps ont été analysées, $\Delta t = 0,0001s$ et $0,001s$. WCSPH est plus rapide que ISPH. ISPH à densité invariante est la plus rapide des deux méthodes ISPH. Un processeur Intel(R) Core(TM) i7-4800MQ CPU 2.70 GHz a été utilisé.

Les temps d'exécution pour 1s simulé sont de 100 min pour WCSPH, 190 min pour ISPH à densité invariante et de 230 min pour ISPH à divergence nulle. La solution de l'équation de Poisson prend un temps de simulation plus élevé que pour WCSPH dû aux processus itératifs pour obtenir l'inverse de la matrice de l'opérateur de Laplace. Cependant, les méthodes ISPH sont beaucoup plus stables que le WCSPH. Alors, il est

possible d'augmenter les valeurs des paramètres du code (la taille des particules dx et le pas de temps Δt) pour réduire le temps CPU sans affecter la convergence du calcul.

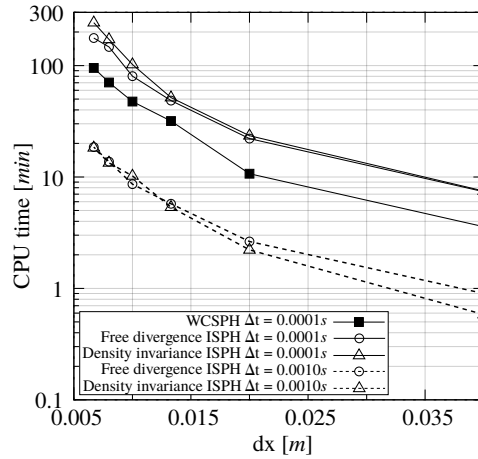


FIGURE 4 – Logarithme du temps CPU en fonction de la taille des particules dx pour $Re = 100$ et différents valeurs de pas de temps Δt .

IV – Conclusions et perspectives

Cette étude de convergence a permis d'identifier l'approche la plus robuste parmi les méthodes ISPH. La méthode ISPH à divergence nulle a été choisie pour continuer la modélisation du ballotement. Les erreurs de norme L_2 sur la composante horizontale de la vitesse U sont restées presque constantes quand la taille des particules dx et le pas de temps Δt sont variés. Il est alors possible d'utiliser des grandes valeurs des paramètres et d'obtenir une bonne convergence du calcul à plus bas temps CPU.

L'interaction entre les ondes de batillage et les berges ont été étudiés récemment par Chong *et al.*[15] et par Akbari [1] en utilisant la méthode ISPH à divergence nulle. Dans le premier, un code SPH multiphasique est implémenté où la porosité du milieu est considérée variable spatialement et temporairement. Dans le deuxième, une structure poreuse multicouche est analysée avec l'implémentation d'une méthode SPH (MMPP). Les effets turbulents dedans et autour du milieu poreux sont aussi considérés pour améliorer la précision des résultats. Ces travaux donnent les bases pour construire le code que simulera les ondes de batillage et leur propagation dans les berges avec la méthode ISPH à divergence nulle.

Références

- [1] H. Akbari. Modified moving particle method for modeling wave interaction with multi layered porous structures. *Coastal Engineering*, 89 :1–19, 2014.
- [2] M. Becker and M. Teschner. Weakly compressible sph for free surface flows. In *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 209–217. Eurographics Association, 2007.
- [3] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 2(1) :12–26, 1967.

- [4] I. Christiansen. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *Journal of Computational Physics*, 13(3) :363–379, 1973.
- [5] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of computational physics*, 191(2) :448–475, 2003.
- [6] S. J. Cummins and M. Rudman. An sph projection method. *Journal of computational physics*, 152(2) :584–607, 1999.
- [7] R. G. Dean and R. A. Dalrymple. *Coastal processes with engineering applications*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*, 48(3) :387–411, 1982.
- [9] Q. Gui, S. Shao, and P. Dong. Wave impact simulations by an improved isph model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 140(3), 2013.
- [10] G.-R. Liu and M. B. Liu. *Smoothed particle hydrodynamics : a meshfree particle method*. World Scientific, 2003.
- [11] M. Liu and G. Liu. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Applied numerical mathematics*, 56(1) :19–36, 2006.
- [12] H. Machrouki. *Incompressibilité et conditions aux limites dans la méthode Smoothed particle hydrodynamics*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2012.
- [13] J. Monaghan. Extrapolating b splines for interpolation. *Journal of Computational Physics*, 60(2) :253–262, 1985.
- [14] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30(1) :543–574, 1992.
- [15] C. Peng, G. Xu, W. Wu, H.-s. Yu, and C. Wang. Multiphase sph modeling of free surface flow in porous media with variable porosity. *Computers and Geotechnics*, 81 :239–248, 2017.
- [16] M. K. Pitt and N. Shephard. Filtering via simulation : Auxiliary particle filters. *Journal of the American statistical association*, 94(446) :590–599, 1999.
- [17] S. Shao and E. Y. Lo. Incompressible sph method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface. *Advances in water resources*, 26(7) :787–800, 2003.
- [18] H. Wen, B. Ren, and G. Wang. 3d sph porous flow model for wave interaction with permeable structures. *Applied Ocean Research*, 75 :223–233, 2018.
- [19] X. Xu and X.-L. Deng. An improved weakly compressible sph method for simulating free surface flows of viscous and viscoelastic fluids. *Computer Physics Communications*, 201 :43–62, 2016.