



15^{ÈMES} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22 - 24 novembre 2016 - Brest

MODELISATION NON-LINEAIRE DE PROPAGATION DE HOULE SUR UN FOND VARIABLE TRIDIMENSIONNEL

NON LINEAR WAVE PROPAGATION OVER A 3D VARIABLE BATHYMETRY

M. Gouin^{(1),(2)}, G. Ducrozet⁽¹⁾, and P. Ferrant⁽¹⁾

⁽¹⁾Ecole Centrale Nantes, LHEEA Lab., UMR CNRS 6598, Nantes, France

⁽²⁾Institut de Recherche Technologique Jules Verne, Bouguenais, France

Résumé

L'objectif de ce papier est de montrer les capacités du modèle HOS développé au LHEEA (ECN, Nantes) à modéliser la propagation de houle sur un fond variable tridimensionnel. Le modèle HOS initial est un modèle pseudo-spectral résolvant le problème non-linéaire complet surfacique avec un fond plat ou supposé infini. De récents développements ont permis d'étendre ce modèle à la prise en compte d'un fond 2D variable en espace. Des validations bidimensionnelles ont déjà été présentées. Ici, nous nous intéressons à l'écriture de la méthode en formalisme 3D. Le cas test tridimensionnel de propagation de houle au-dessus d'une ellipsoïde immergée a été choisi afin de démontrer l'efficacité du modèle développé et des comparaisons aux expériences sont présentées.

Summary

This paper deals with the validation of the HOS model for wave propagation over a 3D variable bottom. A fully non-linear High-Order Spectral (HOS) model, already developed for a flat bottom in the LHEEA Lab of Ecole Centrale de Nantes, has been expanded to a variable bottom. This model is an accurate and efficient method thanks to the surface formulation coupled with the spectral resolution. Validations in 2D have already been presented and here we focus on the three dimensional problem by presenting wave focusing of regular and irregular waves over an elliptical mound. Several comparisons with experiments are included.

1 Introduction

Afin de pouvoir dimensionner correctement les structures en mer, de connaître leurs conditions de survie ou bien leur efficacité (par exemple le rendement des systèmes de récupération d'énergie), le calcul des interactions entre la houle et ces structures diverses présentes en mer ou à la côte par des techniques numériques est aujourd'hui indispensable.

La modélisation précise de la houle est la première étape dans la détermination des interactions fluide/structure. On s'intéressera dans ce papier plus spécifiquement à la propagation sur un fond variable tridimensionnel, où les dispositifs d'énergies marines renouvelables ont vocation à s'implanter. Lors de la propagation sur un tel fond, des interactions non-linéaires entre les différentes composantes de la houle entrent en jeu, ainsi que des interactions avec le fond. Cela se traduit par la génération d'ondes libres et d'ondes liées, qui ne sont pas reproduites par une théorie linéaire. Un modèle non-linéaire est donc nécessaire afin de reproduire précisément la houle se propageant dans des zones de profondeur variable.

Dans ce cadre, le projet de recherche «SimAvHy» (Simulation Avancée en Hydrodynamique), porté par l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne, en partenariat avec le LHEEA, ALSTOM, Bureau Veritas, DCNS et STX, s'intéresse au développement de modèles numériques avancés en vue de créer la prochaine génération d'outils de simulation déterministe du génie océanique. Au sein de ce projet, les travaux de recherche ont pour objectif le développement d'une méthode numérique permettant la simulation déterministe d'états de mer à grande échelle dans des zones géographiques où la profondeur d'eau est limitée et variable en espace. L'intérêt est de modéliser plus finement la propagation de la houle près des côtes.

La méthodologie développée consiste à enrichir un modèle pseudo-spectral, appelé HOS (High-Order Spectral), initié par Dommermuth et Yue [6] et West *et al.* [19], et développé à l'Ecole Centrale de Nantes par le LHEEA depuis 2003 et qui a fait l'objet de nombreuses thèses (notamment Le Touzé [13], Bonnefoy [3] et Ducrozet [8]). Il modélise la propagation d'états de mer de façon déterministe, dans des domaines de grande dimension (jusqu'à $100km^2$) et présentant une profondeur constante. Il permet la résolution du problème non-linéaire complet et a été largement validé et appliqué à la propagation d'états de mer en profondeur constante, arbitraire dans des domaines supposés infinis dans le plan horizontal. Le choix du modèle HOS et son placement au sein des différentes méthodes existantes a été documenté dans Gouin [9]. L'extension 2D de la méthode HOS à un fond variable, inspirée notamment des travaux de Liu et Yue [14], Craig *et al.* [5] et Guyenne et Nicholls [12] est donnée en détails dans Gouin *et al.* [11] et sera brièvement introduite en 3D dans ce papier. Les aspects relatifs au temps de calcul du modèle HOS, et le surcoût introduit par la prise en compte du fond variable sont disponibles dans la thèse de Gouin [9].

Les validations bidimensionnelles ayant déjà été largement traitées (c.f. Gouin *et al.* [11]), l'objectif de ce papier est donc de présenter des applications tridimensionnelles. Nous nous intéressons au cas de propagation de houles régulières et irrégulières au dessus d'un fond elliptique. Ces cas de validations sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles (Vincent et Briggs [18]). On montre ainsi que le modèle HOS est très précis et efficace pour reproduire des houles régulières et irrégulières sur une bathymétrie 3D.

2 Présentation de la méthode

L'objectif de cette partie est de présenter la résolution du problème tridimensionnel avec un fond variable en espace. Le système d'équations est présenté ainsi que les grandes étapes de calcul de la vitesse verticale, coeur de la méthode HOS.

2.1 Hypothèses

Nous nous plaçons ici, dans un domaine 3D, défini par les axes horizontaux x et y et l'axe vertical z (vers le haut), comme présenté sur la Fig.1. La fonction $z = \eta(x, y, t)$ décrit la position de la surface libre. L'axe z est défini de telle manière que $z = 0$ représente le niveau moyen pour lequel il n'y ait pas de perturbation de la surface libre. On se place, classiquement, dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels en supposant le fluide incompressible, non-visqueux et l'écoulement irrotationnel. Le champ de vitesse \vec{V} dérive d'un potentiel ϕ appelé potentiel de vitesse : $\vec{V} = \text{grad}(\phi)$. L'ensemble des effets visqueux (frottements sur le fond, dissipation interne, dissipation à l'interface air/eau) est donc négligé. D'autre part, le caractère irrotationnel impose de négliger le déferlement. On suppose que $h(x, y)$ représente la profondeur totale d'eau, h_0 la profondeur de référence et $\beta(x, y)$ la variation du fond autour de h_0 : $h(x, y) = h_0 + \beta(x, y)$. Aucune hypothèse intrinsèque ne découle de cette décomposition. Une vue schématique du domaine de calcul ainsi défini est présentée sur la Fig.1. A noter qu'on se restreint ici à des fonds constants au cours du temps. Il serait envisageable d'étendre la méthode à des cas de mouvements de fond, comme cela a été réalisé avec la méthode DNO (c.f. Guyenne et Nicholls [12]) dont le formalisme est similaire à la méthode HOS d'après Le Touzé [13] et Schäffer [17].

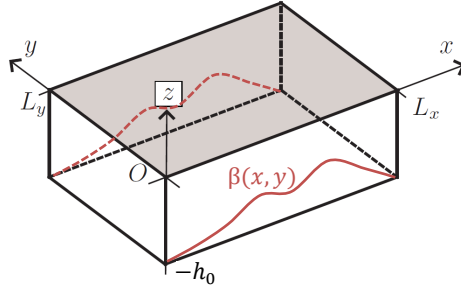


FIGURE 1 – Description du domaine rectangulaire avec une profondeur moyenne h_0 et une variation de fond $\beta(x, y)$.

2.2 Système d'équations

Avec les hypothèses réalisées ci-dessus, le système d'équations à résoudre est le suivant :

— Conservation de la masse :

$$\Delta\phi = 0 \quad (1)$$

— Condition au fond :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x, y) \quad (2)$$

— Condition Cinématique de Surface Libre (CCSL) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3)$$

— Condition Dynamique de Surface Libre (CDSL) :

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (4)$$

— Conditions de périodicité dans les directions horizontale x et verticale y :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x + L_x, y) &= \tilde{\phi}(x, y) \\ \tilde{\phi}(x, y + L_y) &= \tilde{\phi}(x, y) \\ \eta(x + L_x, y) &= \eta(x, y) \\ \eta(x, y + L_y) &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

Le problème est ainsi exprimé au niveau de la surface libre dans les deux conditions de surface libre (Eq.(3) et Eq.(4)). Le problème initial 3D est donc transformé en un problème 2D. Ces équations peuvent être avancées en temps à condition de connaître la vitesse verticale $W(x, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, z = \eta(x, t), t)$, seule inconnue du système précédent (Eq.(3) et Eq.(4)). Le coeur de la méthode HOS permet d'évaluer la vitesse verticale en connaissant η et $\tilde{\phi}$.

2.3 Expression du potentiel des vitesses

La première étape dans le calcul de la vitesse verticale W consiste à réaliser un développement de Taylor du potentiel autour de la position moyenne de la surface libre $z = 0$. On obtient alors un premier système triangulaire :

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, 0, t) &= \tilde{\phi}(x, y, t) \\ \phi^{(2)}(x, y, 0, t) &= -\eta(x, y, t) \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}(x, y, 0, t) \\ &\dots \\ \phi^{(m)}(x, y, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(x, y, t) \frac{\partial^k\phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(x, y, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

On exprime alors le potentiel total $\phi = \phi_{tot}$ comme la somme de $\phi_{h_0}^{(m)}(x, y, z, t)$ et $\phi_{\beta}^{(m)}(x, y, z, t)$:

$$\phi_{h_0}^{(m)}(x, y, z, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_{ij}(z + h_0))}{\cosh(k_{ij}h_0)} e^{ik_{x_i}x + ik_{y_j}y} \quad (7)$$

$$\phi_\beta^{(m)}(x, y, z, t) = \sum_i \sum_j B_{ij}^{(m)}(t) \frac{\sinh(k_{ij}z)}{\cosh(k_{ij}h_0)} e^{ik_{x_i}x + ik_{y_j}y} \quad (8)$$

Avec $k_{x_i} = \frac{i 2\pi}{L_x}$, $k_{y_j} = \frac{j 2\pi}{L_y}$ et $k_{ij} = \sqrt{k_{x_i}^2 + k_{y_j}^2}$.

On peut alors calculer les amplitudes modales B_{ij} à l'aide de la méthode présentée dans le paragraphe suivant.

2.4 Méthode itérative originelle

On s'intéresse à l'approche proposée dans Liu et Yue [14] permettant de prendre en compte une bathymétrie variable dans le modèle HOS. Comme dans le formalisme fond plat, un développement de Taylor de $z = \eta$ autour de $z = 0$ est réalisé, auquel un deuxième développement est ajouté mais cette fois-ci de $z = -h_0 + \beta$ autour de $z = -h_0$. L'ordre de troncature M est identique à l'ordre de troncature sur la surface libre. Avec la méthode itérative originelle, le potentiel ϕ_β est finalement exprimé par :

$$\begin{aligned} m = 1 : \frac{\partial \phi_\beta^{(1)}}{\partial z}(x, y, -h_0, t) &= 0 \\ m = 2, \dots, M : \frac{\partial \phi_\beta^{(m)}}{\partial z}(x, y, -h_0, t) &= \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left(\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x} \right)^{(m-l)} \right]_{z=-h_0} \\ &+ \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left(\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial y} \right)^{(m-l)} \right]_{z=-h_0} \end{aligned} \quad (9)$$

Ce nouveau développement (9) combiné avec les Eqs.(7, 8) permet de calculer directement les amplitudes modales $B_j^{(m)}(t)$ à chaque ordre, en fonction des $A_j^{(m)}(t)$, indépendamment de la position x (la formule est donnée ci-dessous et les détails sont disponibles dans Gouin [9]). Les FFTs peuvent donc être utilisées, permettant ainsi a priori de conserver l'efficacité numérique du modèle HOS initial. En écrivant que $k_{ij} B_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^{m-1} k_{ij} B_{ij}^{(l)}$, on obtient la formule suivante pour le calcul des amplitudes modales dues au fond à chaque ordre :

Pour l pair :

$$k_{ij} B_{ij}^{(l)} = -i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} - i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} + \frac{\beta^l}{l!} B_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \quad (10)$$

Pour l impair :

$$\begin{aligned} k_{ij} B_{ij}^{(l)} &= i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} A_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) - i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} \tanh(k_{ij}h_0) \\ &+ i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} A_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) - i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} \tanh(k_{ij}h_0) \\ &- \frac{\beta^l}{l!} A_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) + \frac{\beta^l}{l!} B_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \tanh(k_{ij}h_0) \end{aligned} \quad (11)$$

Dans les deux formules précédentes Eq.(10) et Eq.(11), les calculs sont réalisés dans l'espace modal, sauf pour les multiplications par les grandeurs $\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!}$ et $\frac{\beta^l}{l!}$ qui sont réalisées dans l'espace physique. Des FFTs sont utilisées pour passer d'un espace à l'autre. Les amplitudes modales $B_{ij}^{(m)}$ sont donc déterminées à chaque ordre m en fonction des amplitudes modales $A_{ij}^{(l)}$ et $B_{ij}^{(l)}$ aux ordres précédents (l varie de 1 à $m-1$). A chaque ordre m , les A_{ij} et B_{ij} calculées aux ordres précédents sont donc utilisées. Le lecteur remarquera qu'avec ce nouveau formalisme, les ordres de non-linéarité au fond et à la surface libre sont identiques. Une autre méthode (appelée méthode améliorée) a été développée afin de pouvoir choisir indépendamment les ordres de non-linéarité sur la surface libre et sur le fond mais n'est pas présentée ici car les cas test présentés dans ce papier peuvent être traités de manière efficace avec la première méthode.

2.5 Calcul de la vitesse verticale W

Une fois les amplitudes modales B_{ij} déterminées à chaque ordre m avec la méthode originelle, on peut calculer la vitesse verticale W grâce au deuxième système triangulaire :

$$\begin{aligned} W^{(1)}(x, y, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, y, 0, t) \\ W^{(2)}(x, y, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(2)}}{\partial z}(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z^2}(x, y, 0, t) \\ &\dots \\ W^{(m)}(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} (x, y, t) \frac{\partial^{k+1} \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, y, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Ainsi, les conditions de surface libre Eq.(3) et Eq.(4) peuvent être avancées en temps et l'on peut calculer les amplitudes modales A_{ij} au pas de temps suivant.

2.6 Bilan et mise en oeuvre

Nous avons donc présenté dans cette partie une méthode de résolution en fond variable qui conservent *a priori* l'efficacité de la méthode HOS initiale grâce à l'emploi de FFTs. Cette méthode originelle considère le même ordre de non-linéarité M à la surface libre et au fond, avec un temps de calcul théorique supplémentaire proportionnel à M^2 .

Nous avons d'ores et déjà vérifié dans Gouin [9] la précision de la méthode développée ainsi que la validité de l'hypothèse réalisée lors des développements en série de Taylor ($\frac{\beta}{h_0} \ll 1$). Nous avons notamment montré que la variation de fond $\frac{\beta}{h_0} < 1$ permet d'obtenir de bonnes précisions avec la méthode HOS. Nous rappelons également que la méthode suppose qu'il n'y ait pas de déferlement et que la profondeur relative minimum est pour le moment limitée par ce critère (et par le rapport $\frac{\beta}{h_0}$).

Avant de s'intéresser aux cas applicatifs, il s'avère nécessaire de porter attention à la condition de périodicité Eq.(5). En effet, cette condition n'introduisait pas de difficultés particulières dans le cas d'une propagation en océan ouvert sur un fond plat, mais nécessite un traitement particulier des CSL et de la bathymétrie dans le modèle HOS fond variable. En effet, afin de traiter des cas bidimensionnels, il est tout d'abord nécessaire de modifier la bathymétrie afin que les profondeurs d'entrée et de sortie soient identiques selon la direction de propagation x . Ensuite, des zones de relaxation sont utilisées comme expliqué dans Gouin [9]. Pour les cas tridimensionnels, le fond doit également présenter des profondeurs identiques aux frontières (selon les directions de propagation x et transverse y). Nous employons également des zones de relaxation dans la direction de propagation. Néanmoins, cela n'est pas suffisant. La bathymétrie doit aussi présenter un axe de symétrie selon $L_y/2$. Cela nous permet de traiter tout type de bathymétrie, même très complexe, en reproduisant des conditions de réflexion selon la direction y . Plus de détails sur cette méthode sont également disponibles dans Gouin [9].

3 Application au cas d'une ellipse immergée

On étudie la transformation d'une houle se propageant au-dessus d'une ellipse immergée. Une focalisation de la houle derrière l'ellipse est observée expérimentalement (c.f. Vincent et Briggs [18]). Nous allons présenter plusieurs configurations de houle incidente disponibles dans Vincent et Briggs [18]. Le premier cas reproduit une houle régulière, le suivant une houle irrégulière unidirectionnelle et le dernier une houle irrégulière directionnelle. Les premiers résultats ont été présentés dans Gouin *et al.* [10].

Les simulations numériques seront comparées aux données expérimentales (disponibles dans le rapport de Briggs [4]) et aux simulations obtenues avec le code différences finies *OceanWave3D*¹ développé à DTU et pris en main au cours de la thèse de Gouin [9] dans le cadre d'un séjour financé par le LabexMer².

3.1 Description de l'expérience

La frontière de l'ellipsoïde est définie dans Vincent et Briggs [18] par :

$$\left(\frac{x-x_0}{3.05}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{3.96}\right)^2 = 1 \quad (13)$$

et l'élévation en tout point de cette ellipsoïde vaut :

$$\beta(x, y) = -0.4572 + 0.7620 \left[1 - \left(\frac{x-x_0}{3.81}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{4.95}\right)^2 \right]^{0.5} \quad (14)$$

avec $(x_0, y_0) = (6.1\text{m}, 13.72\text{m})$ le centre de l'ellipse. En dehors de l'ellipse, $\beta(x, y) = 0$. La variation totale du fond vaut alors $h(x) = h_0 - \beta$. Une vue du domaine avec $L_x = 25\text{m}$, $L_y = 30\text{m}$, et $h_0 = 0.4572\text{m}$ est visible sur la Fig.2(a). La plus faible profondeur d'eau est alors $h_1 = 0.1524\text{m}$.

Différentes sondes ont été utilisées expérimentalement. Nous avons utilisés les transects 4 (perpendiculaire à la direction de propagation) et 7 et 9 (parallèles à la direction de propagation) (voir Fig.2(b)). Afin de comparer nos résultats aux données expérimentales, une analyse vague-par-vague en zero-crossing sera réalisée. Cette analyse permet de s'intéresser aux statistiques de vagues individuelles définies par l'intervalle de temps entre deux moments successifs, où, à un point de mesure donné, la vague traverse le niveau moyen en descendant (zero down-crossing) ou en montant (zero up-crossing). On s'intéressera alors à la quantité $H_{1/3}$. De plus, pour les cas de houle régulière, on choisit comme longueur d'onde de référence λ_0 , et en houle irrégulière on utilise λ_p .

1. <http://www2.imm.dtu.dk/~apek/OceanWave3D/>

2. <http://www.labexmer.eu/fr>

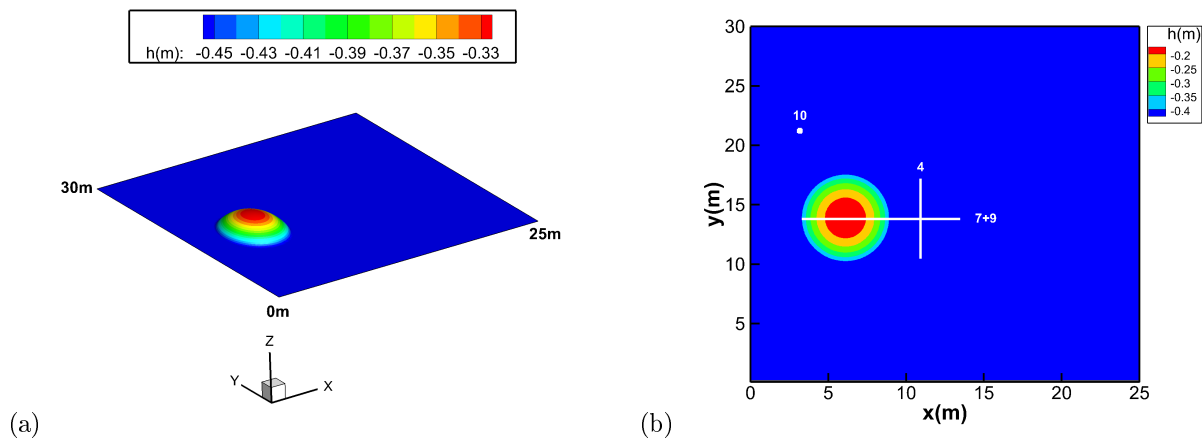


FIGURE 2 – (a) : Vue 3D du domaine expérimental. (b) : Vue de dessus de l’ellipse immergée. Traits blancs : localisation des transects 4 et 7+9. Sonde 10 : sonde de référence utilisée par Vincent et Briggs [18]

3.2 Mise en oeuvre

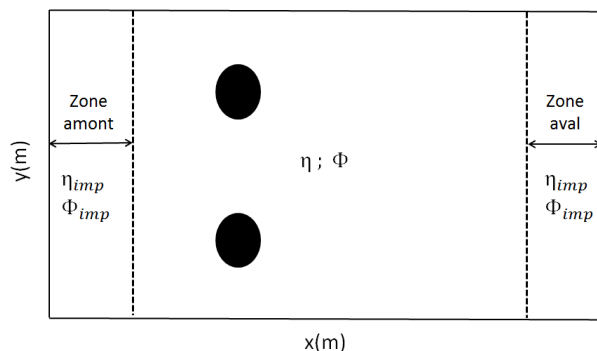


FIGURE 3 – Domaine de calcul avec des zones de relaxation selon x et des conditions de réflexion selon y .

L’ellipse n’étant pas centrée dans la direction y (le centre de l’ellipse se situe en $y_0 = 13.72\text{m}$ et la largeur du domaine est $L_y = 30\text{m}$), des conditions de réflexion sont utilisées le long de l’axe y afin de reproduire le cas expérimental d’une ellipse décentrée. Pour cela, nous avons modifié la bathymétrie en prenant le symétrique de l’ellipse par rapport à $L_y/2$ (tel que mentionné au paragraphe 2.6). Une vue de dessus du domaine de calcul est représentée sur la Fig.3.

Des zones de relaxation où la solution imposée est non-nulle (voir Fig.3) sont utilisées dans la direction de propagation x . Une zone de génération de 3 longueurs d’onde est imposée à gauche du domaine (selon l’axe x) et une zone d’absorption de 3 longueurs d’onde est utilisée à droite du domaine (le domaine total fait alors 18 longueurs d’onde). Avec cette méthode de relaxation, on utilise également la méthode de Dommermuth [7] permettant de faire apparaître progressivement les termes non-linéaires à la surface libre et au fond avec $T_a = 10T_p$ et $n = 4$.

Afin d’atteindre l’état stationnaire, il est nécessaire de s’assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine, dans la direction de propagation x , en utilisant la vitesse de groupe. Pour le cas de houle régulière ($M1$ décrit ci-dessous), nous analyserons les résultats et calculerons $H_{1/3}$ à l’aide d’une analyse vague par vague à partir de $t = 40\text{s}$ et pendant 28 périodes de houle (36.4s) afin de se conformer au travail expérimental qui analysait les données sur la même durée (c.f. Vincent et Briggs [18]).

Pour les cas de houles irrégulières ($U3$ et $N3$ présentés ci-dessous), il faut calculer le temps mis par les plus hautes fréquences du spectre pour parcourir tout le domaine. On calcule que l’on peut analyser les résultats à partir de $t = 80\text{s} = 62T_p$ et pendant 138 périodes de houle (180s).

3.3 Houle régulière unidirectionnelle - cas $M1$

On utilise ici les résultats de l’expérience appelée $M1$ dans Vincent et Briggs [18]. Une houle monochromatique et unidirectionnelle est propagée dans la direction x . Numériquement, la houle régulière est générée grâce à une solution de Rienecker et Fenton [16] de hauteur $H_0 = 0.0465\text{m}$ et de profondeur relative $k_0h_0 = 1.27$. La période est fixée à $T_0 = 1.3\text{s}$ et la cambrure vaut alors $k_0a_0 = 0.065$. Le lecteur remarquera que la hauteur imposée pour le cas $M1$ dans Vincent et Briggs [18] est de $H_0 = 0.055\text{m}$. Néanmoins, comme décrit dans Lynett et Liu [15], il est nécessaire de

recaler la valeur de l'amplitude de la houle incidente pour se confronter aux résultats expérimentaux, d'où la valeur choisie de 0.0465m. Pour cela, nous avons vérifié que l'on obtenait la même amplitude que les essais sur une sonde de référence placée dans le domaine non-perturbé (sonde 10 de la Fig.2) à l'aide d'une analyse vague par vague.

La convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde ($N_x = 13$ par λ_0 ; $N_y = 5$ par λ_0) soient ($n_1 = 256$, $n_2 = 128$) et un ordre HOS $M = 5$. Sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go RAM, le temps CPU par période de houle est de 15s. Ce temps de calcul faible montre l'efficacité de la méthode en 3D.

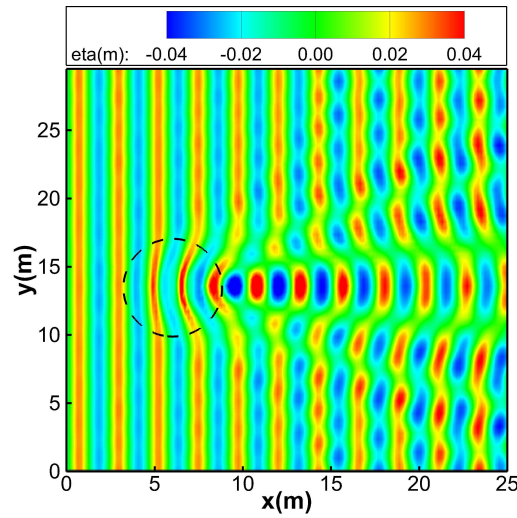


FIGURE 4 – Instantané de l'élévation de surface libre à l'état stationnaire. Cas $M1$ avec $H_0 = 0.0465\text{m}$ et $T_0 = 1.3\text{s}$. Pointillés : localisation de l'ellipse.

Un instantané de l'élévation de surface libre obtenu à l'état stationnaire est présenté sur la Fig.4. On observe nettement qu'il existe une zone de forte convergence derrière le fond elliptique, avec un facteur d'amplification maximum d'environ $A = H_{1/3}/H_0 \simeq 2.2$ par rapport à la houle incidente. Sur cette figure, on voit que la houle incidente arrive de la gauche et que le front de vague est ralenti en arrivant sur l'ellipse immergée (où la profondeur est plus faible). Cela provoque une augmentation de la cambrure de la houle. Derrière l'ellipse, les fronts de vagues réfléchies se rencontrent, créant une zone de focalisation de forte amplitude. Les interactions de vagues obliques dominent derrière l'ellipse, ce qui crée un comportement irrégulier. On remarque également l'existence de plusieurs zones, quasiment rectilignes, où la hauteur de houle est plus faible que la hauteur incidente. De plus, on observe de la réflexion sur les parois latérales à partir d'environ $x = 10\text{m}$. On rappelle que les expériences ont été réalisées dans un bassin avec des murs créant de la réflexion donc on s'attend à des réflexions similaires.

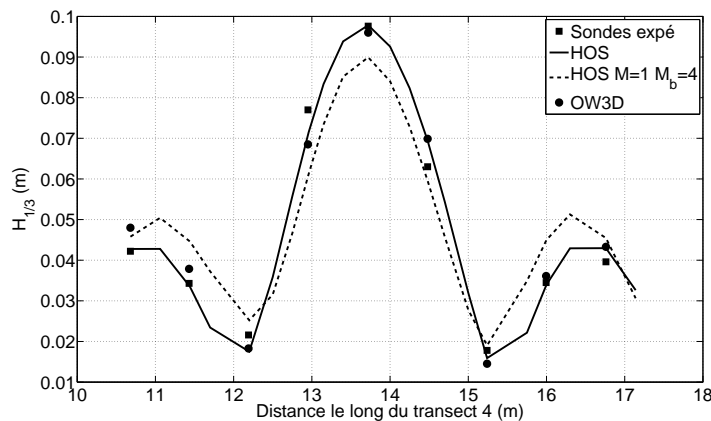


FIGURE 5 – Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas $M1$ avec $H_0 = 0.0465\text{m}$ et $T_0 = 1.3\text{s}$ - Comparaisons HOS/OW3D.

Une comparaison aux données expérimentales est donnée sur la Fig.5. Celle-ci représente la hauteur $H_{1/3}$ le long du transect 4 (placé en aval de l'ellipse, voir Fig.2 pour la localisation) obtenue avec la méthode HOS. On observe que nos simulations sont en bon accord avec les mesures expérimentales de Vincent et Briggs [18]. On retrouve la forte amplification observée sur la Fig.4 qui est d'environ 2.2, ainsi que deux zones où la hauteur de houle moyenne est plus faible que la hauteur incidente. Le lecteur remarquera que les courbes présentent une asymétrie, qui est

plus marquée pour les données expérimentales : en effet, comme vu précédemment, l'ellipse n'est pas centrée dans la direction transverse, donc la réflexion sur les murs donne un résultat légèrement différent.

A des fins d'analyse, la solution obtenue avec une résolution linéaire de la surface libre ($M = 1$) et un ordre convergé sur le fond ($M_b = 4$) est également représentée sur la Fig.5. On observe très clairement que les résultats sont assez proches de la solution totalement non-linéaire, cela signifie donc que les effets du fond sont importants. Cependant, la prise en compte des non-linéarités de surface libre permet d'atteindre une très bonne précision (en particulier dans la zone de convergence). En effet, l'amplitude maximale donnée par la solution non-linéaire est plus élevée qu'avec la solution linéaire, la cambrure locale est donc plus importante. De plus, en $x = 11.5\text{m}$ et en $x = 16\text{m}$, on remarque que les résolutions linéaires et non-linéaires de la surface libre donnent également des résultats différents. Les effets non-linéaires sont donc non-négligeables.

La Fig.6 représente également la hauteur crête à creux mais cette fois dans la direction de propagation le long des Transects 7 et 9 (au-dessus du centre de l'ellipse). On compare nos résultats aux expériences et au modèle développé par Lynett et Liu [15]. Ces derniers utilisent un modèle de Boussinesq amélioré en supposant que le fluide est composé de deux couches. On remarque que la hauteur significative donnée par notre modèle est légèrement différente de celle mesurée en bassin et plus précise que celle obtenue avec le modèle de Lynett et Liu [15] (surtout entre $x=12$ et 15m). De plus, si on regarde la courbe expérimentale entre $x = 4\text{m}$ et $x = 6\text{m}$ sur la Fig.6, on peut supposer que lors de la génération en bassin réalisée avec un batteur, la réflexion sur la pente amont de l'ellipse n'est pas toujours bien absorbée, alors que c'est le cas avec nos zones de relaxation. Cela pourrait donc expliquer une partie des différences observées.

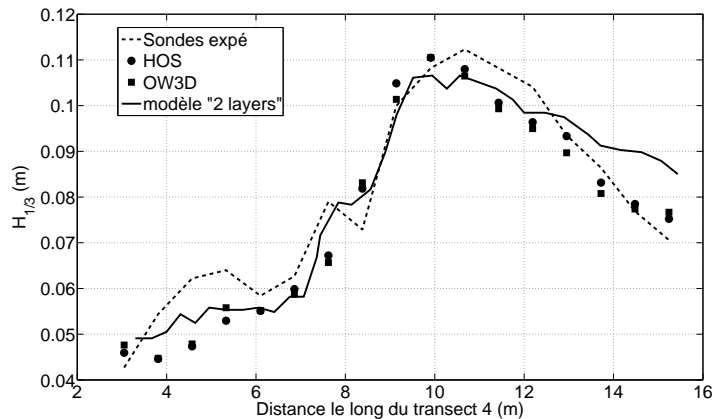


FIGURE 6 – Hauteur crête à creux le long des Transects 9 et 7 - houle régulière - cas $M1$ avec $H_0 = 0.0465\text{m}$ et $T_0 = 1.3\text{s}$ - Comparaisons HOS/OW3D.

Ainsi, ces premiers résultats montrent que la méthode HOS fond variable peut être appliquée à des cas 3D avec des variations du fond importantes. Les résultats obtenus sont très précis sur la totalité du champ 3D, comme le montrent les analyses suivant les différents transects. De plus, le temps de calcul est du même ordre de grandeur que l'échelle réelle, ce qui montre l'efficacité de la méthode développée.

A titre de comparaison, ce cas a été réalisé avec le code OceanWave3D³ qui utilise une méthode différence finies.

La convergence est atteinte avec $(N_x, N_y) = (257, 129)$ pour un domaine plan de $29 \times 40\text{m}^2$ et avec $N_z = 5$ points dans la verticale. Sur les frontières du domaine, on suppose que l'on a des murs solides verticaux du fond jusqu'à la surface libre. Comme pour la méthode HOS, 3120 pas de temps ont été simulés, ce qui représente 78 périodes de houle. Les niveaux de tolérance sont fixés à $Abstol = 10^{-6}$ en absolu et à $Reltol = 10^{-4}$ en relatif. Le schéma $DC + L_2U_2$ (PDC + factorisation LU) est utilisé avec le même pas de temps $dt = 0.025\text{s}$ que pour la méthode HOS. Sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM, le temps CPU par période de houle est de 105s.

Une fois les résultats obtenus, nous réalisons également une analyse vague par vague en zéro-crossing. Les résultats sont présentés sur la Fig.5 et Fig.6 et comparés à ceux obtenus avec la méthode HOS. On observe que les deux modèles donnent des résultats très similaires en termes de précision le long des 2 transects.

Si l'on compare maintenant les deux modèles en terme de temps de calcul, le temps CPU est de 15s pour le modèle HOS et de 105s pour le modèle OW3D (il faut noter que l'on n'utilise pas ici le modèle multigrille dans OW3D, les résultats devraient être bien meilleurs en terme d'efficacité avec son utilisation).

Ainsi, les deux méthodes sont très précises pour reproduire la focalisation 3D d'une houle régulière unidirectionnelle. La méthode HOS paraît plus efficace, néanmoins il faudrait s'intéresser au modèle multigrille de OceanWave3D.

3. <http://www2.imm.dtu.dk/~apek/OceanWave3D>

3.4 Houle irrégulière unidirectionnelle - cas $U3$

On utilise ici les résultats de l'expérience $U3$ de Vincent et Briggs [18]. L'ellipse est définie comme précédemment, seules les conditions de houle incidente changent. Ce cas vise à reproduire la transformation d'une houle irrégulière unidirectionnelle. La houle irrégulière est générée linéairement grâce à un spectre TMA ($\gamma = 2$) en définissant $H_s = 0.0254\text{m}$ et $T_p = 1.3\text{s}$. La cambrure vaut alors $k_p H_s = 0.07$ et la profondeur relative $k_p h_0 = 1.27$.

La convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde au pic ($N_x = 13$ par λ_p ; $N_y = 10$ par λ_p) et un ordre HOS $M = 5$. Le temps CPU (sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM) par période de houle est de 35s avec cette méthode, montrant une nouvelle fois l'efficacité du modèle numérique développé.

La Fig.8 représente un instantané de surface libre à $t = 72T_p$. Le champ de vagues obtenu est clairement irrégulier avec des composantes présentant différentes fréquences de houle. La zone de convergence est toujours présente mais seulement une bande de fréquence est supposée converger. On observe donc un état de mer très compliqué après l'ellipse et un peu de réflexion sur les murs latéraux comme pour le cas précédent $M1$.

La Fig.7 présente la hauteur $H_{1/3}$ obtenue par une analyse vague par vague en fonction de la position le long du transect 4. On observe un très bon accord avec les résultats expérimentaux. Le facteur d'amplification $A = H_{1/3}/H_s \simeq 1.8$, et que l'on a toujours l'existence de deux zones où la hauteur moyenne est plus faible que la hauteur incidente.

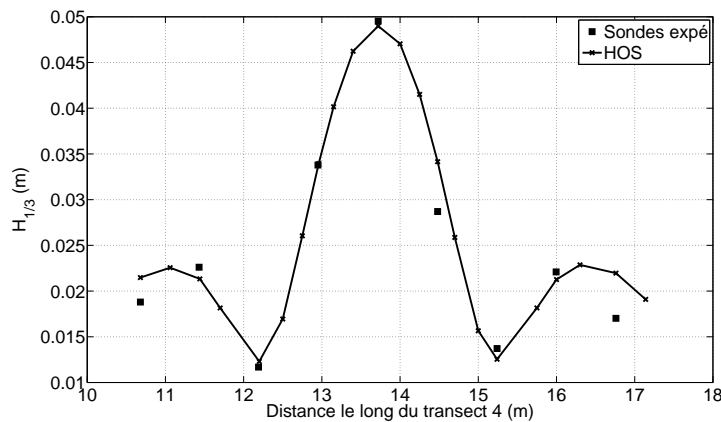


FIGURE 7 – $H_{1/3}$ le long du Transect 4 - houle irrégulière unidirectionnelle - cas $U3$ avec un spectre TMA, $\gamma = 2$, $H_s = 0.027\text{m}$, $T_p = 1.3\text{s}$.

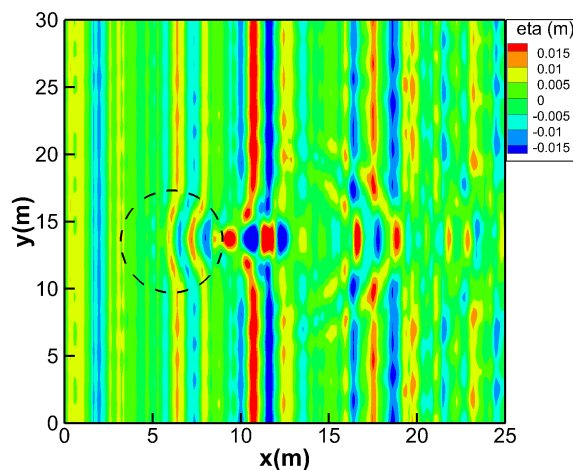


FIGURE 8 – Instantané de l'élévation de surface libre à l'état stationnaire - houle irrégulière unidirectionnelle - cas $U3$ avec un spectre TMA, $\gamma = 2$, $H_s = 0.027\text{m}$, $T_p = 1.3\text{s}$ - $t = 72T_p$. Pointillés : localisation de l'ellipse.

Ainsi, le modèle HOS est capable de modéliser de façon précise et efficace la propagation de houle irrégulière unidirectionnelle au-dessus d'un fond variable. Afin d'être complet dans notre étude, nous allons maintenant nous intéresser à la reproduction de houle irrégulière multidirectionnelle.

3.5 Houle irrégulière directionnelle - cas N3

Il s'agit ici de modéliser une houle directionnelle avec un étalement σ de 10 degrés. On suppose, comme Vincent et Briggs [18], que le spectre directionnel est alors défini par :

$$S(f, \theta) = S_{TMA}(f)D(\theta) \quad (15)$$

Le spectre TMA $S_{TMA}(f)$ est le même que celui utilisé pour le cas *U3* avec $\gamma = 2$, $H_s = 0.0254\text{m}$ et $T_p = 1.3\text{s}$. La cambrure vaut $k_p H_s = 0.07$ et la profondeur relative $k_p h_0 = 1.27$. La fonction de directionnalité $D(\theta)$ utilisée par Vincent et Briggs [18] est une fonction normale définie par :

$$D(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^L e^{-\frac{(l\sigma_m)^2}{2}} \cos(l(\theta - \theta_m)) \quad (16)$$

avec θ_m la direction moyenne de propagation à la fréquence f , σ_m le paramètre d'étalement à la fréquence f , L le nombre d'harmoniques choisi pour représenter la série de Fourier et θ variant entre 0 et 2π .

La convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde au pic ($N_x = 13$ par λ_p ; $N_y = 10$ par λ_p) et un ordre HOS $M = 5$. Le temps CPU (toujours sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM) par période de houle est alors de 35s, comme pour le cas de houle irrégulière unidirectionnelle *U3*. Un instantané de l'élévation de surface libre à $t = 72T_p$ est visible sur la Fig.9. Le champ est très complexe et irrégulier avec différentes fréquences de houle. La zone de focalisation est toujours présente mais de façon moins marquée que pour le cas *U3*.

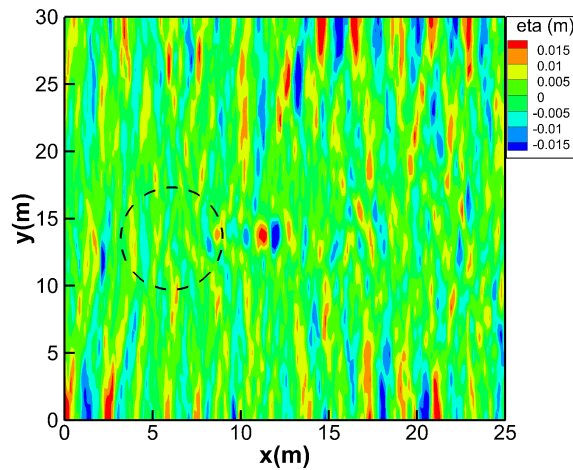


FIGURE 9 – Instantané de l'élévation de surface libre à l'état stationnaire - houle irrégulière multidirectionnelle - cas N3 avec un spectre TMA, $\gamma = 2$, $H_s = 0.027\text{m}$, $T_p = 1.3\text{s}$ et un étalement de 10 degrés - $t = 72T_p$. Pointillés : localisation de l'ellipse.

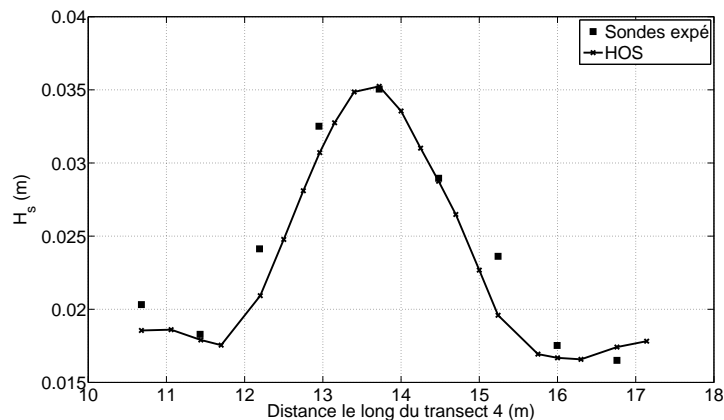


FIGURE 10 – $H_{1/3}$ le long du Transect 4 - houle irrégulière multidirectionnelle - cas N3 avec un spectre TMA, $\gamma = 2$, $H_s = 0.027\text{m}$, $T_p = 1.3\text{s}$ et un étalement de 10 degrés.

La Fig.10 représente la hauteur moyenne crête à creux obtenue par une analyse vague par vague en fonction de la position le long du transect 4. Il y a un très bon accord avec les résultats expérimentaux ce qui signifie que notre

méthode est précise pour reproduire n'importe quel type de houle même une houle irrégulière. Une amplification maximale $A = H_{1/3}/H_s \simeq 1.3$ est observée au centre du transect 4. De plus, cette fois-ci, l'allure de la courbe le long du transect 4 est différente des cas précédents car aucun creux n'est observé. En effet, dans le cas d'une houle directionnelle, la physique du problème est différente car de l'énergie est propagée dans différentes directions. L'amplification maximum est donc moindre et on n'observe pas de zones avec très peu d'amplification. La réflexion sur les murs latéraux peut être observée sur la Fig.10 car la courbe est asymétrique. Par contre, cette réflexion est compliquée à observer sur la Fig.9 à cause de l'étalement directionnel. Il faut également noter que pour reproduire des états de mer directionnels, des différences peuvent exister entre les résultats numériques et expérimentaux. Ici expérimentalement la méthode du serpent a été utilisée (c.f. Biésel [2]).

Les effets tridimensionnels sont donc très importants dans cette configuration, et sont très précisément reproduits par le modèle HOS développé. De plus, le modèle reste très efficace et est donc validé pour propager des houles irrégulières directionnelles sur des fonds variables.

4 Conclusion

La méthode HOS a été étendue à la propagation tridimensionnelle de houle au-dessus d'un fond variable. Cette méthode est basée sur un développement en série de Taylor de la condition limite au fond. Plus de détails sont disponibles dans Gouin [9].

L'objectif de ce papier était d'étudier différents cas de houle incidente se propageant au-dessus d'une ellipse immergée. Ce cas a été choisi car les effets induits par le fond sont importants mais qu'une résolution non-linéaire est tout de même nécessaire, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.3. Les simulations considèrent de fortes variations du fond et de faibles profondeurs relatives. Nous avons montré que la méthode HOS était très efficace car le temps de calcul par période de houle est compris entre 15s pour les cas de houle régulière et 35s pour les cas de houle irrégulière directionnelle (voir le Tab.1).

Cas	N_x	N_y	N_{λ_x}	N_{λ_y}	M	temps CPU par période de houle
Régulier	256	128	13	5	5	15
Irrégulier unidirectionnel	256	256	13	10	5	35
Irrégulier directionnel	256	256	13	10	5	35

TABLE 1 – Comparaison des paramètres numériques et du temps de calcul pour les cas étudiés.

Nous avons également vu que l'amplification en aval de l'ellipse dépend du type de houle considérée comme nous pouvons le voir sur la Fig.11. Même s'il est compliqué de comparer des houles régulières et irrégulières, nous partons du principe que H_0 est équivalent à H_s et que T est équivalent à T_p , comme réalisé par Vincent et Briggs [18]. Le long du transect 4 la hauteur $H_{1/3}$ a été normalisée par la hauteur incidente H_0 pour le cas de houle régulière et par H_s pour les cas irréguliers, ce qui correspond au facteur d'amplification A . Nous voyons clairement que l'utilisation d'une houle unidirectionnelle (régulière ou irrégulière) produit une amplification supérieure et que ces deux cas présentent le même comportement le long du transect 4 (une amplification et deux creux). De plus, l'amplification maximale le long du transect 4 dépend de la hauteur de houle incidente.

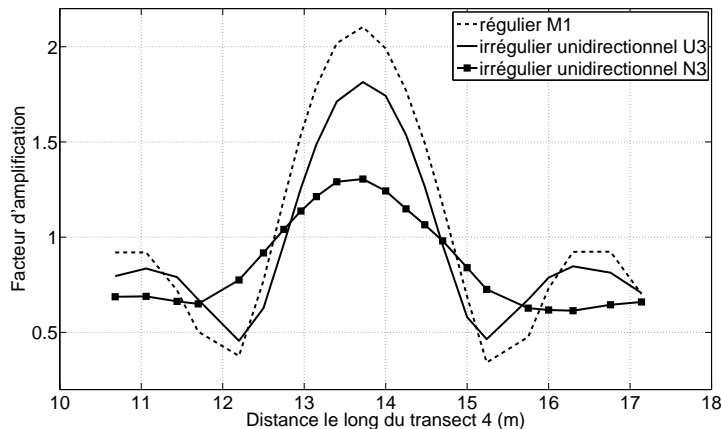


FIGURE 11 – Facteur d'amplification A le long du transect 4 - Comparaison des cas $M1$, $U3$ et $N3$.

Ce type de structure elliptique reposant sur un fond marin peut être utilisée pour focaliser la houle afin de la récupérer par une structure en mer (houlomoteur par exemple). Il faudra donc essayer de se placer dans des conditions se rapprochant le plus d'une houle régulière.

Remerciements

Ce travail de recherche a été financé par l'IRT Jules Verne dans le cadre de la chaire SIMAVHY. Les comparaisons à OceanWave3D ont été réalisées lors d'une visite à DTU financée par le LabexMer. Les auteurs remercient donc ces deux contributeurs, ainsi que Harry Bingham pour les échanges sur le code OW3D.

Références

- [1] K. BELIBASSAKIS, G. ATHANASSOULIS et T. GEROSTATHIS : Directional wave spectrum transformation in the presence of strong depth and current inhomogeneities by means of coupled-mode model. *Ocean Engineering*, 87(0):84 – 96, 2014.
- [2] F. BIÉSEL : Wave machines. *In Proceedings of the First Conference on Ships and Waves*, 1954.
- [3] F. BONNEFOY : *Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2005.
- [4] M. BRIGGS : Memorandum for record (mfr) : Summary of wet shoal test results. *Unpublished Memorandum for Record, Coastal Engrg. Res. Center, USAE Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS*, 1987.
- [5] W. CRAIG, P. GUYENNE, D. P. NICHOLLS et C. SULEM : Hamiltonian long-wave expansions for water waves over a rough bottom. vol. 461, p. 839–873. The Royal Society, 2005. ISBN 1471-2946.
- [6] D. DOMMERMUTH et D. YUE : A high-order spectral method for the study of non-linear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 184:267–288, 1987.
- [7] D. DOMMERMUTH : The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme. *Wave Motion*, 32(4):307 – 317, 2000. ISSN 0165-2125.
- [8] G. DUCROZET : *Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2007.
- [9] M. GOUIN : *Modélisation déterministe d'états de mer à grande échelle en profondeur variable*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2016.
- [10] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT. : 2D and 3D nonlinear wave propagation over a non-uniform bottom by pseudo-spectral method. *In Proceedings of the 11th European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC)*, 2015.
- [11] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT : Development and validation of a non-linear spectral model for water waves over variable depth. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 57:115 – 128, 2016. ISSN 0997-7546.
- [12] P. GUYENNE et D. NICHOLLS : A high-order spectral method for nonlinear water waves over moving bottom topography. *Journal of Scientific Computing*, 30:81–101, 2007.
- [13] D. LE TOUZÉ : *Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires*. Thèse de doctorat, 2003.
- [14] Y. LIU et D. YUE : On generalized Bragg scattering of surface waves by bottom ripples. *Journal of Fluid Mechanics*, 356:297–326, 1998.
- [15] P. LYNETT et P. L. LIU : A two-layer approach to wave modelling. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2049):2637–2669, 2004. ISSN 1364-5021.
- [16] M. RIENECKER et J. FENTON : A Fourier approximation method for steady water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:119–137, 1981.
- [17] H. SCHÄFFER : Comparison of Dirichlet-Neumann operator expansions for nonlinear surface gravity waves. *Coastal Engineering*, 55(4):288–294, 2008.
- [18] C. VINCENT et M. BRIGGS : Refraction-diffraction of irregular waves over a mound. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 115:269–284, 1989.
- [19] B. WEST, K. BRUECKNER, R. S. JANDA, D. M. MILDER et R. L. MILTON : A new numerical method for the surface hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*, 92:11803–11824, 1987.