

**MODELISATION NON-LINEAIRE ET DISPERSIVE DES  
VAGUES EN ZONE COTIERE : ETUDE COMPARATIVE DE  
DEUX METHODES DE SIMULATION PRECISES**

***NON-LINEAR AND DISPERSIVE MODELING OF  
NEARSHORE WAVES : A COMPARATIVE STUDY OF  
TWO ACCURATE METHODS***

**M. L. YATES\*, M. BENOIT\***

\*Université Paris-Est, Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant  
ENPC, EDF R&D, CETMEF, 78400 Chatou, France

*marissa.yates-michelin@developpement-durable.gouv.fr, michel.benoit@saint-venant-lab.fr*

**Résumé**

Dans le but de simuler la dynamique de vagues fortement non-linéaires et dispersives en zone côtière, deux méthodes de simulation précises, basées sur une approche potentielle non-linéaire sont étudiées et comparées. Les deux méthodes se distinguent par le traitement de la résolution verticale du potentiel dans le domaine fluide pour évaluer la vitesse verticale à la surface. La première approche utilise une discrétisation de la verticale par différences finies, alors que la deuxième approche utilise une formulation spectrale (à l'aide d'une base de polynômes de Tchebychev). Après une analyse de convergence en fonction de la résolution verticale du modèle, les modèles sont validés en comparaison avec des solutions de référence pour trois cas-tests dans des situations 2DV : (i) propagation sur fond plat d'une houle régulière fortement non-linéaire, (ii) run-up et réflexion sur un mur d'une onde solitaire et (iii) transformation d'un train d'ondes sur une bathymétrie variable. Les deux approches montrent des résultats globalement équivalents et de bonne qualité en comparaison avec des solutions de référence pour ces cas-tests.

**Summary**

With the objective of modelling coastal wave dynamics, two accurate nonlinear potential flow models are studied and compared. The two models differ in the method used to resolve the vertical variability of the potential to evaluate the vertical velocity at the surface. After testing the convergence of the models as a function of the vertical resolution, the models are validated with reference solutions for three 2DV test cases : (i) the propagation of stable, strongly nonlinear regular waves over a flat bottom, (ii) the run-up and reflection of a solitary wave from a wall, and (iii) the propagation and shoaling of a series of waves on a beach. The two models show relatively equivalent, high quality results that agree well with the reference solutions for these test cases.

## I – Introduction

Une modélisation précise des vagues de surface se doit de traiter, de façon la plus complète possible, d’une part les effets non-linéaires (dus aux interactions vague-vague et vague-fond) et d’autre part les effets dispersifs, tout en prenant en compte le caractère irrégulier et multidirectionnel de l’état de mer, ainsi que les variations de bathymétrie (en espace, et éventuellement en temps). La prise en compte correcte de toutes ces caractéristiques reste un défi largement ouvert, surtout si on souhaite propager des états de mer sur de grandes distances (i.e. plusieurs centaines de longueurs d’onde), même si de nombreux modèles mathématiques et méthodes de simulation numérique ont été proposés depuis plusieurs décennies pour traiter tout ou partie de ces aspects.

Les approches de modélisation dites CFD (Computational Fluid Dynamics), fondées sur le système d’équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles et turbulents de fluides visqueux (souvent formulées en moyenne de Reynolds pour l’écoulement moyen, i.e. modèles RANS), ne représentent pas une option pertinente à l’échelle de la zone côtière, pour au moins deux raisons. D’une part, elles font appel à un niveau de ressources informatiques (mémoire vive et temps CPU) extrêmement élevé, voire rédhibitoire pour les applications réalistes avec des moyens de calcul courants. D’autre part, les méthodes numériques utilisées dans ces codes se révèlent la plupart du temps dans l’incapacité de propager correctement (i.e. sans amortissement, ni diffusion numérique) des ondes de surface libre sur de grandes distances. Le recours à de telles modélisations visqueuses est cependant pertinent (et recommandé) à une échelle locale lorsque les vagues interagissent avec des obstacles, structures, navires, etc. ou bien pour représenter fidèlement le processus de déferlement.

En supposant que le fluide est non-visqueux et que l’écoulement est irrotationnel, il est possible de développer des modèles potentiels complètement non-linéaires (retenant les expressions complètes des conditions non-linéaires de surface libre) ce qui permet de simuler des profils de vagues allant jusqu’à des déferlements plongeants. Les modèles numériques développés sont en général fondés sur une méthode intégrale de frontière et résolus avec une méthode d’éléments de frontières d’ordre plus ou moins élevé (e.g. [10]). Cette approche permet d’obtenir des résultats précis et de grande qualité (si les hypothèses d’écoulement potentiel sont effectivement vérifiées), mais les ressources informatiques nécessaires restent élevées, en particulier pour les applications 3D sur des domaines de grandes dimensions.

Les modèles de type Saint-Venant, fondés sur une hypothèse d’écoulement hydrostatique, sont réservés aux ondes longues (i.e. ondes infra-gravitaires, ondes de surcotes-décotes, marée); leur caractère non-dispersif interdit toute application dans le domaine des vagues de vent. Les modèles dits de Boussinesq ou Serre, ont connu un intérêt très marqué au cours des 25 dernières années. Au départ [16], les modèles de ce type étaient fondés sur deux hypothèses principales, (i) faible non-linéarité des ondes de surface et (ii) faibles effets de la dispersion, ce qui leur conférait un domaine de validité limité aux eaux peu profondes et aux vagues de faibles cambrures. Depuis, les travaux de [15, 22] tout d’abord, puis ceux de [1, 9, 13] (pour n’en citer que quelques uns), ont permis de s’affranchir de l’hypothèse de faible non-linéarité, puis de celle de faible dispersion, permettant ainsi de simuler correctement des ondes fortement non-linéaires jusqu’en eaux profondes. Cependant, le prix à payer pour cela est un accroissement conséquent de la complexité mathématique et numérique des modèles développés, liée notamment à l’utilisation de dérivées spatiales d’ordres élevés (i.e. supérieurs à 3, voire 5).

Pour les applications de propagation de champs de vagues du large vers la côte, l’approche potentielle est acceptable, *a minima* hors de la zone de déferlement et hors du

voisinage immédiat d'obstacles ou d'ouvrages, et nous nous plaçons dans ce cadre, en utilisant le système d'équations dit de Zakharov [24] (voir partie suivante). L'objectif de cette étude est de valider et comparer deux méthodes de simulation précises. Après un rappel du modèle mathématique et une présentation des deux modèles numériques considérés, une étude de convergence en fonction de la résolution verticale est présentée. Puis les modèles sont appliqués à trois cas-tests et leurs résultats sont comparés à des solutions de référence pour (i) la propagation sans déformation d'une houle régulière fortement non-linéaire sur fond plat, (ii) le run-up et la réflexion sur un mur vertical d'une onde solitaire et (iii) la transformation d'un train d'ondes sur une bathymétrie variable.

## II – Présentation des modèles numériques

### II – 1 Modèle mathématique

En faisant les hypothèses que le fluide est de masse volumique constante et non-visqueux, et que l'écoulement est irrotationnel, une approche potentielle est retenue. Le potentiel de vitesse  $\phi(\underline{x}, z, t)$  satisfait l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide, complétée par les conditions aux limites en surface libre  $z = \eta(\underline{x}, t)$  (conditions cinématique et dynamique), au fond  $z = -h(\underline{x})$  (condition d'imperméabilité) et sur les parois latérales (conditions de type Dirichlet ou Neumann). En supposant de plus que les vagues ne déferlent pas (continuité du domaine fluide entre le fond et la surface libre), on peut transformer les conditions de surface libre en deux équations régissant l'évolution en temps de deux quantités surfaciques [24] :

$$\eta_t = -\nabla\eta \cdot \nabla\tilde{\phi} + \tilde{w}(1 + \nabla\eta \cdot \nabla\eta) \quad (1)$$

$$\tilde{\phi}_t = -g\eta - \frac{1}{2}\nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\tilde{\phi} + \frac{1}{2}\tilde{w}^2(1 + \nabla\eta \cdot \nabla\eta), \quad (2)$$

où  $\tilde{\phi}(\underline{x}, t) = \phi(\underline{x}, \eta(\underline{x}, t), t)$ , et  $\tilde{w}(\underline{x}, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}|_{z=\eta}$  est la vitesse verticale en surface. Pour simuler ce système d'équations, trois « ingrédients » sont nécessaires : (a) un algorithme de calcul de gradient dans le plan horizontal, (b) un schéma d'intégration en temps, et (c) une méthode permettant d'estimer la vitesse verticale  $\tilde{w}(\underline{x}, t)$  en fonction du potentiel de surface  $\tilde{\phi}(\underline{x}, t)$ , problème habituellement appelé « Dirichlet-to-Neumann » (DtN). C'est ce troisième point qui pose le plus de difficulté, et nécessite une attention particulière.

Les équations (1,2) ont été appliquées avec succès et assez largement utilisées sur le cas particulier de domaines de forme rectangulaire, à fond plat, avec le développement de la méthode spectrale d'ordre élevé (« High-Order Spectral », ou HOS method) [23, 7]. Cependant, il existe assez peu d'extensions de la méthode HOS pour traiter le cas général d'un fond variable [19], et les applications pratiques de cette approche sont rares.

Dans ce travail, une stratégie différente a été adoptée pour traiter le point (c) ci-dessus, consistant à résoudre numériquement le problème aux limites de Laplace sur  $\phi$  à chaque pas de temps. Deux variantes de résolution de ce problème sont étudiées et comparées ci-après, en se limitant à une seule dimension d'espace horizontale  $x$ . Dans les deux cas, nous adoptons des choix identiques pour les points (a) et (b), à savoir :

- calcul de dérivées spatiales à l'aide de schémas aux différences finies d'ordres élevés (à l'ordre 4, sauf indication contraire). Le domaine en  $x$  est discrétisé sur  $N_X$  points, avec un pas d'espace  $\Delta x$  uniforme ou non-uniforme selon les cas,
- avance en temps à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4, avec un pas de temps  $\Delta t$  constant.

## II – 2 Modèle A : discrétisation de la verticale, par différences finies

La première approche consiste à résoudre le problème aux limites sur  $\phi$  par une méthode de différences finies sur la dimension verticale  $z$ , suivant [4] et [8]. Une transformation en coordonnées sigma permet de se ramener à un domaine qui varie en vertical sur  $[0; 1]$ . La hauteur d'eau est discrétisée avec  $N_Z$  points, soit en  $N_L = N_Z - 1$  couches. Des schémas aux différences finies d'ordres élevés (variables) sont ensuite employés pour discrétiser les équations et calculer  $\phi$  sur ce domaine. Une analyse de la convergence du modèle (non présentée ici) montre, en accord avec [4] et [8], qu'une répartition de points en  $z$  utilisant les racines des polynômes de Tchebychev-Gauss-Lobatto réduit les erreurs en comparaison avec une répartition régulière ou une répartition utilisant les racines des polynômes Legendre-Gauss-Lobatto.

## II – 3 Modèle B : approche spectrale en $z$ (polynômes de Tchebychev)

La seconde approche, utilisée par [21], repose également sur une transformation du domaine fluide pour se ramener à un intervalle de  $[-1; 1]$  pour la coordonnée verticale transformée, notée  $s$ , et sur l'hypothèse que la dépendance en  $s$  du potentiel peut être approchée par une somme de termes suivant une base de fonctions en  $s$  :

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, s(\mathbf{x}, z)) \simeq \sum_{n=0}^{N_T} a_n(\mathbf{x}) T_n(s) \quad (3)$$

Pour les fonctions  $T_n(s)$ , suivant [21], on choisit les polynômes de Tchebychev, où  $N_T$  indique le degré maximal des polynômes choisis. En introduisant cette approximation dans le système d'équations, et en utilisant une méthode de Galerkin pour éliminer la coordonnée  $s$ , on aboutit à un système d'équations linéaires sur les coefficients  $a_n(\mathbf{x})$ , dont la résolution permet d'avoir la valeur du potentiel sur tout le domaine fluide par (3).

## II – 4 Quelques aspects de la résolution numérique

Pour les deux modèles, on doit résoudre, à chaque pas de temps, un système linéaire, dont la taille dépend du nombre de couches dans le modèle A ( $N_L$ ) ou du degré maximal des polynômes de Tchebychev dans le modèle B ( $N_T$ ). On obtient un système de  $N_X \times (N_L + 1)$  ou  $N_X \times (N_T + 1)$  équations, dont la matrice est creuse. Pour sa résolution, nous utilisons le solveur direct MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel Solver) [2, 3].

## III – Application et validation des modèles

### III – 1 Etude de convergence pour une houle régulière non-linéaire

On s'intéresse d'abord au point particulier de la résolution du problème DtN, sur une situation où on dispose d'une solution de référence, à savoir le cas de vagues régulières non-linéaires se propageant sans-déformation sur un fond plat. La solution de référence est obtenue par la méthode d'approximation par série de Fourier de la fonction de courant (basée sur [5, 17]), qui donne des solutions très précises pour des vagues de grande cambrure quelle que soit la profondeur d'eau relative. On utilise le code STREAM\_HT (sans courant ambiant) développé au Laboratoire, avec une approximation à l'ordre 20 de la fonction de courant pour les conditions initiales et de référence. Comme mentionné auparavant, le calcul de la vitesse verticale à la surface  $\tilde{w}$  dépend de la résolution de  $\phi$  dans le domaine. Pour un nombre de points en horizontal  $N_X$  fixé, la précision du calcul

de  $\tilde{w}$  est contrôlée par la résolution verticale de  $\phi$ , et par conséquent par les paramètres  $N_L$  et  $N_T$  dans les modèles A et B, respectivement.

Les simulations présentées ici correspondent au cas d'une houle régulière non-linéaire de hauteur  $H = 6.4$  m, de longueur d'onde  $L = 64$  m, se propageant par une profondeur d'eau  $h = 64$  m, soit une cambrure  $H/L = 0.1$  et une profondeur d'eau relative  $h/L = 1$ . Le domaine en  $x$  couvre une longueur d'onde de vague exactement ; il est discrétisé avec un pas d'espace uniforme  $\Delta x = L/64 = 1$  m.

Pour étudier la convergence des modèles, en fonction de  $N_L$  ou  $N_T$  selon le cas, on fait varier ces deux paramètres dans l'intervalle  $[2; 15]$ , et on calcule les normes  $L_2$  et  $L_\infty$  de l'erreur sur la vitesse verticale à la surface ( $\tilde{w}_{model} - \tilde{w}_{STREAM}$ ) sur une longueur d'onde de vague. Lorsque  $N_L$  ou  $N_T$  augmente, cette vitesse converge rapidement vers la solution donnée par STREAM\_HT, et les différences ne sont plus visibles à partir de  $N_L = N_T = 6$  (Figure 1). Il est à noter que les dérivées en espace sont calculées à l'ordre 4 en  $z$  dans le modèle A, sauf pour les cas où l'ordre a été réduit à 2 pour  $N_L = 2, 3$  ou 4, du fait d'un nombre insuffisant de points en  $z$  pour obtenir l'ordre 4. La Figure 2 montre que l'erreur sur  $\tilde{w}$  décroît et la solution devient plus précise avec une augmentation de  $N_L, N_T$ . Les modèles A et B présentent des erreurs similaires pour  $N_L, N_T < 6$ , mais le modèle B converge plus rapidement et présente une erreur plus faible pour  $6 < N_L, N_T < 15$  sur ce cas. L'erreur du modèle B atteint un minimum pour  $N_T = 11$ , et reste ensuite quasiment constante, alors que l'erreur du modèle A continue à décroître (en restant supérieure à celle du modèle B toutefois).

### III – 2 Propagation sans déformation d'une houle régulière non-linéaire

Ce cas-test évalue la capacité des modèles à propager sans déformation la houle régulière non-linéaire étudiée dans la section précédente sur une durée et une distance assez longues. La solution de référence donnée par STREAM\_HT, qui donne une période de vague  $T = 6.09433570$  s, est utilisée pour spécifier les conditions initiales, sur une longueur de domaine correspondant toujours à une longueur d'onde  $L$ , avec conditions de périodicité latérales. Pour ce cas-test, la vague est propagée pendant 100 périodes, avec un pas de temps de  $\Delta t = T/100$ . Au cours de ces simulations, des oscillations de hautes fréquences peuvent se développer après une trentaine de périodes, et faire diverger

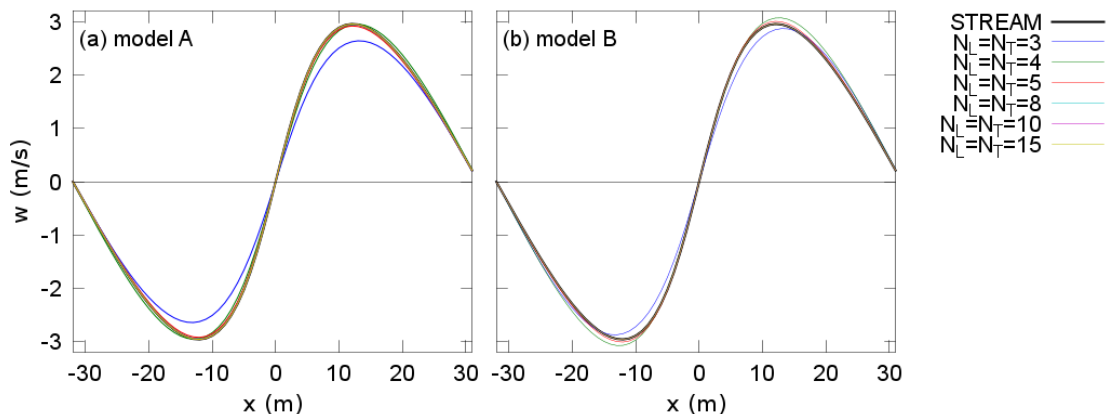


Figure 1 – Profils de la vitesse verticale à la surface  $\tilde{w}$  en fonction de  $N_L, N_T$  pour les modèles A et B, en comparaison avec la solution de référence de STREAM\_HT.

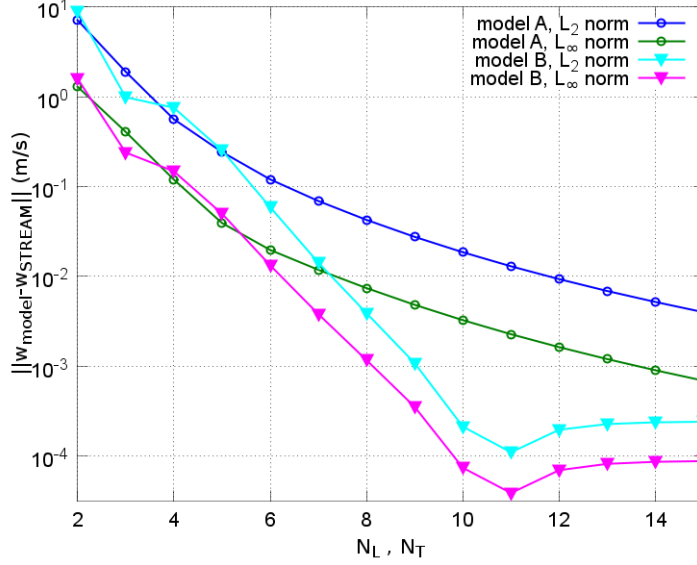


Figure 2 – Normes  $L_2$  et  $L_\infty$  de l’erreur sur la vitesse verticale à la surface sur une longueur d’onde de houle, en fonction de  $N_L, N_T$  pour les modèles A et B.

le calcul. Il s’agit d’une conséquence des termes non-linéaires amplifiant les amplitudes des modes les plus élevés du spectre de vagues (un effet souvent rencontré avec ce type de modélisation). Pour s’en prémunir, nous appliquons un filtre de type Savitzky-Golay [18] (polynôme de degré 4, sur 11 points) à  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  tous les 100 pas de temps (i.e. toutes les périodes  $T$ ) pour toutes les simulations, sauf pour  $N_L, N_T = 3$  pour lequel le filtre a été appliqué tous les 20 pas de temps ( $T/5$ ). Appliqué de façon aussi peu fréquente, ce filtrage a des effets négligeables sur les vagues propagées.

Les simulations à  $t = 100T$  sont comparées à la solution de référence pour évaluer le déphasage de la vague  $\Delta\varphi$  en fonction de la résolution verticale (Figure 3). Pour  $N_L, N_T \leq 4$ , une réduction de la hauteur de la crête de la vague est observée, alors que la forme

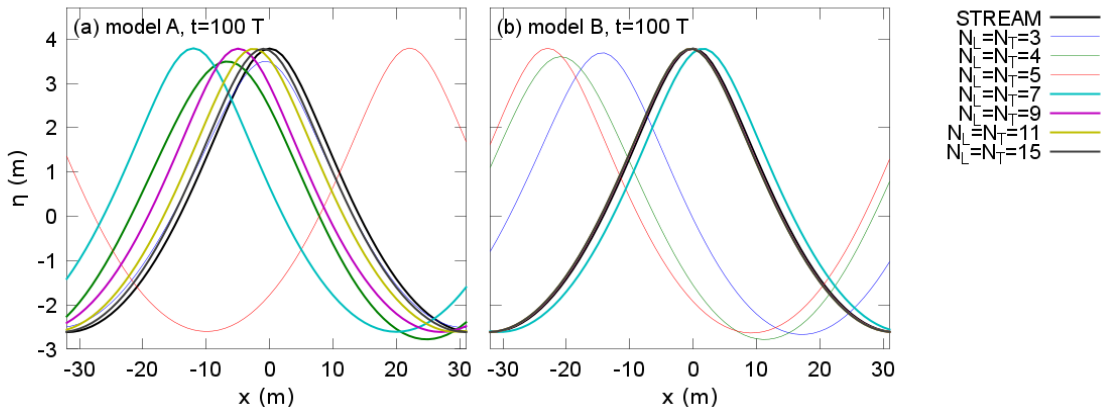


Figure 3 – Profils de  $\eta$  pour une houle régulière non-linéaire après 100 périodes en fonction de  $N_L, N_T$ . La courbe noire indique la solution de référence du modèle STREAM\_HT, et les courbes en trait fin indiquent des résultats avec un déphasage supérieur à  $\pi$ .

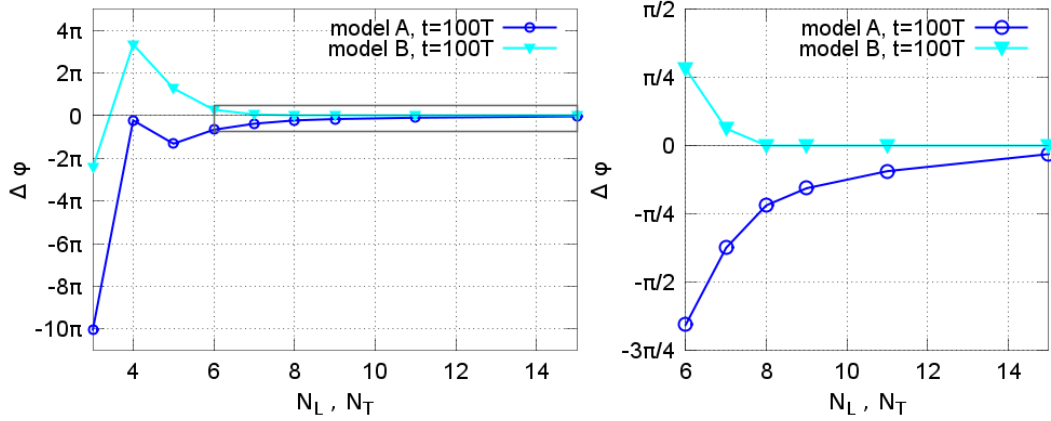


Figure 4 – Déphasage de la vague après 100 périodes de propagation pour : (gauche)  $N_L, N_T = [2, 15]$ , et, indiqué par un rectangle gris, (droite) un zoom pour  $N_L, N_T = [6, 15]$ .

de la vague reste stable pour des valeurs de  $N_L, N_T$  plus élevées. Pour  $N_L, N_T \leq 6$ , le déphasage de la vague est supérieur à  $\pi$ , mais du fait de la périodicité spatiale les courbes correspondantes peuvent être proches de la solution de référence (voir les traits fins en Figure 3). Pour les deux modèles, le déphasage décroît systématiquement pour  $N_L, N_T \geq 5$  (Figure 4), et on note que, pour une valeur de  $N_L = N_T$  donnée, le modèle B simule plus précisément la célérité de la vague.

### III – 3 Run-up et réflexion d’une onde solitaire sur un mur vertical

Le deuxième cas-test est basé sur l’étude de [6], qui a évalué le run-up et la réflexion d’une onde solitaire sur un mur. Si on néglige les effets de viscosité et de tension superficielle, la collision de deux ondes solitaires de même hauteur est équivalente à la réflexion d’une onde solitaire sur un mur vertical, le cas étudié ici. La collision de deux vagues solitaires produits des effets différents en fonction de la non-linéarité de l’onde : pour des vagues faiblement non-linéaires, la collision cause un faible déphasage en espace, mais sans perte d’énergie de la vagues. Par contre, pour des vagues fortement non-linéaires, la collision cause un déphasage en espace, ainsi qu’une perte d’énergie et une diminution de la célérité de l’onde principale, avec la formation d’une onde secondaire.

Pour ces cas-tests, les conditions initiales de l’onde solitaire sont déterminées avec un code basé sur la méthode itérative de Tanaka [20] pour des vagues dont le rapport de la hauteur  $H$  sur la profondeur d’eau au repos  $h$  (prise égale à  $h = 1$  m) varie entre 0.075 et 0.7. La longueur du domaine est 35 m (de -20 m à 15 m), la crête de la vague est initialement centrée à 0 m et se propage vers la gauche en direction du mur placé à -20 m. Les conditions limites du domaine sont des murs verticaux imperméables. Le niveau maximum de run-up  $\eta_{max}$ , ainsi que le temps de ce run-up maximum  $t_{\eta_{max}}$  sont comparés à l’étude de [6]. [6] a réalisé ces cas-tests avec une méthode intégrale de frontière très précise pour un modèle potentiel complètement non-linéaire, et les simulations ont été validées avec des données expérimentales de [14]. On compare également les temps dits d’attachement et de détachement de la vague sur le mur, correspondant aux instants où la courbure de la surface libre au niveau du mur ( $\partial^2\eta/\partial x^2$ ) change de signe (i.e. passe de concave à convexe pour le temps d’attachement, inversement pour le temps de

détachement). Pour montrer l'asymétrie de la réflexion, l'origine du temps  $t_0$  a été définie par le temps d'une réflexion supposée parfaite basée sur la célérité de l'onde loin du mur. Le temps est ensuite adimensionnalisé par  $\tau = (h/g)^{1/2}$ .

Les modèles A et B sont utilisés avec  $\Delta x = 0.1$  m,  $\Delta t = 0.02$  s,  $N_L = N_T = 7$ . En comparaison avec [6], les deux modèles montrent de bons résultats, qui sont très similaires avec les simulations de référence pour  $H/h \leq 0.55$  (Figure 5). Le modèle A est capable de simuler l'interaction entre la vague et le mur pour des hauteurs légèrement plus grandes que le modèle B. En regardant le temps du run-up maximum, les deux modèles surestiment la vitesse de propagation de la vague pour les plus grandes hauteurs d'onde incidente ( $H/h = 0.65$  et  $0.6$ , pour les modèles A et B, respectivement, Figure 5b). Ensuite, pour ces simulations, les deux modèles deviennent instables après avoir atteint le niveau maximum du run-up, et les modèles divergent avant de simuler le détachement de la vague. Pour une hauteur relative de vague encore plus élevée (et proche de la limite théorique de stabilité d'une onde solitaire), la vague devient instable avant d'arriver au mur. En comparaison avec [6], les modèles A et B sont capables de simuler le détachement de la vague du mur pour une hauteur de vague plus élevée, mais le modèle de [6] est capable de simuler l'attachement et le run-up des vagues de hauteurs plus élevées.

L'asymétrie de la réflexion des vagues est observable sur les profils de la surface libre au cours du temps (Figure 6), ainsi que sur le temps d'attachement et de détachement (Figure 5c). Pour  $H/h = 0.5$ , la hauteur de la vague réfléchie est réduite de 15% environ en comparaison avec la vague avant la réflexion (Figure 6). De plus, la hauteur de détachement de la vague est plus basse que la hauteur d'attachement, et la forme de la vague est modifiée avec la présence d'une vague secondaire. La différence entre le temps

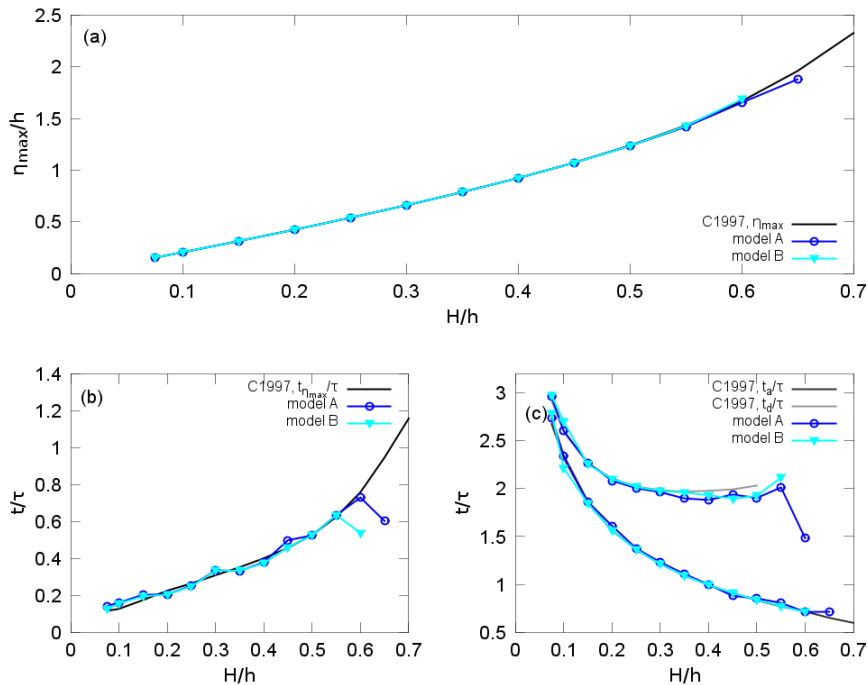


Figure 5 – Comparaison des simulations des modèles A et B avec [6] pour : (a) le niveau maximum de run-up normalisé  $\eta_{max}/h$ , et le temps normalisé (b) de ce run-up maximum  $t_{\eta_{max}}/\tau$  et (c) d'attachement  $t_a/\tau$  et de détachement  $t_d/\tau$  de la vague au mur.



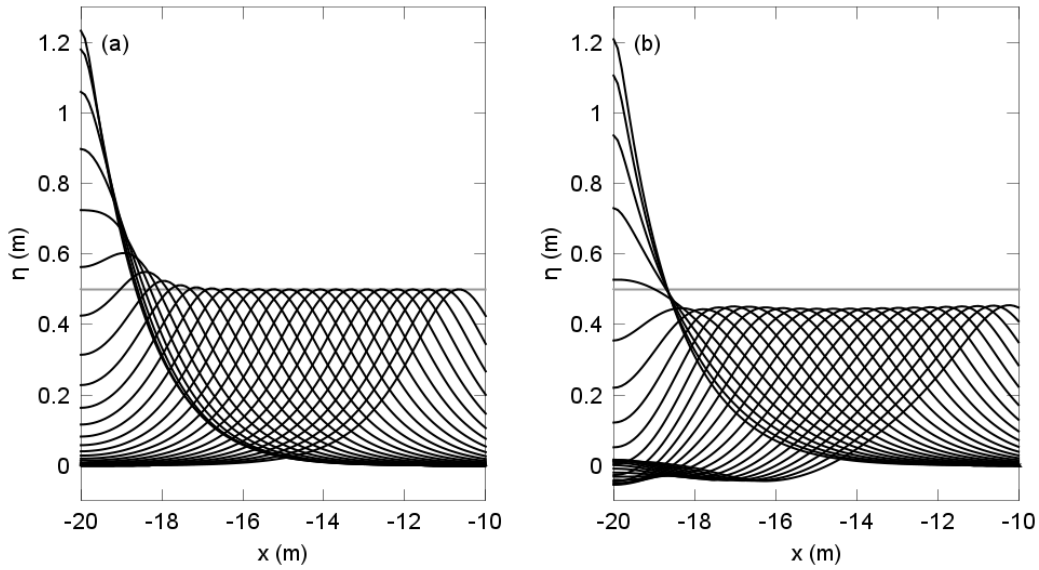


Figure 6 – Profils de la propagation d’une onde de hauteur incidente  $H/h = 0.5$  (indiquée par la ligne grise) tous les 5 pas de temps (avec  $\Delta t = 0.02$  s) pendant que la vague (a) monte et (b) descend le mur (avec le modèle A).

d’attachement et le temps de détachement montre aussi cette asymétrie, qui est d’autant plus importante que l’onde incidente est cambrée (Figure 5c). Les modèles A et B sont capables de simuler la propagation d’une onde solitaire fortement non-linéaire, incluant l’interaction avec un mur vertical, avec en particulier la réduction de la hauteur et de la vitesse de la vague après la réflexion.

### III – 4 Transformation d’un train d’ondes sur une bathymétrie variable

Le dernier cas-test présenté suit le travail de [12], qui ont simulé la transformation d’un train d’ondes sur une bathymétrie variable en utilisant le modèle potentiel complètement non-linéaire de [11]. Ce cas-test évalue la capacité du modèle à simuler la propagation des vagues en fond variable (effets dispersifs et non-linéaires). Suivant [12], le domaine de calcul et le profil initial de la surface libre sont présentés sur la Figure 7a. La vitesse initiale est nulle sur l’ensemble du domaine fluide, et les frontières latérales sont totalement réfléchissantes.

Les premières vagues qui se propagent vers la plage sont de hauteur modérée, mais cette hauteur augmente au cours de la propagation. La durée de chaque simulation est choisie pour éviter le déferlement des vagues. [12] ont réalisé trois cas-tests avec une amplitude initiale normalisée  $a_1/h_1$  de 0.125, 0.09 et 0.075 (où  $h_1 = 1$  m est la profondeur d’eau maximum), et un temps de calcul normalisé  $t_{fin}(g/h_1)^{1/2}$  de 45, 70 et 90, respectivement (e.g. Figure 7). Nous présentons ici l’application au cas le plus non-linéaire ( $a_1/h_1 = 0.125$ ;  $t_{fin}(g/h_1)^{1/2} = 45$ ). Les enveloppes des crêtes et des creux du train de vagues pendant la durée du calcul sont comparées avec les courbes digitalisées des Figures 9 à 11 de [12].

Pour ce cas-test, avec  $N_L = N_T = 7$ , les résultats des modèles A et B sont presque identiques, et ils dépendent fortement de la résolution spatiale, surtout dans la zone où les vagues sont les plus hautes ( $x$  compris entre 42 et 48 m, Figure 8). Avec un pas d’espace uniforme de  $\Delta x = 0.1$  m ( $\Delta t = 0.02$  s), l’amplitude maximale des vagues est clairement

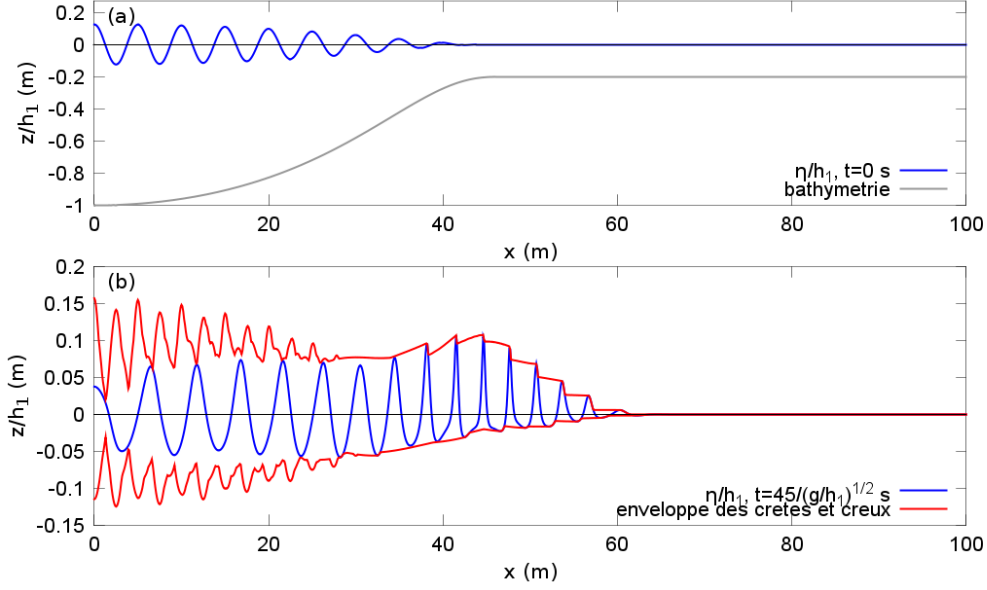


Figure 7 – (a) Bathymétrie et profil de la surface libre au début du calcul pour le cas-test  $a_1/h_1 = 0.125$ . (b) Profil de la surface libre à la fin du calcul et enveloppe des maxima et minima des crêtes et creux (pour  $\Delta x = 0.1$  m,  $\Delta t = 0.02$  s).

sous-estimée. Une réduction du pas d'espace à  $\Delta x = 0.05$  m ( $\Delta t = 0.01$  s) permet aux résultats d'approcher la solution de référence. Ensuite, pour raffiner encore le maillage, mais aussi pour optimiser le temps de calcul, une discrétisation variable a été choisie avec  $\Delta x = 0.05$  m entre 0 et 40 m,  $\Delta x = 0.025$  m entre 40 et 60 m,  $\Delta x = 0.05$  m entre 60 et 70 m et  $\Delta x = 0.1$  m entre 70 et 100m ( $\Delta t = 0.005$ s). Avec cette discrétisation, les résultats des modèles A et B montrent un excellent accord avec les résultats de [12]. Les transitions du maximum de la crête d'une vague à une autre montrent que les modèles sont capables de bien reproduire la célérité des vagues. Les deux autres cas-tests, pour des vagues moins cambrées ( $a_1/h_1 = 0.09$  et  $0.075$ ), présentent des résultats très similaires, et ils ne sont pas détaillés ici. Ce cas-test montre la capacité des modèles A et B à simuler précisément la propagation des vagues dans une zone avec une bathymétrie variable, ce qui confirme leur capacité à tenir compte de la dispersion des vagues.

## IV – Conclusions

Ces applications nous ont permis d'évaluer la capacité des modèles A et B à simuler la dispersion et les effets des non-linéarités, sur un fond plat ou variable, sur des cas bien contrôlés. Le test de la convergence des deux modèles en fonction de la résolution verticale montre que l'erreur sur la vitesse verticale à la surface décroît rapidement avec une augmentation de  $N_L, N_T$ . Le cas-test de la propagation d'une vague régulière a permis de mettre en évidence la capacité des modèles à propager des vagues fortement non-linéaires en préservant la forme de la vague au cours du calcul. En augmentant le nombre de couches en vertical  $N_L$  ou le degré maximal des polynômes de Tchebychev  $N_T$ , les modèles A et B simulent bien la propagation des vagues sur des temps relativement longs.

Les cas-test du run-up et de la réflexion sur un mur d'une onde solitaire et de la

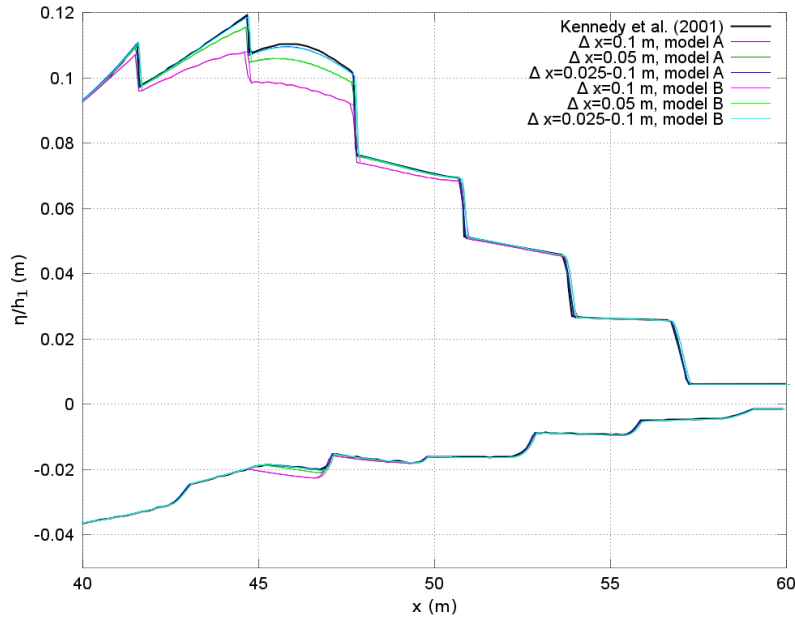


Figure 8 – Comparaison des enveloppes des crêtes et des creux du train de vagues avec les résultats de [12] pour  $a_1/h_1 = 0.125$ . Les six courbes colorées représentent les simulations des modèles A et B pour trois discrétisations différentes en  $x$  (voir la légende et le texte).

transformation d'un train d'ondes sur une bathymétrie variable confirment la capacité des modèles à simuler des vagues dispersives et non-linéaires, et ce jusqu'à des niveaux de non-linéarités élevés. Les modèles montrent un bon accord avec les résultats de [6] (en termes de hauteur maximum du run-up, et de temps d'attachement, de run-up maximum et de détachement) jusqu'à  $H/h = 0.6$ .

Le troisième cas-test, avec la propagation d'un train de vagues sur une bathymétrie variable, est un test fort de la capacité des modèles à simuler des vagues dispersives. Avec un raffinement de la discrétisation en  $x$  du domaine (surtout dans la zone où les vagues sont les plus élevées), les modèles A et B montrent des résultats en termes d'amplitude maximale des crêtes et creux des vagues en excellent accord avec ceux de [12]. La célérité des vagues est également bien reproduite.

Ces cas-tests confirment l'intérêt et la pertinence du modèle mathématique retenu (équations de Zakharov) pour des applications en zone côtière. Les deux approches de résolution du problème de Laplace sur le potentiel pour traiter le problème DtN (Dirichlet-to-Neumann), testées pour l'instant sur des domaines 2DV, montrent des résultats prometteurs et globalement équivalents. Elles se sont révélées stables dans l'ensemble et les temps de calcul restent raisonnables, même dans ces versions en développement, grâce au recours au solveur MUMPS et à l'utilisation de maillages irréguliers en cas de besoin. L'étude de convergence présentée et le cas-test d'une houle non-linéaire stable indiquent que, pour un niveau de résolution fixé sur la verticale (i.e.  $N_L = N_T$ ), le modèle B (approche spectrale en  $z$ , avec une base de polynômes de Tchebychev) donne des erreurs un peu plus faibles que celles du modèle A (discrétisation par différences finies en  $z$ ).

Ces modèles sont toujours en phase de développement, notamment pour prendre en compte la génération et l'absorption des vagues, dans le but de simuler d'autres cas et

de pouvoir confronter leurs résultats à des expériences en laboratoire. L'optimisation des temps de calcul, grâce à la parallélisation du code, ainsi que l'extension aux situations 3D, constituent les autres objectifs à court terme des développements.

## Références

- [1] Y. Agnon, P.A. Madsen, and H.A. Schäffer. A new approach to high-order Boussinesq models. *J. Fluid Mech.*, 399 :319–333, 1999.
- [2] P.R. Amestoy, I.S. Duff, J. Koster, and J.-Y. L'Excellent. A fully synchronous multi-frontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. of Matrix Analysis and Applications*, 23(1) :15–41, 2001.
- [3] P.R. Amestoy, A. Guermouche, J.-Y. L'Excellent, and S. Pralet. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32 :136–156, 2006.
- [4] H.B. Bingham and H. Zhang. On the accuracy of finite-difference solutions for nonlinear water waves. *J. Eng. Math*, 58 :211–228, 2007.
- [5] J.R. Chaplin. Developments of Stream-Function wave theory. *Coast. Eng.*, 3 :179–205, 1980.
- [6] M.J. Cooker, P.D. Weidman, and D.S. Bale. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *J. Fluid Mech.*, 342 :141–158, 1997.
- [7] D.G. Dommermuth and D.K.P. Yue. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 184 :267–288, 1987.
- [8] A.P. Engsig-Karup, H. B. Bingham, and O. Lindberg. An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves. *J. Comput. Phys.*, 228 :2100–2118, 2009.
- [9] M.F. Gobbi, J.T. Kirby, and G. Wei. A fully nonlinear boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to  $O((kh)^4)$ . *J. Fluid Mech.*, 405 :181–210, 2000.
- [10] S.T. Grilli and J. Horrillo. Shoaling of periodic waves over barred-beaches in a fully nonlinear numerical wave tank. *Int. J. Offshore Polar Eng*, 9(4) :257–263, 1999.
- [11] A.B. Kennedy and J.D. Fenton. A fully-nonlinear computational method for wave propagation over topography. *Coast. Eng.*, 32 :137–161, 1997.
- [12] A.B. Kennedy, J.T. Kirby, Q. Chen, and R.A. Dalrymple. Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance. *Wave Motion*, 33 :225–243, 2001.
- [13] P.A. Madsen, H.B. Bingham, and H. Liu. A new boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *J. Fluid Mech.*, 462 :1–30, 2002.
- [14] T. Maxworthy. Experiments on collisions between solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 76 :177–186, 1976.
- [15] O.G. Nwogu. Alternative form of boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 119(6) :618–638, 1993.
- [16] D.H. Peregrine. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, 27 :815–827, 1967.

- [17] M.M. Rienecker and J.D. Fenton. A Fourier approximation method for steady water waves. *J. Fluid Mech.*, 104 :119–137, 1981.
- [18] A. Savitzky and M.J.E. Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Anal. Chem.*, 36 :1627–1639, 1964.
- [19] R.A. Smith. An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, 363 :333–347, 1998.
- [20] M. Tanaka. The stability of solitary waves. *Phys. Fluids*, 29(3) :650–655, 1986.
- [21] Y. Tian and S. Sato. A numerical model on the interaction between nearshore nonlinear waves and strong currents. *Coast. Eng. Journal*, 50(4) :369–395, 2008.
- [22] G. Wei, J.T. Kirby, S.T. Grilli, and R. Subramanya. A fully nonlinear boussinesq model for surface waves : Part i. highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.*, 294 :71–92, 1995.
- [23] B.J. West, K.A. Brueckner, R.S. Janda, M. Milder, and R.L. Milton. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, 92 :11803–11824, 1987.
- [24] V.E. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 9(2) :190–194, 1968.