

**13<sup>èmes</sup> Journées de  
l'Hydrodynamique**

**21 - 23 novembre 2012**

**Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant  
Ile des Impressionnistes,  
Chatou (78), France**

**CHARGEMENTS HYDRODYNAMIQUES LORS DE  
L'IMPACT D'UN CORPS TRIDIMENSIONNEL SELON UNE  
CINEMATIQUE QUELCONQUE.**

*HYDRODYNAMIC LOADS DURING IMPACT OF A THREE  
DIMENSIONAL BODY WITH AN ARBITRARY KINEMATICS.*

**Y.-M. SCOLAN**

ENSTA-Bretagne, 2 rue F. Verny 29806 Brest Cedex 9 France,  
*yves-marie.scolan@ensta-bretagne.fr*

**Résumé**

Des avancées récentes dans la formulation du problème de Wagner tridimensionnel permettent de fournir le potentiel de déplacement relatif à un paraboloïde elliptique pénétrant, selon une cinématique quelconque, une surface libre plane. En se restreignant ici à une cinématique combinant les trois degrés de liberté en translation, des résultats expérimentaux valident l'approche théorique. On met aussi en évidence les occurrences de zone de pression plus faible que la pression atmosphérique. Cela laisse penser que des phénomènes de cavitation peuvent se produire.

**Summary**

Recent advances in the formulation of the three-dimensional Wagner problem are achieved and provide the displacement potential for an elliptic paraboloid penetrating a flat free surface with an arbitrary kinematics. By considering the three degrees of freedom of translational motion, experimental data confirm the theoretical predictions. It is also possible to detect the occurrences of low pressure, smaller than atmospheric pressure. Therefore cavitation effects are expected.

# 1 Introduction

Même si le problème de l'impact hydrodynamique selon une cinématique verticale (connu comme le problème classique de Wagner linéarisé) reste un problème ouvert pour une forme quelconque, on en connaît cependant des solutions exactes pour des corps de forme simple. C'est le cas du paraboloïde elliptique que l'on étudie ici.

Lorsqu'un objet pénètre une surface libre avec une cinématique plus complexe qu'un mouvement purement vertical, on pensera raisonnablement que le problème est beaucoup plus compliqué.

En fait pour toutes les formes dont on connaît le potentiel de déplacement analytiquement –dans le meilleur des cas– on peut formuler le problème aux limites quelle que soit la cinématique de pénétration dans le fluide.

On examine ici les prédictions théoriques des chargements hydrodynamiques locaux, à savoir la pression. On regarde quelles sont les différences entre une cinématique purement verticale et une cinématique combinant mouvements vertical et horizontal.

Pour mettre en évidence ces différences, deux approches, théorique et expérimentale, sont envisagées. Les développements théoriques ont fait l'objet de communications notamment dans Scolan et Korobkin (2012a et b) ainsi que dans Moore *et al* (2012a et b). On ne décrit ici que les principaux résultats.

En pratique on considère un corps de type paraboloïde elliptique, pénétrant une surface libre plane selon une cinématique quelconque. On formule ce problème sous l'hypothèse du disque plat dans le cadre de la théorie linéarisée de Wagner. Cette approximation est désormais largement admise: elle suppose que l'angle mort est faible. Pour un paraboloïde elliptique, les rayons de courbures sont donc grands: de l'ordre du mètre.

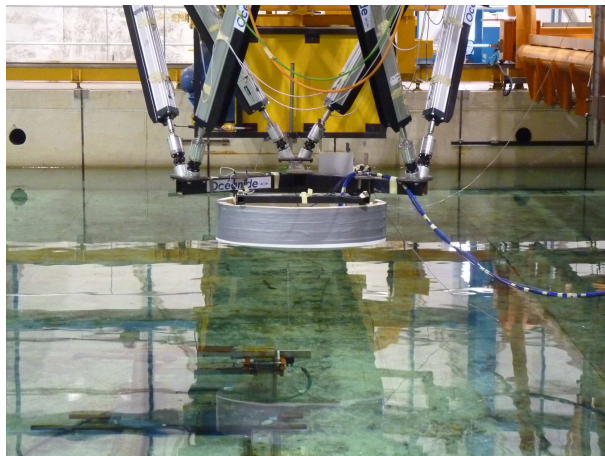
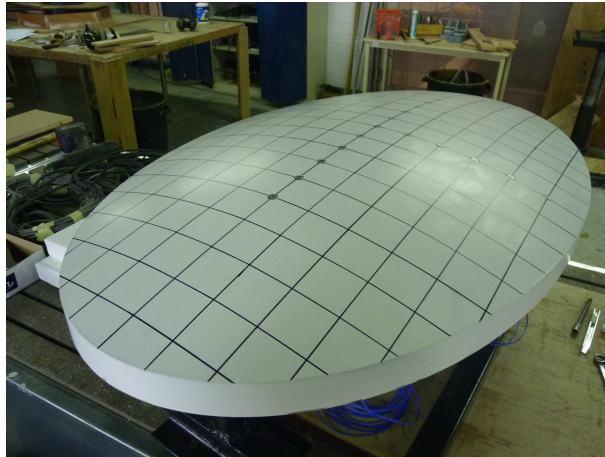
Le problème aux limites est formulé en théorie potentielle, en absence de gravité et d'effets de tension superficielle. En utilisant le potentiel de déplacement (intégrale en temps du potentiel des vitesses), on réduit le problème mixte Neumann-Dirichlet à une équation intégrale dont la solution générale existe mais pour laquelle un algorithme robuste de résolution n'existe pas encore (voir Scolan et Korobkin, 2008 et 2012c). Cette équation intégrale, par contre permet d'invoquer le théorème de Galin (voir Vorodich *et al*, 1974). Ce théorème s'applique aux problèmes pour lesquels la surface d'intégration est elliptique; c'est le cas ici. Le résultat principal (aidé en cela par les résultats de Stephan, 1987) est que si le second membre de l'équation intégrale est polynomial alors l'intégrand (hormis le noyau de Green) l'est également et de même degré. C'est là un raccourci considérable aux résultats exposés dans Scolan et Korobkin (2001). On peut alors montrer que pour un couple de rayons de courbure au point de contact initial, correspond un unique rapport d'aspect de la surface mouillée elliptique et que les demi-axes de cette ellipse dépendent uniquement de la hauteur de pénétration. Mieux on montre qu'en absence de mouvements de rotation (roulis, tangage, lacet) l'effort hydrodynamique vertical reste inchangé quelles que soient les composantes de vitesse horizontale. Enfin on met en évidence l'existence d'une vitesse horizontale critique au delà de laquelle la pression peut s'annuler sur la ligne de contact bornant la surface mouillée.

Ces résultats théoriques méritent une confirmation expérimentale. Des essais ont été réalisés dans le cadre du projet européen TULCS. La section (2) qui suit rend compte des résultats obtenus lors de cette campagne expérimentale. Les développements théoriques

sont succinctement exposés en section (3). La validation des résultats est décrite en section (4).

## 2 Campagne expérimentale

Le projet européen TULCS (Tools for Ultra Large Container Ships) et le GIS-Hydro (supporté par le Conseil Général du Var) cofinancent cette campagne expérimentale menée au BGO First (la Seyne/mer) fin 2011. Le but de cette campagne est de forcer un corps à pénétrer une surface libre au repos ou en mouvement à des vitesses combinant une cinématique verticale et horizontale. Le corps est un paraboloïde elliptique; la figure suivante montre la forme usinée



Cet objet est fixé sur l'hexapode du BGO qui assure le mouvement forcé. L'instrumentation consiste en des capteurs de pression (type PCB fournis et calibrés par l'Ecole Centrale Marseille), des capteurs d'effort, des accéléromètres et des cibles aériennes pour le suivi trajectographique de type Krypton. La fréquence d'acquisition est de 10 KHz pour la pression, les efforts et les accéléromètres. Une caméra immergée enregistre l'expansion de la surface mouillée, sa fréquence est de 200 Hz.

Cette campagne reste une étude très préliminaire dans la mesure où peu d'essais sont complets. De surcroît, des problèmes de rigidité du dispositif ne permettent pas d'exploiter correctement la mesure de l'effort horizontal. Curieusement il apparaît que seule la mesure

de la pression donne des éléments de comparaison avec les modèles théoriques exposés dans ce papier. Des recommandations peuvent donc être formulées pour des campagnes futures dans ce domaine.

### 3 Développements théoriques

Le problème aux limites est formulé en théorie potentielle pour le potentiel des déplacements  $\phi$ , intégrale en temps du potentiel des vitesses,

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & z < 0 \\ \phi = 0 & z = 0, (x, y) \in \text{FS}(t) \\ \phi_{,z} = -h(t) + f(x, y) & z = 0, (x, y) \in \text{D}(t) \\ \phi \rightarrow 0 & (x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\text{D}(t)$  et  $\text{FS}(t)$  désignent respectivement la surface mouillée en expansion et la surface libre, c'est à dire le complémentaire de  $\text{D}(t)$  dans le plan horizontal  $z = 0$ . A tout instant la forme du corps est donnée par la fonction  $z = -h(t) + f(x, y)$  dans le repère attaché au plan  $z = 0$ . La pénétration du corps est donc  $h(t)$  et on suppose à ce stade que la cinématique est purement verticale à la vitesse  $W(t) = \dot{h}$ . A l'instant initial de pénétration, un parabolôïde elliptique est décrit par l'équation

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2r_x} + \frac{y^2}{2r_y} \quad (2)$$

où  $(r_x, r_y)$  sont les deux rayons de courbures au point de contact initial  $(x, y) = (0, 0)$ . Pour cette forme particulière, le problème aux limites (1) a une solution analytique

$$\phi(x, y, t) = -\frac{2ha}{3E} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2} \quad (3)$$

où  $(a, b)$  désignent les longueurs des demi-axes de la surface mouillée  $\text{D}(t)$

$$a = \sqrt{2r_x h \left(2 - k^2 \frac{D}{E}\right)}, \quad b = \sqrt{2r_y h \left(1 + k^2 \frac{D}{E}\right)}, \quad (4)$$

Le rapport d'aspect  $k = a/b$  dépend uniquement de  $k_\gamma$  celui du parabolôïde elliptique  $k_\gamma = \sqrt{\frac{r_x}{r_y}}$ . Les fonctions  $E$  et  $D$  sont les fonctions intégrales elliptiques

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}, \quad D = (K - E)/e^2 \quad (5)$$

et ne dépendent que de l'excentricité  $e = \sqrt{1 - k^2}$ . On peut aussi noter que, quelle que soit la vitesse verticale, les longueurs  $(a, b)$  varient comme la racine carrée de la hauteur de pénétration.

Si la cinématique de pénétration combine dorénavant vitesse horizontale et verticale, on introduit les nouvelles variables

$$\tilde{x} = x - \delta x, \quad \tilde{y} = y - \delta y \quad (6)$$

où  $(\delta x, \delta y)$  sont les déplacements horizontaux. Avec les variables  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  on peut reformuler le problème aux limites (1). On constate que la condition de Neumann conserve sa forme et par conséquent le potentiel de déplacement solution de (1) s'écrit

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = -\frac{2ha}{3E} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2}\right)^{3/2} \quad (7)$$

On en déduit que la dynamique d'expansion de la surface mouillée n'est pas affectée par la vitesse horizontale. Il n'en est pas de même pour la pression, puisqu'en première approximation on a

$$p = -\rho\varphi_{,t} = -\rho\phi_{,t^2} \quad (8)$$

Si l'on fait le changement de coordonnées horizontales

$$\xi = \sqrt{2} \left( \dot{a} + \frac{U}{a} \tilde{x} + \frac{kV}{b} \tilde{y} \right), \quad \eta = \frac{U}{a} \tilde{y} - \frac{kV}{b} \tilde{x} \quad (9)$$

et sous l'hypothèse que les vitesses de translation (horizontale et verticale) sont constantes, on montre que  $p$  peut s'écrire

$$p = \frac{\rho W}{\dot{a} E \sqrt{F}} \left( \frac{1}{2} \dot{a}^2 - U^2 - k^2 V^2 + \xi^2 + \eta^2 \right), \quad F = 1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} \quad (10)$$

L'analyse de cette distribution de pression sur la surface mouillée met en évidence des variations spatio-temporelles particulières. De l'équation (10) il est difficile de déduire les lignes isobares à cause du facteur  $\sqrt{F}$ . Par contre il apparaît que dans le système de coordonnées  $(\xi, \eta)$  on peut définir les régions où la pression s'annule et change de signe<sup>1</sup>, cela se produit le long du cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = U^2 + k^2 V^2 - \frac{1}{2} \dot{a}^2 \quad (11)$$

On en déduit l'instant auquel la pression peut commencer à s'annuler

$$t_o = \frac{W r_x (2 - k^2 \frac{D}{E})}{4(U^2 + k^2 V^2)} \quad (12)$$

au delà de cet instant, une partie de la surface mouillée est le support d'une pression négative. Cela se produit dans un laps de temps d'autant plus court que la cinématique horizontale est importante relativement à la vitesse de chute.

Pour illustrer on considère qu'une seule composante de vitesse horizontale  $V \neq 0$ . La pression se simplifie en

$$p = \frac{\rho k V W}{E \sqrt{F}} \left( m - \frac{1}{2m} \right) \left[ \frac{\tilde{x}^2}{a^2 \left(1 - \frac{1}{2m^2}\right)} + \frac{\left(\tilde{y} + \frac{1}{2m}\right)^2}{\frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2m^2}\right)} - 1 \right], \quad m = \frac{2Vh}{bW} = \frac{V}{\dot{b}} \quad (13)$$

Cette expression prend du sens lorsque  $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$  ce qui signifie que l'on a passé le temps limite  $t > t_o$ . On reconnaît entre crochet l'équation d'une ellipse centrée au point  $\tilde{x} = 0$  et  $\tilde{y} = -\frac{1}{2m}$  de rapport d'aspect constant  $\frac{k}{\sqrt{2}}$ . L'expression de la pression (13) montre aussi

---

<sup>1</sup>Il est clair que cela signifie que la pression devient inférieure à la pression atmosphérique.

que, dans le système de coordonnées centré sur l'axe du parabolôïde elliptique  $(x, y) = (\delta x, \delta y)$ , le support de la pression négative croît comme  $\sqrt{t^2 - t_o^2}$ . Enfin on constate que la pression s'annule sur la ligne de contact en  $\tilde{y} = b$  à l'instant correspondant à  $m = 1$ , c'est à dire à l'instant où la vitesse d'expansion  $\dot{b}$  de la surface mouillée suivant l'axe des  $y$  est égale à la vitesse horizontale  $V$ . Cet instant vaut  $2t_o$ . Ces résultats sont purement théoriques et méritent une confrontation à des résultats expérimentaux. La campagne réalisée au BGO ne permet pas de reproduire ces phénomènes. Comme exemple on calcule la vitesse horizontale nécessaire pour que l'instant  $t_o$  soit inférieur au temps de pénétration avant séparation de l'écoulement, celui ci étant de l'ordre de 45 millisecondes. On devrait atteindre une vitesse horizontale  $V \approx 3.8m/s$ , ce qui n'est pas permis par l'hexapode utilisé.

On peut améliorer la formulation de la pression en utilisant le Modèle de Logvinovich Modifié (MLM) tel qu'introduit par Korobkin et Malenica (2005). En tenant compte des composantes de vitesse horizontale  $(U, V)$  et verticale  $W$ , après quelques développements, on obtient

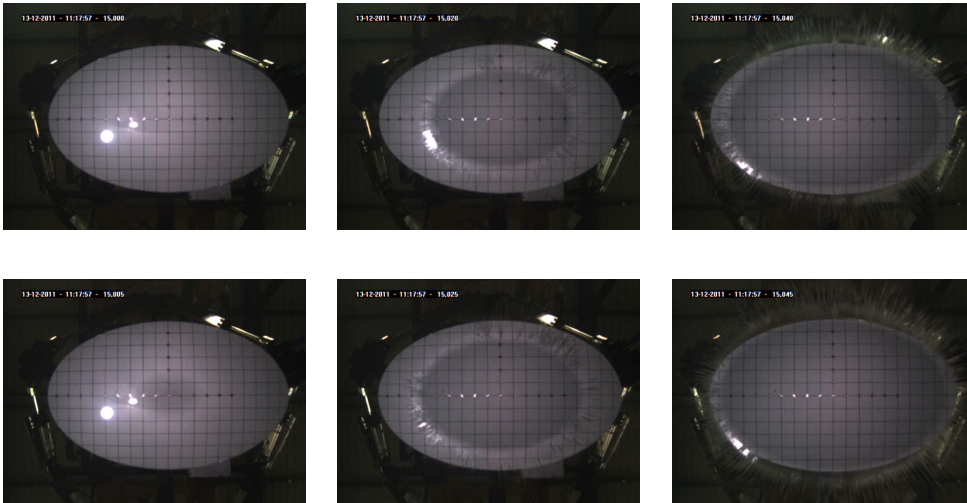
$$-\frac{1}{\rho}P_{mlm}(x, y, t) = \varphi_{,t}^{(l)} - \dot{W}(f(x - \delta x, y - \delta y) - h) + \frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2\varphi^{(l)} - \frac{\left((\vec{\nabla}\varphi^{(l)} - \vec{v}) \cdot \vec{\nabla}f\right)^2}{2(1 + \vec{\nabla}^2f)} \quad (14)$$

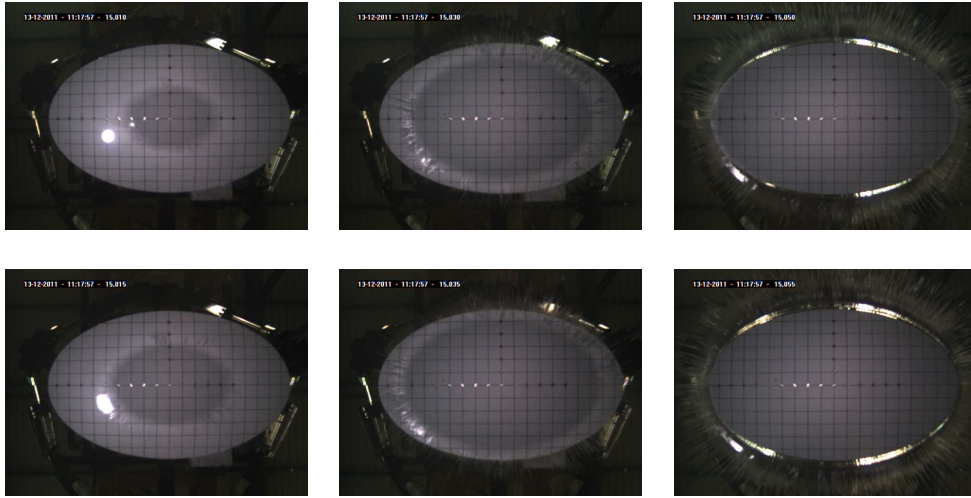
où  $\varphi^{(l)}$  désigne le potentiel des vitesses solution du problème de Wagner linéarisé et  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse  $\vec{v} = -W\vec{z} + U\vec{x} + V\vec{y}$ . Les comparaisons entre les formulations (8) et (14) faites dans Scolan et Korobkin (2012b) ne montrent pas des différences notables. Avec la pression MLM, on peut néanmoins évaluer l'effort horizontal par intégration numérique de la distribution de pression. Cela permet d'évaluer la correction de l'effort horizontal qui, en première approximation, est nul. Cela fait l'objet de futurs travaux.

## 4 Discussion

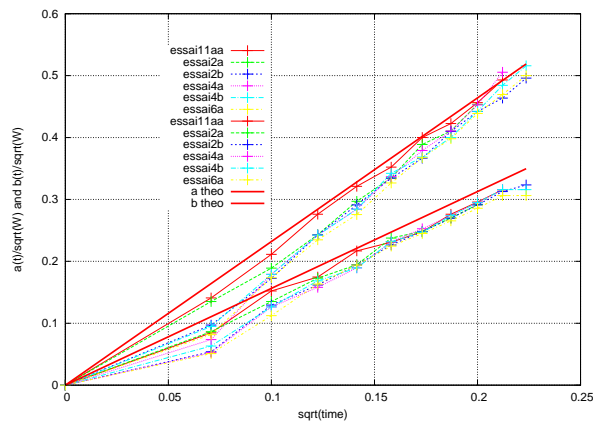
Les figures suivantes montrent un exemple de variation temporelle de la surface mouillée.

$$W = 0.8600m/s, \quad V = 0.4650m/s$$



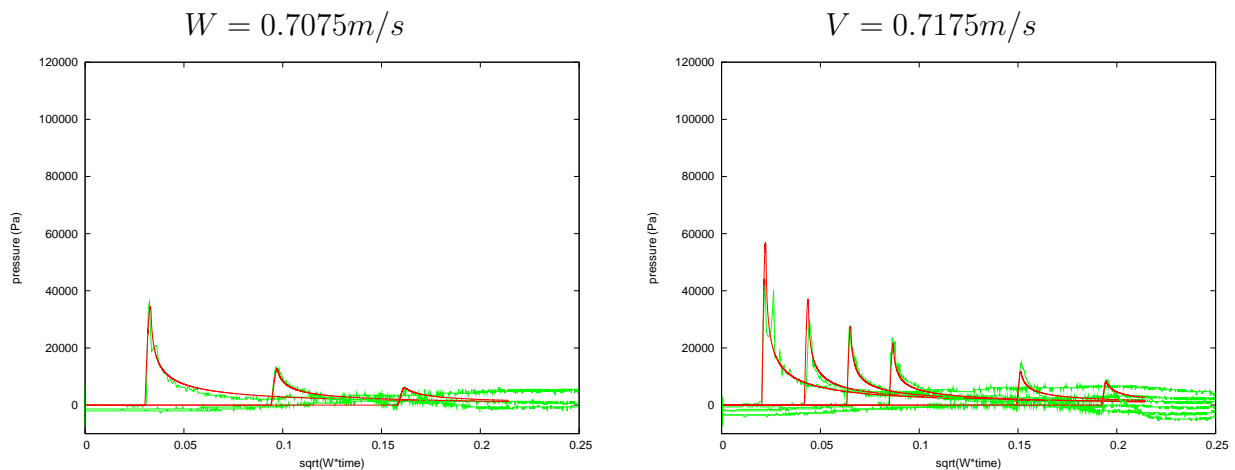


Le recensement des différents essais (complets) réalisés pour un couple de vitesse horizontale  $V$  et verticale  $W$ , permet de reproduire approximativement les variations théoriques comme l'illustre la figure suivante qui montre les variations de  $a$  et  $b$  adimensionnalisées par  $\sqrt{W}$  en fonction de  $\sqrt{t}$ .

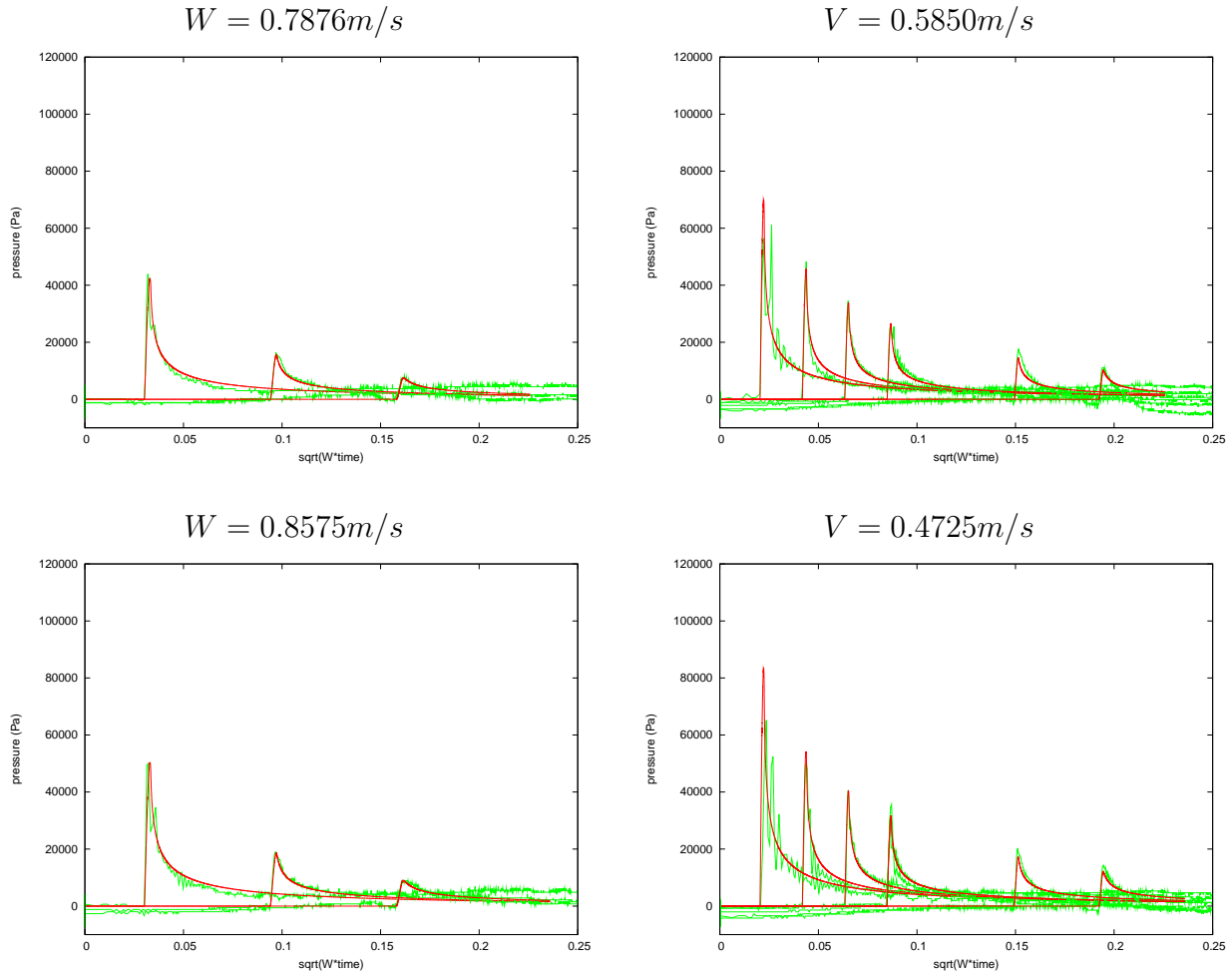


Les erreurs de mesure de  $a$  et  $b$  sont relativement importantes, de l'ordre de 2 à 3 cm car on cherche la transition sur la base d'un faible contraste.

Concernant la pression, on obtient curieusement un meilleur accord relatif. Les courbes suivantes montrent les variations temporelles des signaux de pression expérimentale et théorique.







La pression est mesurée en trois et six points respectivement le long du petit axe et du grand axe. La pression théorique est fournie par le Modèle de Logvinovich Modifié (équation 14). Cette pression numérique est moyennée sur la surface des capteurs. Les capteurs utilisés lors des expériences ont une surface circulaire de rayon  $r_{\text{capteur}} \approx 2.5mm$ . On suppose que la technologie des capteurs fait que la pression est mesurée de la même façon quel que soit l'endroit où l'on se trouve sur la surface du capteur. L'origine en temps est ajustée afin de faire correspondre les instants où la pression commence à croître, c'est à dire quand le capteur est mouillé. D'un capteur à un autre le différentiel en temps qui permet cet ajustement est inférieur à la milliseconde.

Excepté sur le premier capteur du grand axe, où la pression est assez bruitée, l'accord entre résultats numérique et expérimental est satisfaisant. Cela est vrai non seulement sur la pente de la phase croissante de la pression mais aussi sur le maximum. Les raisons sont liées aux faibles vitesses étudiées. Des vitesses plus importantes conduisent à des montées en pression très rapides et une mesure de pic qui souffre souvent de beaucoup de dispersion.

## 5 Conclusion

Quelques résultats théoriques nouveaux concernant l'impact tridimensionnel sont présentés. Le problème est formulé dans le cadre de la théorie potentielle et sous l'hypothèse classique



du disque plat; on résout ainsi le problème de Wagner linéarisé.

La prise en compte d'une cinématique de pénétration quelconque est possible dès que l'on est capable de poser et résoudre le problème aux limites à l'aide du potentiel de déplacement. Dans le cas du paraboloïde elliptique, grâce au théorème de Galin, on peut calculer la solution analytiquement.

L'approche théorique est validée par des résultats expérimentaux. Les comparaisons sur l'expansion de la surface mouillée sont peu concluantes. Sur les pressions l'accord global est satisfaisant non seulement sur les pics mais aussi sur la variation temporelle lorsque le capteur est progressivement mouillé.

Il apparaît important de procéder à de nouvelles campagnes expérimentales susceptibles de vérifier l'apparition d'une pression inférieure à la pression atmosphérique. Cela pourrait se manifester par la formation d'une poche de cavitation. Pour une telle campagne de mesure il faut disposer d'une machine générant des mouvements horizontaux à grande vitesse.

### **Remerciements:**

La campagne expérimentale a été financée par le projet européen TULCS ainsi que par une subvention du Conseil Général du Var.

### **Références**

1. Scolan Y.-M. and A. A. Korobkin, 2008, Towards a solution of the three-dimensional Wagner problem. 23<sup>rd</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Korea.
2. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. and Babeshko V.A, 1974, Non-classical Mixed Problems of the Theory of Elasticity, Nauka, Moscow.
3. Stephan E.P., 1987, Boundary integral equations for mixed boundary value problems in  $R^3$  Math. Nachrichten 134, pp 21–53.
4. Scolan Y.-M. & Korobkin A.A., 2001, Three-dimensional theory of water impact. Part 1. Inverse Wagner problem. J. Fluid Mech, 440, pp 293-326.
5. Moore, M. R. and Howison, S. D. and Ockendon, J. R. and Oliver, J. M. 2012a, A note on oblique water entry. Journal of Engineering Maths.(Submitted)
6. Moore, M. R. and Howison, S. D. and Ockendon, J. R. and Oliver, J. M. 2012b, Three-dimensional oblique water-entry problems at small deadrise angles. Journal of Fluid Mechanics.(Submitted)
7. Scolan Y.-M. & A. A. Korobkin, 2012a, Hydrodynamic impact (Wagner) problem and Galin's theorem. 27<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 22-25 April, 2012, Copenhagen, Denmark.
8. Scolan Y.-M. & A. A. Korobkin, 2012b, Low pressure occurrence during hydrodynamic impact of an elliptic paraboloid entering with arbitrary kinematics. International Conference on Violent Flows, Nantes, France, September, 25-27 2012.

9. Scolan Y.-M. & A. A. Korobkin, 2012c, Mixed Boundary Value Problem in Potential Theory. Application to the hydrodynamic impact (Wagner) problem Comptes Rendus Mécaniques DOI.10.1016/j.crme.2012.09.006.
10. Korobkin A.A. & S. Malenica, Modified logvinovich model for hydrodynamic loads on asymmetric contours entering water, 20<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Spitzbergen, Norway, 2005.