

DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE SIMULATION
NUMÉRIQUE BASÉ SUR L'APPROCHE
WEAK-SCATTERER POUR L'ÉTUDE DES SYSTÈMES
HOULOMOTEURS EN GRANDS MOUVEMENTS

*EXPRESSION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS
INTÉGRALES POUR UNE DISCRÉTISATION LINÉAIRE
DE LA GÉOMÉTRIE*

L. LETOURNEL*, P. FERRANT, A. BABARIT, G. DUCROZET,

LUNAM Université, École Centrale de Nantes
Laboratoire d'Hydrodynamique, d'Énergétique et d'Environnement Atmosphérique,
CNRS UMR6598

Équipe Énergies Marines et Océan,

École Centrale de Nantes, BP 92101, 44321 NANTES Cedex 3

* *lucas.letournel@ec-nantes.fr*

Résumé

L'objectif final de ce projet est de développer un outil numérique dédié aux systèmes flottants à grands déplacements. La formulation faiblement non linéaire *Weak-Scatterer* a été choisie pour obtenir un compromis précision/temps de calcul équivalent à celui des codes potentiels usuels. Afin de garder une cohérence avec ce choix, nous avons décidé d'adopter une discrétisation linéaire de la géométrie. Le calcul des coefficients d'influence doit alors être développé en accord avec cette hypothèse. Cependant nous avons été confrontés à la difficulté de trouver les expressions analytiques complètes avec une discrétisation linéaire dans des publications antérieures. Nous avons alors développé de telles expressions à partir des travaux sur les panneaux constants de P.Guevel [3] et de notes manuscrites de P.Ferrant [2] sur la discrétisation linéaire. Ces développements sont présentés ici, avec leurs validations.

Summary

The final goal of this project is to create a computer code dedicated to floating systems with large motions. The weakly non-linear formulation *Weak-Scatterer* have been chosen to keep an agreement between precision and cpu time equivalent to usual linear codes'. The calculation of the influence coefficients needs also to take into account this hypothesis. However, we found no publication presenting the analytical expressions of the integral equations with such discretisation. Thus, we developed these expressions, from previous works on constant discretisation, by P. Guevel[3] and P. Ferrant[2]. These developments are presented in this article, along with their validations.

I – Introduction

I – 1 Cadre de l'étude

Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet **MONACOREV** : Méthode et Outils Numériques d'Aide à la Conception de Récupérateurs de l'Énergie des Vagues [4]. Ce projet, financé par l'Agence Nationale pour la Recherche, s'intéresse aux problèmes spécifiques que posent les récupérateurs d'énergies de houle. Aux différentes échelles, ce sont notamment :

- Simuler des réponses en mouvement de **grande amplitude** de flotteurs, précisément et sur de longue durée, à l'échelle locale d'un système houlomoteur.
- Prédire les interactions de vagues dans des parcs **composés d'un grand nombre de machines**, à l'échelle de ces parcs.
- Enfin, déterminer l'**impact** d'une ferme houlomotrice **sur le climat de vagues**, à l'échelle régionale.

On se place dans cette étude à l'échelle du système houlomoteur. L'approche choisie est basée sur une formulation **Weak-Scatterer**. Dans cette approche, les champs rayonnés et diffractés sont supposés petits devant le champ incident. Aucune hypothèse n'est faite sur la houle incidente et sur le mouvement du corps. Il en résulte une linéarisation des conditions de surface libre par rapport à la déformée incidente de surface libre, et non par rapport au niveau d'eau moyen. Les conditions sur le corps sont également posées sur la position du corps, mis en mouvement par la houle incidente. Le cadre théorique permet donc de traiter des problèmes non linéaires pour les mouvements, tout en conservant les avantages de l'approche potentielle : à savoir la possibilité de simuler la propagation de la houle aisément, et des temps CPU raisonnables. Initiée par Pawlowski, [7], cette formulation a connu relativement peu de développements [5][6][1], les théories linéarisées suffisant aux majorités des cas d'application.

I – 2 Avantages de la discrétisation linéaire

La discrétisation linéaire de la géométrie consiste à faire varier linéairement les valeurs du potentiel et de la vitesse normale sur les facettes. Cela présente des avantages sur une discrétisation à panneaux constants, notamment en terme de précision. Avec une discrétisation des valeurs sur la géométrie d'un ordre supérieur, on s'attend en effet à obtenir des résultats plus précis. De plus, les points de contrôle en linéaire sont les nœuds du maillage et non plus les centres des facettes. Avec un maillage bien conçu, on peut alors réduire notre nombre de points de contrôle de moitié. Avec une description isoparamétrique de la discrétisation, on peut également avoir accès aux gradients des valeurs aux nœuds assez aisément, ce qui sera utile dans la résolution des conditions limites de surface libre. En contrepartie, les expressions analytiques des coefficients d'influence se complexifient.

I – 3 Plan

L'objectif de cet article est de présenter les développements et la validité de la solution analytique des équations intégrales. Nous rappellerons en premier lieu les équations intégrales à traiter pour le calcul des coefficients d'influence, ainsi que la description de la discrétisation linéaire. Nous exposerons ensuite les expressions analytiques et leurs développements. Enfin nous présenterons la validation de ces expressions à l'aide d'un cas test simple donc la solution analytique est connue.

II – Equations Intégrales

II – 1 Problème de Laplace

On considère un domaine fluide, \mathcal{D} incompressible, non visqueux et un écoulement irrotationnel.

L'hypothèse d'irrotationalité nous permet d'introduire un potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{\nabla}\phi && \text{dans le domaine fluide} && (1) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{z} \\ &= V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}\end{aligned}$$

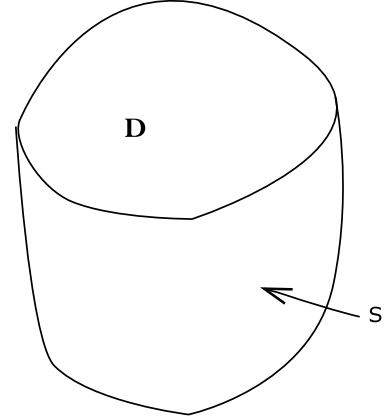


Figure 1: Domaine considéré

On peut également écrire, d'après l'hypothèse de fluide incompressible, $div(\vec{V}) = div(\vec{\nabla}\phi) = 0$.

On retrouve l'équation de Laplace dans le fluide : $\nabla^2\phi = 0$.

La Seconde Identité de Green donne, sur la surface \mathcal{S} délimitant le domaine :

$$\phi(M) \cdot \Omega(M) + \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P - \iint_{\mathcal{S}} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P = 0 \quad (2)$$

Avec M , point de contrôle et $\Omega(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$, l'angle solide au point M de la surface \mathcal{S} . G est dans notre cas la source de Rankine : $G(M, P) = \frac{1}{MP}$.

Les intégrales à calculer sont donc :

$$I_\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P \quad (3)$$

$$I_\mu = \iint_{\mathcal{S}} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P \quad (4)$$

II – 2 Discrétisation Linéaire des Facettes

On considère un maillage triangulaire. L'hypothèse de variation linéaire des variables sur les facettes implique que les points de contrôle sont les nœuds des facettes et non pas les centres des facettes comme il est courant avec une densité constante des variables sur les facettes. L'évolution des grandeurs sur la facette i s'écrit alors :

- $\frac{\partial\phi(P)}{\partial n_P} = \sigma(P) = \sigma(G_i) + \vec{\nabla}_s\sigma_i \cdot \overrightarrow{G_iP}$
- $\phi(P) = \mu(P) = \mu(G_i) + \vec{\nabla}_s\mu_i \cdot \overrightarrow{G_iP}$

G_i est le centre de la facette i , tandis que $\vec{\nabla}_s\sigma_i$ et $\vec{\nabla}_s\mu_i$ sont les gradients surfaciques des grandeurs considérées. Ils s'expriment en fonction du paramétrage de la facette (cf figure ci-dessous)

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{\Delta} \cdot \vec{\Sigma} \cdot \begin{pmatrix} f(P_1) \\ f(P_2) \\ f(P_3) \end{pmatrix} \quad (5)$$

avec

- $\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} -(\vec{A} + \vec{B}) & \vec{A} & \vec{B} \end{bmatrix}$
- $\vec{A} = \|\vec{P_1P_3}\|^2 \cdot \vec{P_1P_2} - (\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P_3}) \cdot \vec{P_1P_3}$
- $\vec{B} = -(\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P_3}) \cdot \vec{P_1P_2} + \|\vec{P_1P_2}\|^2 \cdot \vec{P_1P_3}$
- $\Delta = \|\vec{P_1P_2}\|^2 \cdot \|\vec{P_1P_3}\|^2 - (\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P_3})^2$

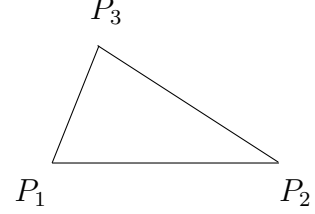


Figure 2: Paramétrage

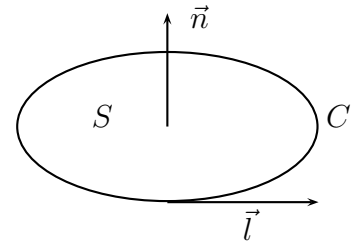
II – 3 Intégrale $I_{\sigma,i} = \iint_{S_i} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P$

Cette intégrale peut se transformer en supposant une discrétisation linéaire en :

$$\begin{aligned} I_{\sigma,i} &= \sigma(G_i) \cdot \iint_{S_i} \frac{1}{MP} \cdot dS_P + \vec{\nabla}_S(\sigma_i) \cdot \iint_{S_i} \frac{\vec{G_iP}}{MP} \cdot dS_P \\ &= (\sigma(G_i) + \vec{\nabla}_S(\sigma_i) \cdot \vec{G_iM}) \cdot \iint_{S_i} \frac{1}{MP} \cdot dS_P + \vec{\nabla}_S(\sigma_i) \cdot \iint_{S_i} \frac{\vec{MP}}{MP} \cdot dS_P \\ &= (\sigma(G_i) + \vec{\nabla}_S(\sigma_i) \cdot \vec{G_iM}) \cdot \iint_{S_i} \frac{1}{MP} \cdot dS_P + \vec{\nabla}_S(\sigma_i) \cdot \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n}_P \wedge \vec{dl}_P \end{aligned}$$

En effet, $\frac{\vec{MP}}{MP} = \vec{\nabla} MP$. La transformation de l'intégrale sur la surface en intégrale sur le contour est réalisée grâce à la formule de Kelvin inversée :

$$\iint_S \vec{\nabla}(f) \cdot dS = \oint_C f \cdot \vec{n}_S \wedge \vec{dl}$$



D'après les définitions que l'on a données de $\sigma(G)_i$ et $\vec{\nabla}_{\sigma_i}$, on peut alors écrire cette intégrale comme :

$$I_{\sigma,i} = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \vec{I}_3 + \vec{\Sigma}^T \cdot \vec{G_iM} \right) \cdot \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS_P - \left(\vec{\Sigma}^T \cdot \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n}_P \wedge \vec{dl}_P \right) \right] \cdot \begin{pmatrix} \sigma(P_1) \\ \sigma(P_2) \\ \sigma(P_3) \end{pmatrix} \quad (6)$$

II – 4 Intégrale $I_{\mu,i} = \iint_{S_i} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$

De la même façon que pour l'intégrale précédente, on peut écrire $I_{\mu,i}$ comme :

$$\begin{aligned} I_{\mu,i} &= (\mu(G_i) + \vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \overrightarrow{G_i M}) \cdot \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P \\ &+ \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} \vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \overrightarrow{MP} dS_P \end{aligned}$$

La seconde intégrale peut se transformer en intégrale sur le contour à l'aide de la fonction vectorielle :

$$\vec{F} = -G(M, P) \cdot \vec{\nabla}_S(\mu_i) \wedge \overrightarrow{MP} \quad (7)$$

On remarque que le rotationnel de cette fonction contient les termes que nous cherchons à intégrer :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\mu}_i \cdot \overrightarrow{MP} \cdot \vec{\nabla} G(M, P) - G(M, P) \cdot \vec{\nabla}_S(\mu_i) \quad (8)$$

On obtient alors :

$$\iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} \vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \overrightarrow{MP} dS_P = \vec{n}_P \cdot \vec{\nabla}_S(\mu_i) \iint_{S_i} G(M, P) \cdot dS_P + \iint_{S_i} \vec{\text{rot}}(\vec{F}) dS_P \quad (9)$$

Avec :

- $\vec{n}_P \cdot \vec{\nabla}_S(\mu_i) = 0$
- $\iint_{S_i} \vec{\text{rot}}(\vec{F}) dS_P = \oint_{C_i} \vec{F} \cdot \vec{dl}_P$, d'après le théorème de Stokes.

En exprimant la fonctionnelle F ,

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \vec{F} \cdot \vec{dl}_P &= \oint_{C_i} -\frac{1}{MP} \left(\vec{\nabla}_S(\mu_i) \wedge \overrightarrow{MP} \right) \cdot \vec{dl}_P \\ &= -\vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge \vec{dl} \quad \text{car } (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \end{aligned}$$

Soit l'intégrale $I_{\mu,i}$

$$I_{\mu,i} = \left(\mu_{G_i} + \vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \overrightarrow{G_i M} \right) \cdot \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P - \vec{\nabla}_S(\mu_i) \cdot \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge \vec{dl} \quad (10)$$

Et d'après les définitions de $\vec{\nabla}_S(\mu_i)$ et μ_{G_i}

$$I_{\mu,i} = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \vec{I} + \overrightarrow{G_i M} \cdot \vec{\Sigma} \right) \cdot \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P - \left(\oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge \vec{dl} \right) \cdot \vec{\Sigma} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

III – Calcul Analytique

III – 1 Intégrale $S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS_P$

III – 1.1 Cas régulier

Pour $M \notin S_i$, l'intégrale S_σ possède une solution analytique donnée par P. Guevel [3].

$$S_\sigma = \sum_{k=1}^3 J_k^s \quad (12)$$

$$J_k^s = Y_k \cdot \log \frac{N_k^1}{D_k^1} - 2 |Z| \operatorname{Arctg} \left(\frac{N_k^t}{D_k^t} \right) \quad (13)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_k = \|\overrightarrow{P_k M}\|, & d_k = \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| \\ Z = \overrightarrow{G_i M} \cdot \vec{n}_i, & Y_k \cdot d_k = \overrightarrow{P_k M} \cdot (\vec{n}_i \wedge \overrightarrow{P_k P_{k+1}}) \\ N_k^1 = R_{k+1} + R_k + d_k, & D_k^1 = R_{k+1} + R_k - d_k \\ N_k^t = 2 \cdot Y_k \cdot d_k, & D_k^t = (R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2 |Z| \cdot (R_{k+1} + R_k) \end{array} \right.$$

III – 1.2 Singularité

Lorsque M appartient à la facette intégrée, il se pose un problème de singularité, traité de la façon suivante. On suppose $M = P_1$. Toute solution déterminée dans ce cas précis vaudra également pour $M = P_2$ ou $M = P_3$, en réordonnant les sommets.

Soient,

- $\vec{i} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 P_3})$
- $\vec{j} = \overrightarrow{P_2 P_3}$
- $\vec{h} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

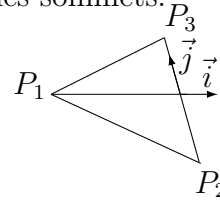


Figure 3: Schéma

$$S_\sigma = \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{j^2}} \cdot [\operatorname{argsh}(a+b) - \operatorname{argsh}(-a+b)] \quad (14)$$

avec $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{j^2}{\sqrt{\Delta}}$, $b = \frac{(\vec{i} \cdot \vec{j})}{\sqrt{\Delta}}$ et $\Delta = \vec{i}^2 \cdot \vec{j}^2 - (\vec{i} \cdot \vec{j})^2$.

III – 2 Intégrale $\vec{I}_\sigma = \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n}_P \wedge \vec{dl}_P$

L'intégrale I_σ peut se décomposer sur chacun des côtés de la facette.

On calcule alors $\vec{I}_{AB} = \int_A^B MP \cdot dl \cdot \vec{s}$ puis on somme vectoriellement sur chaque coté de la facette.

$$\vec{I}_\sigma = \vec{I}_{AB} + \vec{I}_{BC} + \vec{I}_{CA} \quad (15)$$

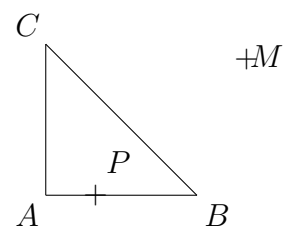


Figure 4: Cas de Référence

On se place dans un cas de référence : on considère un segment $[AB]$, un point P sur ce segment, et un point quelconque de l'espace, M .

$$\vec{I}_{AB} = \frac{K^2}{2 \cdot AB} \cdot \left[b - a + \frac{sh(2b) - sh(2a)}{2} \right] \cdot \vec{n} \wedge \vec{AB} \quad (16)$$

avec $a = \operatorname{argsh}\left(-\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB \cdot K}\right)$, $b = \operatorname{argsh}\left(\frac{AB^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB \cdot K}\right)$ et

$$K^2 = AM^2 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB}\right)^2 = \frac{AM^2 \cdot AB^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AM})^2}{AB^2}.$$

Singularité Bien que l'intégrale ne présente initialement pas de singularité, la solution développée n'est pas valable pour $M \in (AB)$ ($K = 0$). L'intégrale se calcule alors par :

$$\vec{I}_{AB} = \left\| MA + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB \cdot AM} \cdot AB \right\| \cdot \vec{n} \wedge \vec{AB} \quad (17)$$

III – 3 Intégrale $S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$

L'intégrale S_μ possède une solution analytique donnée par P. Guevel [3].

$$S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P = 2 \cdot \operatorname{signe}(Z) \sum_{k=1}^3 \operatorname{arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t} \quad (18)$$

N_k^t , D_k^t et Z sont définis de la même manière que dans le calcul de l'intégrale de S_σ . (cf section III.1.1)

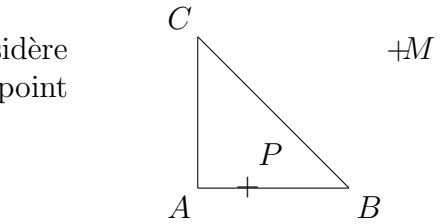
III – 4 Intégrale $\vec{I}_\mu = \oint_{C_i} \frac{\vec{MP}}{MP} \wedge d\vec{l}_P$

L'intégrale \vec{I}_μ peut être également décomposée sur chaque coté de la facette.

On étudie alors le cas de référence suivant : on considère un segment $[AB]$, un point P sur ce segment, et un point quelconque de l'espace, M .

On calcule alors :

$$\vec{I}_{AB} = \int_A^B \frac{\vec{MP}}{MP} \wedge \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot dl$$



(19) Figure 5: Cas de Référence

$$\vec{I}_{AB} = -\frac{\vec{MA} \wedge \vec{AB}}{AB} \ln \left(\frac{q_1 + \sqrt{1 + q_1^2}}{q_0 + \sqrt{1 + q_0^2}} \right) \quad (20)$$

Avec $q_0 = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB \cdot K}$ et $q_1 = \frac{AB^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB \cdot K}$.

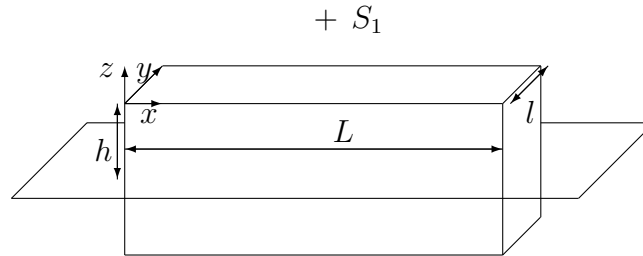
Maintenant que nous avons donné les expressions analytiques de ces intégrales, il nous faut vérifier leur validité pour pouvoir les utiliser dans le calcul des coefficients d'influence.

IV – Validation

Pour valider ces expressions analytiques, nous avons procédé en deux temps. Nous avons premièrement vérifié que le calcul de l'influence d'une facette sur un point avec une discrétisation linéaire était comparable au même calcul sur une facette identique re-maillée avec une discrétisation constante. Puis nous avons validé les coefficients d'influence en résolvant le problème pour un cas de cuve fermée soumise à une distribution de singularités, connu analytiquement. Le solveur du système linéaire posé par ce problème est le solveur itératif GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*)[8], allié à un pré-conditionnement diagonal. La première validation ne figure pas dans cet article par manque de place. Elle sera évoquée lors de la présentation.

IV – 1 Description du cas test

On place une source seule au dessus d'une cuve parallélépipédique. Cette source crée des champs de potentiel et de vitesse normale sur les parois de la cuve. Le problème à résoudre est alors de Dirichlet sur la surface libre et de Neumann sur les parois matérielles. Afin de se placer dans des conditions similaires à une validation de solveur réalisée précédemment par P. Ferrant par cette méthode, nous introduisons un plan de symétrie au niveau du fond de la cuve. Ce plan de symétrie permet de prendre en compte la condition limite sur le fond à condition d'ajouter une seconde source positionnée de manière symétrique par rapport à la source principale.



+ S_2

Figure 6: Cuve Parallélépipédique

La cuve testée possède les dimensions :

Longueur : $L = 5$ m, Largeur : $l = 0.5$ m, Profondeur : $h = 1$ m.

Le plan de symétrie est placé en $z = -1$, tandis que les sources sont placés dans le plan $y = 0.25$ m (plan de symétrie de la cuve dans ce cas, selon y), au centre à $x = 2.5$ m et à $z = 1$ m et $z = -3$ m

IV – 2 Comparaison Discrétisation Linéaire et Panneaux Constants

Pour le même cas test présenté ci-dessus, nous avons réalisé 2 solveurs. Le premier est basé sur une discrétisation à panneaux constants, où les valeurs de ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ sont constants sur les facettes. Dans ce cas, les points de contrôle sont les centres de facettes. Le second est basé sur une discrétisation linéaire de la géométrie : ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ varient linéairement sur une facette. Les points de contrôle sont les nœuds du maillage.

Étant donné la différence fondamentale au niveau des points de contrôle, nous ne pouvons pas comparer les deux méthodes sans passer par une interpolation. (soit des

valeurs des panneaux constants sur les nœuds, soit de la discrétisation linéaire sur les centres de facettes). Pour éviter des approximations liées à l'interpolation, nous comparons alors seulement les résultats des deux solveurs par rapport à la solution analytique du cas test, via une erreur relative intégrée sur la courbe.

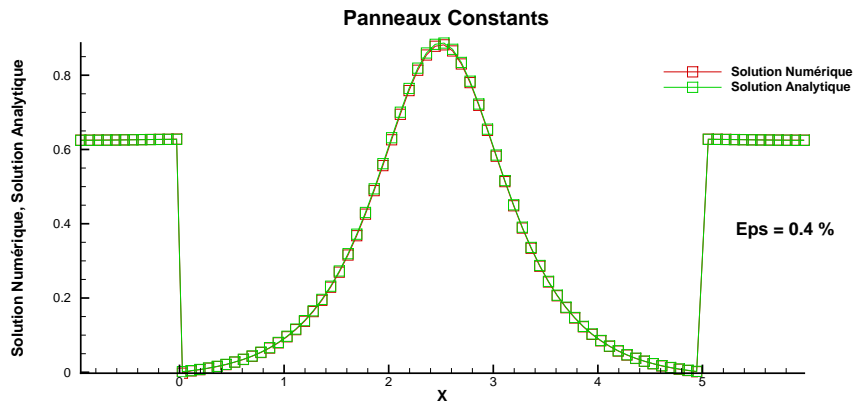
$$\epsilon = \frac{\int SolNum(X)dX}{\int SolAna(X)dX} \quad (21)$$

Les solutions du problème aux limites sont tracées ci-dessous. On a restreint le tracé aux points placés sur un plan parallèle à xOz , le plus proche de celui sur lesquelles sont les sources.

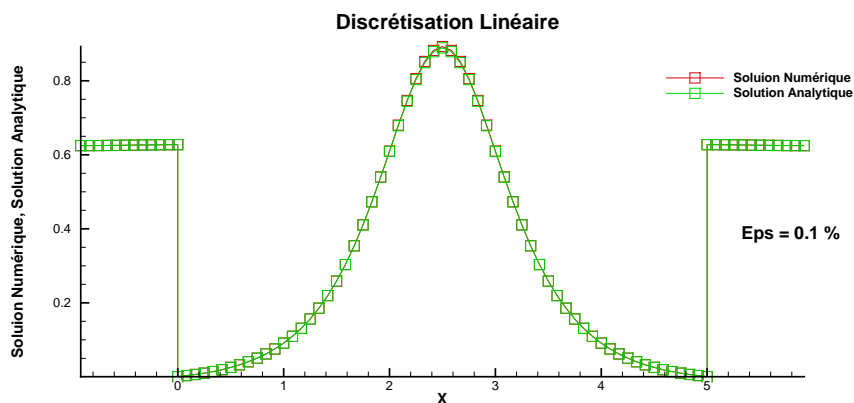
Pour $X < 0$ m et $X > 5$ m, on présente le potentiel sur les parois latérales. L'abscisse X représente alors Z compris entre $[-1$ m, 0 m]).

Pour 0 m $\leq X \leq 5$ m, on présente la vitesse normale sur la surface libre. Il est donc normal d'observer une discontinuité en $X = 0$ m et $X = 5$ m.

La discrétisation choisie est définie par la taille de côté d'une maille triangulaire isocèle : $d = 0.083$ m.



(a) Panneaux Constants



(b) Discrétisation Linéaire

Figure 7: Comparaison entre solutions analytique et numérique

La figure nous montre un bon accord entre la solution numérique et la solution analytique, quelque soit le solveur. L'erreur relative calculée pour la discrétisation à panneaux constants est de 0.4%, et de 0.1% pour la discrétisation linéaire. Comme attendu et comme

on peut l'observer sur les courbes, la précision de la discrétisation linéaire est supérieure à celle à panneaux constants.

De plus la vitesse de résolution de la première est également supérieure à la seconde. En effet, la différence fondamentale sur les points de contrôle n'est pas à négliger : dans le cas test choisi, nous avons 4254 nœuds, pour 7776 facettes. Il y a donc quasiment deux fois plus de points de contrôle, donc d'inconnues, dans le cas des panneaux constants, que dans le cas linéaire. Cela a donc un impact sur la vitesse de résolution du solveur du système linéaire du problème aux limites : le temps de calcul dans le cas linéaire est de 7.27s, pour 24.16s dans le cas des panneaux constants.

Le temps de calcul des coefficients d'influence est par contre plus réduit en panneaux constants qu'en linéaire. En effet bien que le nombre de points de contrôle soit supérieur, les opérations à réaliser sont beaucoup moins coûteuses en temps de calcul. Il est ainsi de 14.9s pour les panneaux constants et 176.6s pour la discrétisation linéaire.

IV – 3 Étude de convergence

Nous faisons varier la taille des mailles en gardant une géométrie de la cuve fixe. Elles sont définies triangulaires rectangles et isocèles. Le paramètre à faire varier est alors la dimension des côtés égaux, que l'on appelle d . L'ensemble des maillages est présenté ci-dessous :

Maillage	d (en m)	Nombre de nœuds	Nombre de facettes
1	0.25	558	864
2	0.125	1974	3456
3	0.1	3006	5400
4	$0.5/6 \simeq 0.08333$	4254	7776
5	$0.5/7 \simeq 0.07143$	5718	10 584
6	0.0625	7000	13 824

Pour chaque maillage, on relève le temps de résolution et la précision par rapport à la solution analytique. On peut alors ensuite obtenir le taux de convergence. Une étude annexe de l'influence du critère de convergence du solveur itératif GMRES sur la précision et la rapidité du code a été menée mais elle ne sera abordée que durant la présentation. La tolérance de la résolution choisie est de stopper l'itération lorsque le résidu est inférieur à 10^{-5} .

IV – 3.1 Précision

Les résultats en précision de l'étude de convergence sont présentés ci-dessous. La précision est calculée via l'erreur relative intégrée sur la courbe entre les solutions numérique et analytique. (cf section précédente)

On observe en premier lieu une erreur relative inférieure à 0.4% quelque soit le nombre de nœuds, ce qui confirme le bon accord obtenu entre les solutions. Nous pouvons ensuite constater que, pour un nombre de nœuds supérieur à 1000, la convergence se situe entre du linéaire et du quadratique, avec un taux de convergence proche de 1.5.

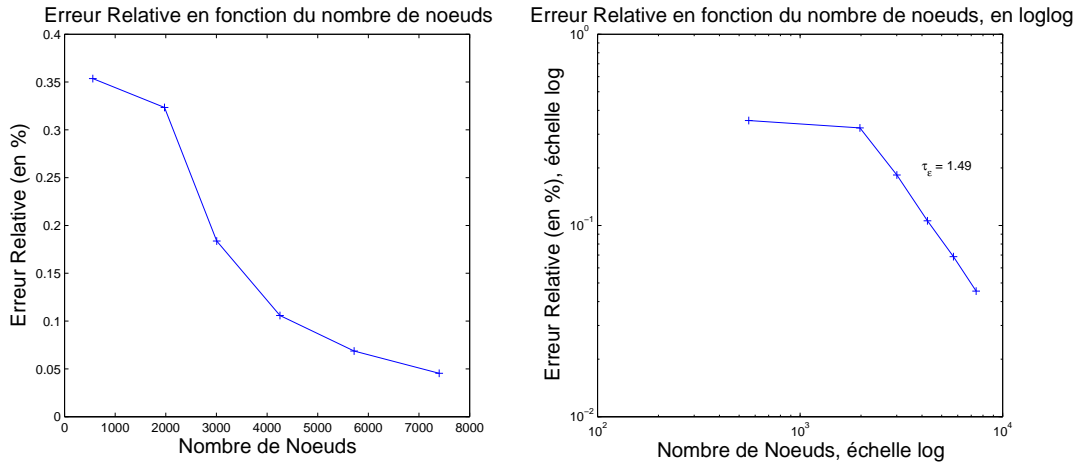


Figure 8: Résultats en précision

IV – 3.2 Vitesse

Les résultats en vitesse de l'étude de convergence sont présentés ci-dessous. Nous présentons le temps de calcul, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires à la précision requise ($tol_{GMRES} < 10^{-5}$).

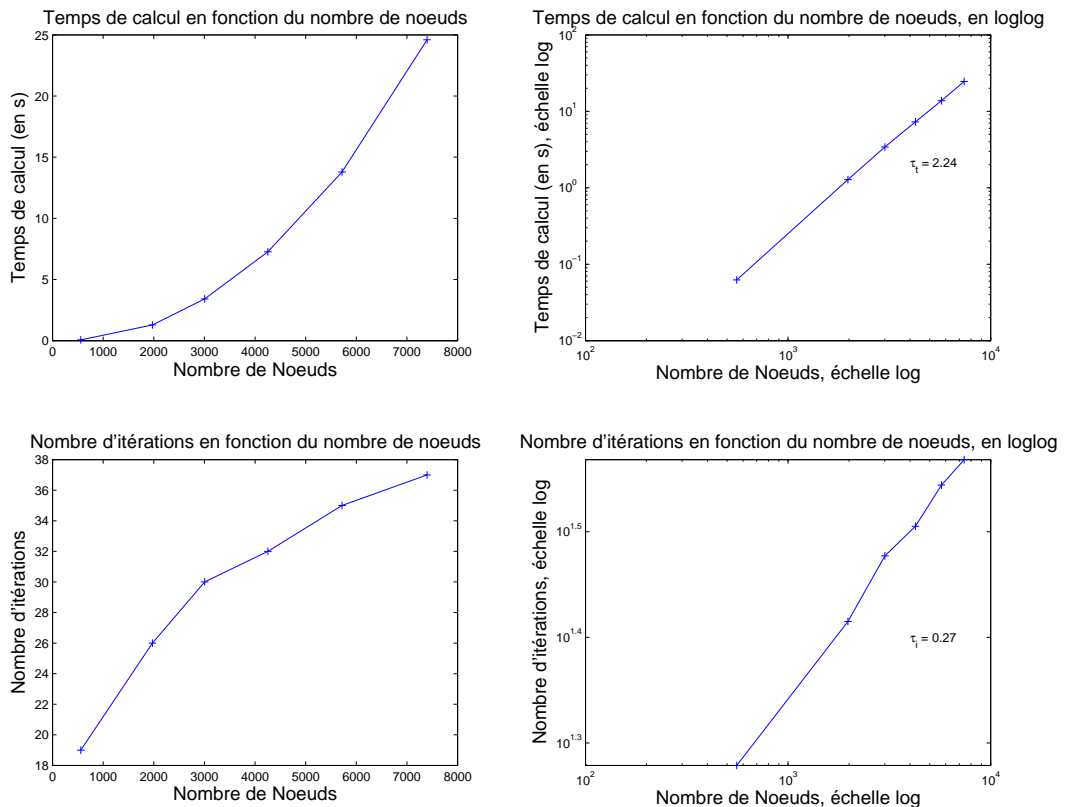


Figure 9: Temps de calcul

La vitesse du solveur se situe entre quelques centièmes de secondes et quelques dizaines de secondes, ce qui constitue une vitesse raisonnable pour les tailles de système abordés. De même, le nombre d'itération ne dépasse pas les 40 itérations avant d'atteindre le critère

de précision requis.

Nous pouvons également observer une évolution du temps de résolution en fonction du nombre de nœuds approximativement en $o(N^2)$ ($\tau_t = 2.24$). Ce serait effectivement en $o(N^2)$ si le nombre d'itération restait constant. Cela nous assure cependant des temps de calcul raisonnables pour des maillages plus conséquents.

V – Conclusion

Nous avons développé et validé une solution analytique pour les intégrales à déterminer lors du calcul des coefficients d'influence, avec une hypothèse de variation linéaire des grandeurs sur les facettes. Ces calculs font suite à ceux développés par P. Guevel pour une distribution constante des valeurs. Cette solution pourra être utilisée par la suite pour tout problème aux limites posé avec une discrétisation triangulaire à variation linéaire. Elle servira dans notre cas à la résolution d'un problème aux limites avec une formulation Weak-Scatterer. La précision et la vitesse précédemment présentée viendront appuyer l'intérêt de cette approche faiblement non linéaire, en fournissant une précision supérieure à une discrétisation constante avec une vitesse de calcul raisonnable. Cette discrétisation nous permettra également d'avoir un accès plus aisé aux gradients des grandeurs aux nœuds que nécessite la formulation Weak-Scatterer.

REMERCIEMENT :

Ce travail a reçu le soutien de l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet ANR11-MONU-018-01 MONACOREV.

Références

- [1] BRETL, J.G. “A time domain model for wave induced motions coupled to energy extraction.” Ph.D. thesis, University of Michigan, 2009.
- [2] FERRANT, P. “Notes manuscrites.”
- [3] GUEVEL, P. “Corps solide animé d'un mouvement quelconque dans un fluide illimité.”, 1976.
- [4] “Monacorev, <http://website.ec-nantes.fr/lheea/web/doku.php?id=monacorev:start>.”, 2012.
- [5] HUANG, Y. “Nonlinear ship motions by a Rankine panel method.” Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Ocean Engineering, 1997.
- [6] KIM, K. and KIM, Y. “Time-domain analysis of nonlinear ship motion responses based on weak-scatterer hypothesis.” In 19th International Offshore and Polar Engineering Conference. 2009.
- [7] PAWLOWSKI, J.S. “A nonlinear theory of ship motion in waves.” In 19th Symposium on Naval Hydrodynamics. 1991.
- [8] SAAD, Y. and SCHULTZ, M. “Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems.” 1986.