

Propagation de la houle à contre-courant : Etude de l'impact de cisaillements horizontaux et verticaux du courant moyen sur la focalisation géométrique de la houle

Wave propagation against the current : a study of the effects of horizontal and vertical shears of the mean current on the geometrical focusing of water waves

J. CHARLAND^(1,2,3), J. TOUBOUL^(2,3), V. REY^(2,3)

(1) DGA, CNRS Délégation Normandie

(2) Aix Marseille Université, CNRS/INSU, IRD, MIO, UM 110, 13288 Marseille, France

(3) Université de Toulon, CNRS/INSU, IRD, MIO, UM 110, 83957 La Garde, France

jenna.charland@univ-tln.fr

Résumé

Une campagne de mesures menée au Bassin de Génie Océanique First en 2008, dans le cadre du GIS HYDRO, nous a permis d'observer une forte amplification de l'amplitude de la houle non prévue par l'équation "mild-slope". Nous avons par ailleurs constaté l'existence d'un cisaillement vertical dans le champ de courant observé. Ce cisaillement semble avoir un impact important sur la dynamique de la houle. Du point de vue théorique, ce type cisaillement n'est pas pris en compte par l'équation "mild-slope", habituellement connue pour bien décrire l'interaction entre la houle et le courant. Forts de ce constat, nous étudions la sensibilité de la houle au cisaillement vertical du courant, en nous basant sur la résolution de la relation de dispersion linéaire. Nous établissons ensuite, en nous inspirant des approches variationnelles de Kirby [6] et de Simmen [12], une équation linéaire gouvernant la propagation de la houle au dessus d'une bathymétrie lentement variable et en présence d'un courant cisailé verticalement. Cette équation aura pour but de quantifier l'influence du cisaillement sur la focalisation géométrique de la houle.

Summary

An experimental study was carried in the Bassin de Génie Océanique First, as part of GIS HYDRO in 2008. The results allowed us to note an important rise in the wave amplitude unexpected by the "mild-slope" equation. In addition we note the presence of a vertical shearing in the current which seems to influence significantly the dynamics of water waves. This shearing is not theoretically considered within the mild-slope equation, which is classically known to consider well the interactions between waves and currents. Following these considerations, we study the sensitivity of water waves to a vertically sheared current by solving the linear dispersion relation. Thus, we establish a linear equation describing the propagation of water waves over a slowly varying topography, in the presence of a vertically sheared current. This approach is inspired by the variational formulations derived by Kirby [6] and Simmen [12]. This study will allow us to consider the influence of a sheared current on the geometrical focusing of the wave.

I – Introduction

En zone côtière, la présence d'une bathymétrie fortement variable est susceptible de modifier le comportement d'un champ de courant et la dynamique d'une houle qui se propage au dessus. Pour l'illustrer, notre groupe de travail a mené en 2008 une campagne de mesures dans le cadre du GIS HYDRO. Les expériences ont été conduites au Bassin de Génie Océanique FIRST, à la Seyne sur Mer. Ce bassin, d'une longueur utile de 24 m, et d'une largeur de 16 m, permet de mener des études de propagation de la houle en présence de courant, et pour deux directions de propagation. La campagne expérimentale consistait à introduire une bathymétrie tridimensionnelle dans la veine d'essais représentée sur la figure (1), puis à mesurer la propagation de la houle en présence de courant au dessus de cette bathymétrie. La houle considérée, de période $1.48s$, se propageait à contre-courant

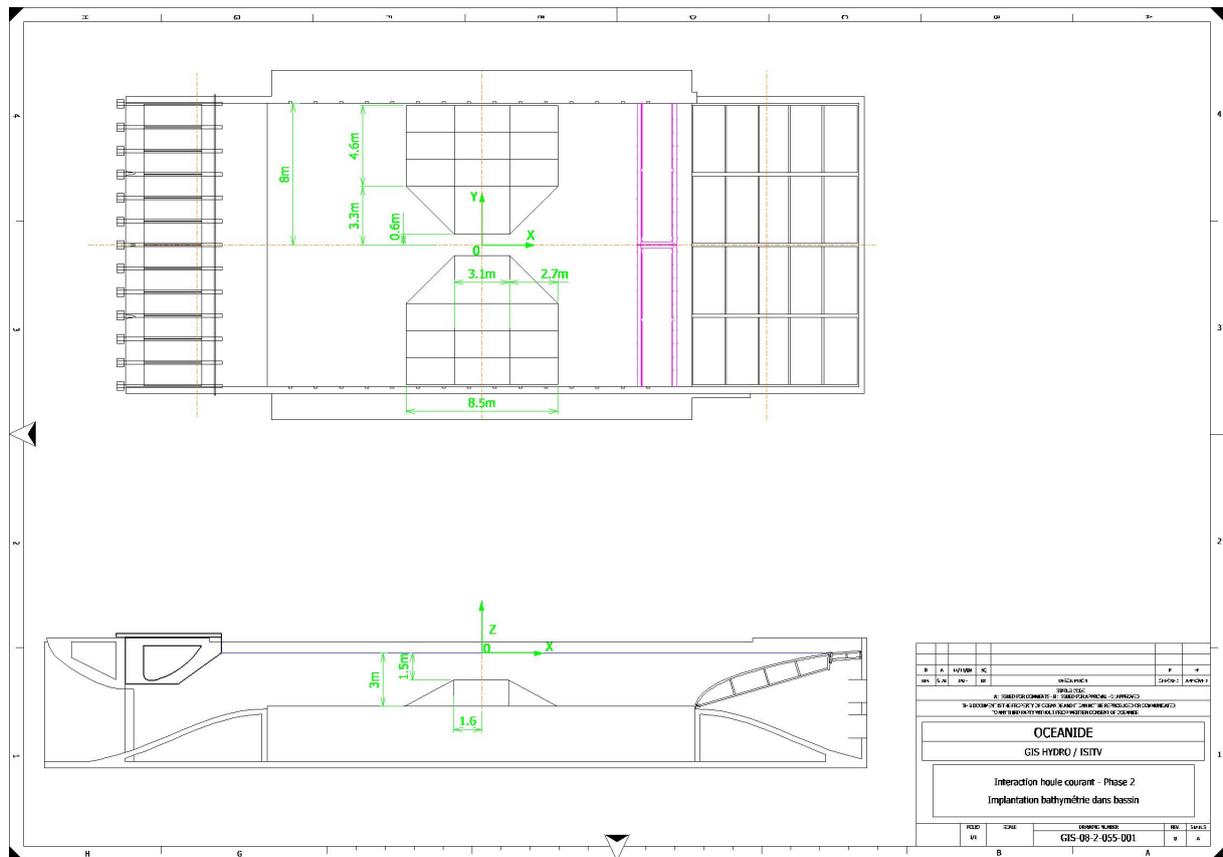


Figure 1 – Plan de masse de la bathymétrie implantée dans la veine de mesure lors de la campagne d'essais de 2008.

et en profondeur infinie. Ainsi, dans cette expérience seul le courant interagit avec la bathymétrie. Nous avons représenté sur la figure (2) le champ de courant à une profondeur de $0.25m$ par rapport à la surface libre. L'évolution de la houle dans ce champ de courant a été mesurée à l'aide d'un réseau de sondes à houle synchrones, permettant d'obtenir les principales caractéristiques de sa propagation. L'ensemble des résultats a été publié récemment (Rey *et al.* [11]).

Plus récemment encore, l'équipe a développé une méthode numérique permettant la résolution de l'équation "mild-slope" sous sa forme elliptique, conformément à l'approche de Chen *et al.* [3]. Le champ de courant présenté en figure 2 a été utilisé comme condition de forçage pour les simulations numériques. La figure 3 représente l'évolution de

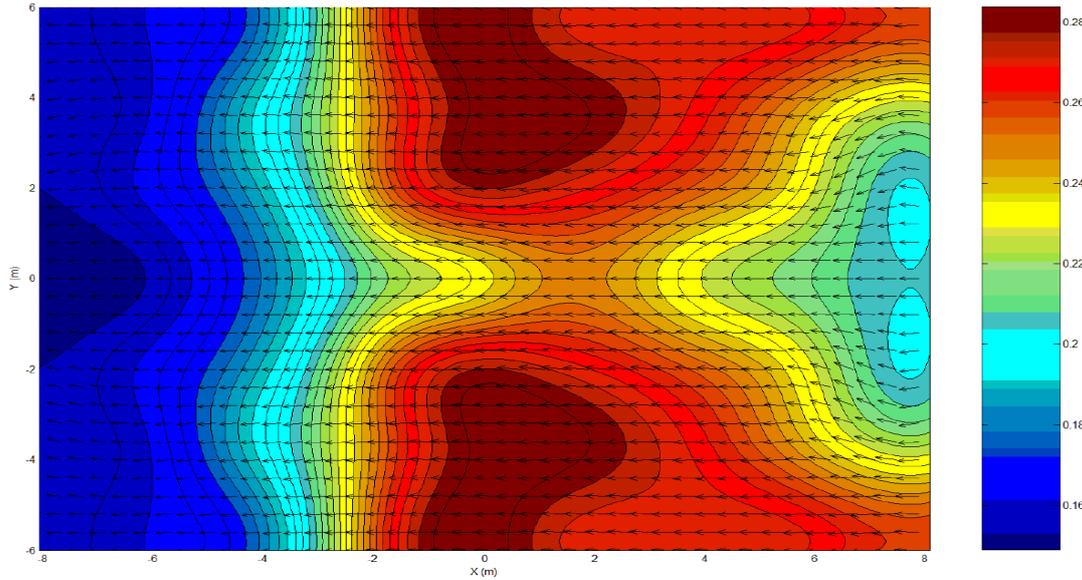


Figure 2 – **Champ de courant mesuré dans le bassin à une profondeur de 25cm de la surface libre.**

l'enveloppe normalisée de la houle le long du bassin dans la direction X , sur son axe de symétrie $Y = 0$. dans la mesure où les résultats numériques et expérimentaux varient du simple au double. En effet, l'enveloppe de la houle observée expérimentalement au centre du bassin est environ 2,2 fois supérieure à sa valeur en entrée, là où l'approche numérique ne prévoit qu'une amplification de l'ordre de 1,2. Cette étude porte sur l'identification

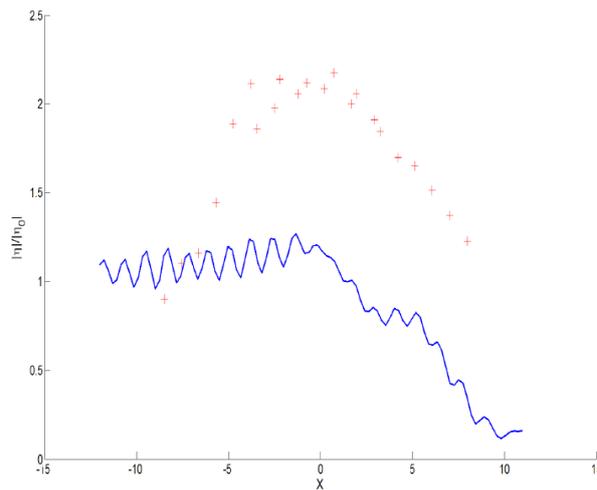


Figure 3 – **Enveloppe normalisée du champ de houle sur l'axe de symétrie ($Y=0$) le long du bassin. Les croix correspondent aux résultats expérimentaux, le trait plein correspond aux résultats fournis par la résolution de l'équation "mild-slope".**

des processus physiques non pris en compte par l'équation "mild-slope" pouvant expliquer les écarts décrits précédemment. Nous nous intéressons en particulier au rôle de la focalisation géométrique qui, comme le montrent les travaux de Kharif *et al.* [5], est capable de modifier significativement l'amplitude locale de la houle. L'équation "mild-slope" est

adaptée pour représenter ce processus en présence d'un gradient horizontal de courant mais ne considère pas le cisaillement vertical de celui-ci. C'est le rôle de ce cisaillement vertical dans le processus de focalisation géométrique et de l'évolution de la phase de l'onde dans un tel champ de courant que nous cherchons à déterminer dans cette étude. En effet, nous présenterons dans un premier temps les résultats expérimentaux qui nous laissent penser que le champ de courant de nos expériences n'était pas uniforme verticalement. Nous présenterons par ailleurs une étude de sensibilité permettant d'illustrer qualitativement l'influence de ce cisaillement sur la dynamique de la houle. Cette étude de sensibilité se basera sur la résolution de la relation de dispersion établie en présence d'un cisaillement vertical. Enfin, aux vues de ces résultats, nous établirons une nouvelle équation de type "mild slope" prenant en compte le cisaillement vertical du courant grâce à une méthode variationnelle, inspirée par les travaux de Kirby [6] et Simmen [12].

II – Influence du cisaillement vertical sur la dynamique de la houle

II – 1 Profil expérimental de cisaillement

L'écart entre résultats numériques et expérimentaux qui apparaît en figure (3) présente un caractère très surprenant, car l'équation "mild slope", sous sa forme hyperbolique, est connue pour décrire relativement bien l'interaction entre la houle et un courant. Ce résultat nous conduit donc à penser que la structure verticale du courant joue un rôle qui ne peut être négligé.

En effet, la figure (4) présente la structure verticale du courant au niveau des points $(X = -8, Y = 0)$, $(X = 0, Y = 0)$, $(X = -8, Y = 5, 8)$, $(X = 0, Y = 5, 8)$. Les données de courant mesurées en $Z = -0,75$ m et $Z = -1,5$ m ont été obtenues au moyen de capteurs de pression. Celles mesurées en $Z = -0,25$ m ont été obtenues au moyen d'un courantomètre électromagnétique. Toutes ces données ont été mesurées en l'absence de houle. En ces positions, la figure (4) confirme qualitativement la présence d'un fort gradient de courant sur la verticale.

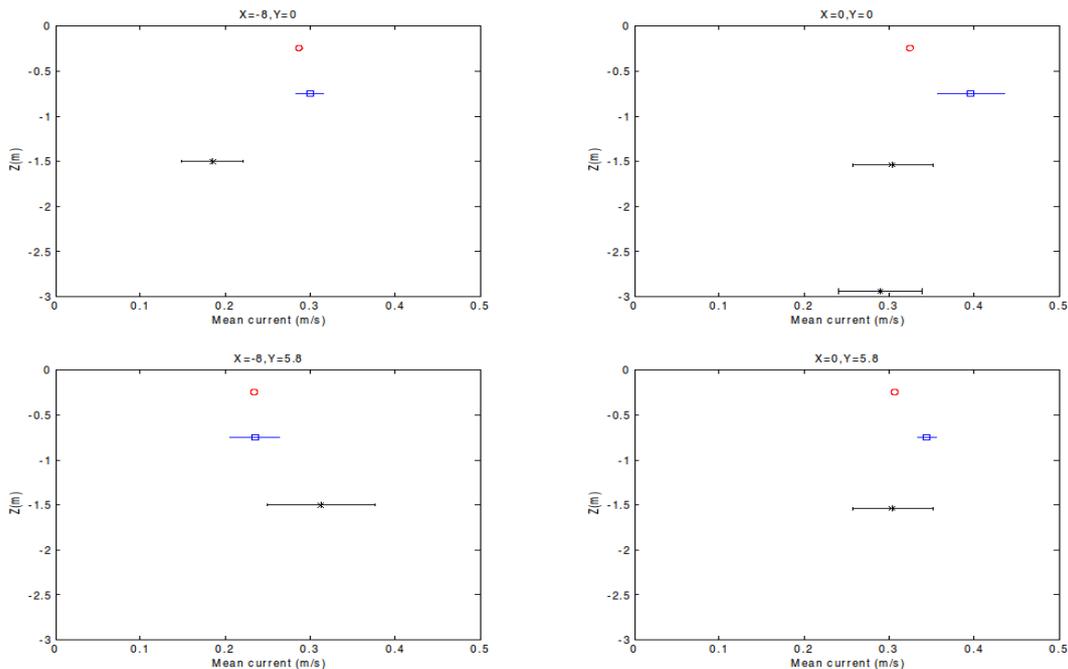


Figure 4 – Profil vertical du courant en différentes positions du bassin.

II – 2 Sensibilité de la houle au cisaillement

II – 2.1 Relation de dispersion en présence d'un courant cisailé

Compte tenu des observations précédentes, nous souhaitons faire apparaître l'influence potentielle du gradient vertical de courant sur la dynamique de la houle. Dans ce but, nous nous intéressons ici à la relation de dispersion de la houle sur un courant cisailé.

La relation de dispersion linéaire en présence d'un courant cisailé, linéaire, de la forme $U(z) = Sz + U_0$ a été établie par Kirby & Chen. ([7]). Simmen ([12]), puis Thomas ([13]), obtiennent une expression similaire pour un courant de la forme $U(z) = Sz$. Ces relations sont obtenues dans le cas d'un écoulement unidimensionnel dans le plan (\mathbf{x}, z) .

La nature du courant décrite en section précédente nous conduit à supposer un champ de courant de la forme

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{S}z + \mathbf{U}_0 = \begin{cases} U(z) & = S_x z + U_0 \\ V(z) & = S_y z + V_0 \\ W(z) & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En considérant les conditions cinématique et dynamique de la houle se propageant sur un tel courant, il est possible de généraliser ces expressions unidimensionnelles à des cas de propagation bidimensionnels. Ainsi,

$$(\omega - \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + (\omega - \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{k}) \frac{\tanh(kh)}{k} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{k}) = gk \tanh(kh) \quad (2)$$

où ω la pulsation de la houle et \mathbf{k} le vecteur d'onde. Cette expression est identique à celle obtenue par Kirby & Chen [7] dans le cas de propagation unidimensionnelle. Dans le cas où $\mathbf{U}_0 = U_0 = 0$, nous retrouvons les expressions obtenues par Simmen [12] et par Thomas [13]. Dans le cas où le courant est nul, nous retrouvons bien la relation de dispersion classique de la houle.

II – 2.2 Formulation analytique d'un cisaillement

Afin d'illustrer l'influence d'un gradient vertical de cisaillement sur la célérité de la houle, nous allons comparer la célérité de la houle en présence d'un courant uniforme à celle qu'elle aurait en présence d'un courant cisailé d'intensité similaire. Dans ce but, nous supposons l'existence d'un profil de courant de la forme suivante :

$$\mathbf{U}(\mathbf{z}) = \begin{cases} S_x z + U_0 \\ V_0 \end{cases} = \begin{cases} a_0 \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi h}{h_{min}} \right) \right) z + U_0 \\ V_0 \end{cases} \quad (3)$$

où $h_{min} = 1,5$ m est la profondeur d'eau minimale.

Nous définissons U_0 et V_0 afin que les valeurs prises par le champ de courant $\mathbf{U}(\mathbf{z})$ à une profondeur de 0,25 mètre sous la surface soient égales au champ de courant représenté sur la figure (2). Le paramètre a_0 , qui permet de modifier l'intensité du cisaillement, sera pris comme paramètre de sensibilité dans notre étude. Une telle formulation permet de tenir compte des variations bathymétriques. Ainsi, l'allure de ce cisaillement le long d'une coupe transversale du bassin est représenté sur la figure (5).

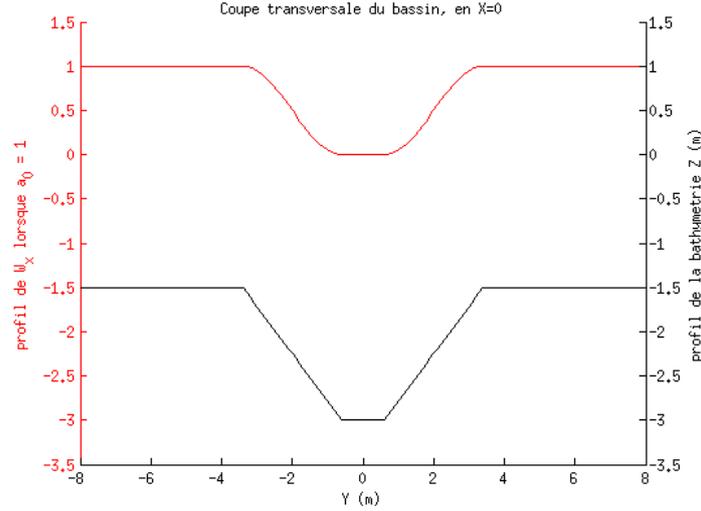


Figure 5 – Coupe transversale du bassin, en $X = 0$, représentant le profil bathymétrique (en noir) et le profil de cisaillement W_x (en rouge) avec $a_0 = 1$.

II – 2.3 Evolution spatiale de la célérité de la houle

Grâce à la relation de dispersion linéaire sur courant cisailé (2), nous pouvons obtenir numériquement la célérité de la houle se propageant en présence du champ de courant décrit précédemment (3). Dans la mesure où cette démarche peut également être introduite dans le cadre d'un courant uniforme verticalement, nous pouvons comparer les résultats obtenus par chacune des relations de dispersion. Ainsi, nous définissons l'écart $e_r(x, y)$ tel que

$$e_r(x, y) = \frac{c_{cisaille}(x, y) - c_{uniforme}(x, y)}{c_{uniforme}(x, y)}. \quad (4)$$

La figure (6) représente l'évolution spatiale de cet écart e_r , pour une période de la houle et une bathymétrie identiques à celles des expériences menées au BGO FIRST. Les valeurs du courant considérées dans les deux cas sont celles mesurées lors des expériences à une profondeur de 0,25m sous la surface. Sur cette figure, nous représentons l'écart entre les deux résultats pour deux valeurs de a_0 différentes. La dissymétrie que nous pouvons noter

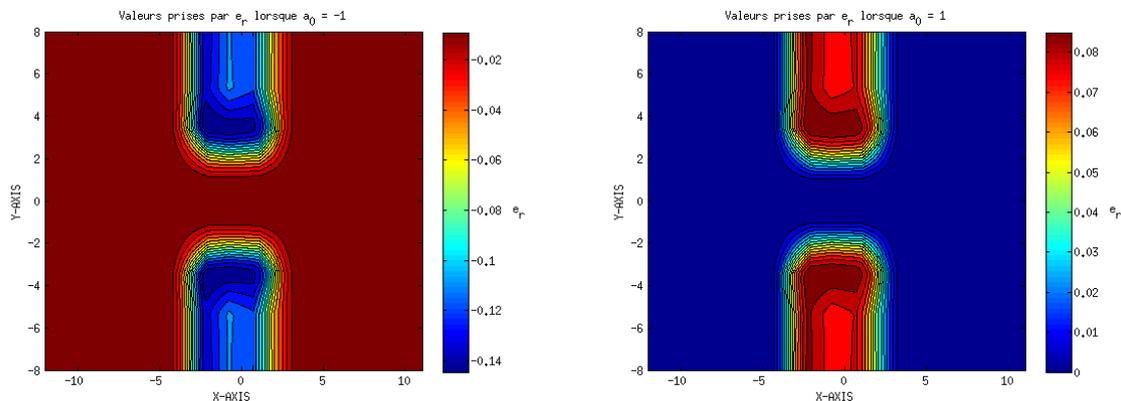


Figure 6 – Valeurs de e_r . Les valeurs prises par a_0 sont égales à -1 (à gauche), et à 1 (à droite).

par rapport à l'axe $X = 0$ dans le champ de courant du BGO FIRST (figure (5)) explique celle que nous observons sur la figure (6). Dans le cas où $a_0 = -1$, nous remarquons un écart de 14% au dessus de la bosse, lorsque la profondeur d'eau est minimale. A titre de comparaison, pour un courant constant sur la verticale, la différence relative de célérité le long d'une coupe transverse, selon l'axe $X = 0$, entre le milieu du bassin et une bosse est de 3,5%. L'influence du cisaillement vertical n'est donc pas négligeable.

Cependant, cette première étude, qualitative, néglige différents effets. Notamment, elle ne considère pas les effets inertiels dus au terme de cisaillement. Elle ne prend pas en compte non plus l'influence d'une telle différence de célérité sur le phénomène de focalisation. Ces constats nous incitent à établir une équation de type "mild slope", généralisée à un courant cisailé, afin d'étudier l'évolution de la phase de la houle dans un champ de courant cisailé verticalement. L'obtention d'une telle équation est décrite dans la section suivante.

III – Etablissement d'une équation de type "mild slope"

III – 1 Utilisation d'une formulation variationnelle

Lorsque le fluide est non visqueux, incompressible et que l'écoulement est irrotationnel, Luke [10] utilise une fonction de Lagrange égale à l'intégrale sur la profondeur d'eau du terme de pression pour obtenir les équations du mouvement de la houle en profondeur constante. Kirby [6] reprend la formulation de Luke [10] en considérant une bathymétrie de géométrie arbitraire, lentement variable, et un champ de courant constant sur la verticale. C'est cette étude qui a permis d'établir l'équation "mild-slope", généralisant ainsi les équations obtenues par Berkhoff [1], Booij [2] et Liu [8], à une houle se propageant en présence d'un courant constant sur la verticale.

Dans le cas des écoulements rotationnels, Longuet-Higgins [9] établit l'expression des différentes quantités invariantes de l'écoulement. Constantin *et al.* [4] introduisent, en considérant ces quantités, une nouvelle formulation variationnelle. Toutefois cette étude porte sur des houles se propageant par profondeur constante. Luke [10] étend l'expression du lagrangien dans le cas d'un écoulement rotationnel s'écrivant sous la forme $\mathbf{u}_{\text{total}} = \nabla\Phi + \alpha\nabla\beta$. Nous remarquons d'ailleurs que la fonction de Lagrange qu'il utilise est égale à l'intégrale sur la profondeur du terme de pression. En cherchant dans notre cas d'étude un courant $\mathbf{U}(z)$ sous cette forme et en s'inspirant du raisonnement de Kirby [6] appliqué au champ de pression p de l'écoulement, nous pourrions généraliser l'expression "mild slope" à une expression prenant en compte un cisaillement linéaire du courant.

III – 2 Equation de propagation de la houle sur courant cisailé

III – 2.1 Notations utilisées

Nous notons $\mathbf{u}_{\text{total}} = (u, v, w)$ le champ total de vitesse de l'écoulement. Pour simplifier l'écriture nous notons $\mathbf{u} = (u, v)$ le champ de vitesse horizontal et $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ le gradient horizontal. Dans l'étude menée par Kirby [6], le fond est lentement variable et la houle est faiblement cambrée. Ces hypothèses permettent d'introduire le petit paramètre $\varepsilon = kA$ où A est l'amplitude de la houle et $k = |\mathbf{k}|$. Le potentiel Φ de la houle et la déformée de la surface libre η s'écrivent

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, t) &= \varepsilon \hat{\Phi}(x, y, z, t) &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0 + \varepsilon \hat{\eta}(x, y, t) &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (5)$$

où η_0 correspond à la déformée de la surface libre provoquée par le courant au niveau de la surface moyenne ($z = 0$). D'autre part nous notons h_0 la profondeur d'eau locale et h la profondeur telle que $h = h_0 + \eta_0$. Le champ de courant que nous considérons est décrit par la relation (3).

III – 2.2 Calcul du terme de pression

La projection de l'équation d'Euler sur l'axe vertical s'écrit pour le champ $\mathbf{u}_{\text{total}}$ s'écrit

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{p(z)}{\rho} - gz \right) \quad (6)$$

puis,

$$-\frac{p(z)}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \Phi - \int \mathbf{S} \cdot \nabla \Phi \, dz + gz \quad (7)$$

III – 2.3 Calcul variationnel

En s'inspirant du raisonnement de Kirby [6] le lagrangien de la pression s'écrit

$$L = \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \varepsilon \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \, dz + \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \varepsilon^2 \frac{(\nabla \hat{\Phi})^2}{2} \, dz + \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \right)^2 \, dz + \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \varepsilon (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \hat{\Phi} \, dz - \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \left[\int \varepsilon \mathbf{S} \cdot \nabla \hat{\Phi} \, dz \right] \, dz + \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} gz \, dz \quad (8)$$

L dépend des variables $\hat{\Phi}$ et $\hat{\eta}$. Ainsi

$$\delta J = \int_t \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta L}{\delta \hat{\eta}} \delta \hat{\eta} + \frac{\delta L}{\delta \hat{\Phi}} \delta \hat{\Phi} \right) \, d\mathbf{x} \, dt = 0 \quad (9)$$

où $\delta \hat{\eta}$ et $\delta \hat{\Phi}$ sont des fonctions arbitraires qui s'annulent aux niveaux des frontières ([10]). La variation de J par rapport à $\hat{\eta}$ s'écrit en $z = \varepsilon \hat{\eta}$

$$\int_t \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \hat{\eta}} \delta \hat{\eta} \, d\mathbf{x} \, dt = \int_t \int_{\mathbf{x}} \left[\varepsilon \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{(\nabla \hat{\Phi})^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \hat{\Phi} - \int \varepsilon \mathbf{S} \cdot \nabla \hat{\Phi} \, dz + gz \right] \delta \hat{\eta} \, d\mathbf{x} \, dt \quad (10)$$

et comme $\delta \hat{\eta}$ est une fonction arbitraire, nous pouvons écrire ([10])

$$\hat{\eta} = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \hat{\Phi} - \frac{1}{k^2} \mathbf{S} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \right) \right] \Bigg|_{z=\varepsilon \hat{\eta}} \quad (11)$$

C'est la condition dynamique de surface libre. La variation de L par rapport à $\hat{\Phi}$ s'écrit

$$\int_t \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \hat{\Phi}} \delta \hat{\Phi} \, d\mathbf{x} \, dt = \int_t \int_{\mathbf{x}} \left[\varepsilon \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \frac{\partial \delta \hat{\Phi}}{\partial t} \, dz + \varepsilon^2 \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \frac{\partial \delta \hat{\Phi}}{\partial z} \, dz + \varepsilon^2 \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \nabla \hat{\Phi} \cdot \nabla \delta \hat{\Phi} \, dz + \varepsilon \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \delta \hat{\Phi} \, dz - \varepsilon \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \left[\int \mathbf{S} \cdot \nabla \delta \hat{\Phi} \, dz \right] \, dz \right] \, d\mathbf{x} \, dt \quad (12)$$

Après transformation des différents termes en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral la variation de J par rapport à $\hat{\Phi}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\int \int_{(\mathbf{x},t)} \frac{\partial L}{\partial \hat{\Phi}} \delta \hat{\Phi} &= \int \int_{(\mathbf{x},t)} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \delta \hat{\Phi} dz + \varepsilon^2 \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \nabla \hat{\Phi} \delta \hat{\Phi} dz + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \delta \hat{\Phi} dz \right] d\mathbf{x} dt \\
&- \int \int_{(\mathbf{x},t)} \left[\varepsilon^2 \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} \delta \hat{\Phi} dz + \varepsilon^2 \int_{-h}^{\varepsilon \hat{\eta}} \nabla^2 \hat{\Phi} \delta \hat{\Phi} dz \right] d\mathbf{x} dt \\
&- \int \int_{(\mathbf{x},t)} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + \varepsilon^3 \nabla \hat{\eta} \cdot \nabla \hat{\Phi} + \varepsilon^2 \nabla \hat{\eta} \cdot (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon^2 \nabla \cdot \mathbf{U}_0 \hat{\eta} - \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \right] \delta \hat{\Phi} \Big|_{z=\varepsilon \hat{\eta}} d\mathbf{x} dt \\
&- \int \int_{(\mathbf{x},t)} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} + \varepsilon^2 \nabla h \cdot \nabla \hat{\Phi} + \varepsilon \nabla h \cdot (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{U}_0 h \right] \delta \hat{\Phi} \Big|_{z=-h} d\mathbf{x} dt
\end{aligned} \tag{13}$$

Si la houle est unidirectionnelle et se propage en présence d'un courant cisailé nul en surface, nous retrouvons l'expression établie par Simmen [12].

En notant $\hat{\Phi} = f(z) \varphi(\mathbf{x}, t)$, où $f(z) = \frac{\cosh(z+h)}{\cosh(kh)}$, en regroupant les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ de l'équation (13), puis en utilisant la condition dynamique (11) et après transformation, nous obtenons, pour un fond lentement variable

$$\begin{aligned}
\frac{D^2 \varphi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \frac{D\varphi}{Dt} + (\sigma_0^2 - k^2 CC_{g0}) \varphi - \nabla \cdot (CC_{g0} \nabla \varphi) \\
- k \tanh(kh) \left[\frac{1}{k^2} \mathbf{S} \cdot \nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} \right) + \mathbf{U}_0 \cdot \left(\frac{1}{k^2} \mathbf{S} \cdot \nabla \right) \nabla \varphi + \mathbf{U}_0 \cdot (\nabla \varphi \cdot \nabla) \frac{1}{k^2} \mathbf{S} + \right. \\
\left. (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \left(\frac{1}{k^2} \mathbf{S} \cdot \nabla \varphi \right) + \mathbf{U}_0 \cdot \left(\nabla \varphi \wedge \left(\frac{1}{k^2} \mathbf{S} \right) \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Dans cette expression $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla)$, $\sigma_0^2 = gk \tanh(kh)$ et

$CC_{g0} = \frac{1}{2k} \left(g \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \right)$. Cette équation gouverne la propagation de la houle au dessus d'une bathymétrie lentement variable en présence d'un courant cisailé de vorticité constante.

Dans le cas où $\mathbf{S} = 0$, σ_0 est la pulsation intrinsèque définie classiquement en courant uniforme, CC_{g0} est le produit entre la célérité de phase et de groupe de la houle. Nous retrouvons l'équation "mild slope" établie par Kirby [6]. Nous retrouvons également la relation de dispersion (2) établie pour un courant bidimensionnel cisailé verticalement. La résolution numérique de cette équation nous permet de quantifier l'évolution de la phase de la houle lors de sa propagation.

IV – Conclusion et perspective

Du point de vue expérimental, nous avons constaté une forte amplification de l'amplitude de la houle le long du bassin. Cette amplification est sous-estimée par l'équation

”mild-slope”, pourtant connue pour bien représenter l’interaction entre la houle et un courant uniforme. Nous avons par ailleurs observé l’existence d’un cisaillement vertical dans le courant. Or ce cisaillement n’est pas prévu par l’équation ”mild-slope”. Nous remarquons cependant qu’une variation verticale du champ de courant est susceptible de jouer un rôle non négligeable sur la propagation de la houle. Ces constats nous ont incité à établir une nouvelle équation de type ”mild slope”, généralisant ainsi l’équation établie par Kirby ([6]). La résolution numérique de cette nouvelle équation devrait nous permettre, à terme, de quantifier le rôle du cisaillement vertical du courant sur le processus de focalisation géométrique de la houle.

Le profil de cisaillement que nous avons considéré dans notre étude de sensibilité est actuellement déterminé de manière arbitraire, à partir de constats qualitatifs. Une nouvelle campagne de mesures est prévue prochainement au BGO FIRST pour l’acquisition de données détaillées du champ de profil de courant. Ce dernier sera pris en compte dans la résolution de l’équation généralisée de type ”mild slope”.

Remerciements

Les expériences menées au BGO FIRST dans le cadre du GIS HYDRO ont bénéficié d’un financement du Conseil Général du Var. De plus, le travail de thèse de J. Charland bénéficie d’un financement de la Direction Générale de l’Armement.

Références

- [1] J. C. W. Berkhoff. *Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction.* PhD thesis, De Voorst Laboratory of the Delft Hydraulics Laboratory, 1976.
- [2] N. Booij. *Gravity waves on water with non-uniform depth and current.* PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1981.
- [3] W. Chen, V. Panchang, and Z. Demirbilek. On the modeling of wave-current interaction using the elliptic mild-slope wave equation. *Ocean Engineering*, 32 :2135–2164, 2005.
- [4] A. Constantin, D. Sattinger, and W. Strauss. Variational formulations for steady water waves with vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 548 :151–163, 2006.
- [5] C. Kharif and E. Pelinovsky. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22 :603–634, 1995.
- [6] J. T. Kirby. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *Journal of Geophysical Research*, 89(C1) :745–747, January 20 1984.
- [7] J. T. Kirby and T. Chen. Surface waves on vertically sheared flows : Approximate dispersion relations. *Journal of Geophysical Research*, 94(C1) :1013–1027, january 15 1989.
- [8] P. L. F. Liu. Wave-current interactions on a slowly varying topography. *Journal of Geophysical Research*, 88(C7)(4421-4426), 1983.
- [9] M. S. Longuet-Higgins. On integrals and invariants for inviscid, irrotational flow under gravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 134 :155–159, 1983.
- [10] J. C. Luke. A variational principle for a fluid with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(part 2) :395–397, 1967.

- [11] V. Rey, F. Guinot, and J. Touboul. Large scale experimental study of wave current interactions in presence of a 3d bathymetry. Genoa : s.n., 2011. International Maritime Association of the Mediterranean.
- [12] J. A. Simmen. *Steady deep-water waves on a linear shear current*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Californie, 1984.
- [13] R. Thomas. *L'instabilité modulationnelle en présence de vent et d'un courant cisailé uniforme*. PhD thesis, Université d'Aix Marseille, 2012.