

12^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique

Nantes , 17-19 novembre 2010

**CALCUL DE CHAMPS DE PRESSIONS PAR UNE
FORMULATION INTEGRALE**

***INTEGRAL FORMULATION AND PRESSURE
COMPUTATION***

H. MACHROUKI*, S. HUBERSON*,

* HydEE, Institut Pprime,
CNRS-Université de Poitier- ENSMA, UPR 3346
hicham.machrouki@etu.univ-poitiers.fr
serge.huberson@univ-poitiers.fr

Résumé

On présente une méthode pour calculer le champ de pression d'un écoulement bi-dimensionnel tourbillonnaire instationnaire pour un fluide incompressible visqueux. Le calcul de la pression est réalisé en deux étapes. Dans la première, on calcule le champ de pression induit par la vitesse seule par la résolution de l'équation de Poisson habituelle sans prendre en compte les frontières. ce problème est discrétisé sur un maillage cartésien régulier par une méthode de volumes finis. La deuxième étape est une correction harmonique calculée afin de tenir compte des conditions aux limites. Cette étape est réalisée par la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de second espèce. Les propriétés de la méthode sont illustrées par deux applications. La première concerne un champ de vitesse calculé numériquement par DNS couplé avec la méthode des frontières immergées, et la deuxième un champ de vitesse mesuré par la méthode PIV.

Summary

A computational method for the pressure field of the two-dimensional unsteady flow of an inviscid and incompressible fluid is presented. The pressure is computed with a two steps procedure. In the first step, the part of the pressure field due to the velocity field alone is computed by solving a Poisson equation without accounting for the boundaries. This step is performed by means of a finite-volume scheme on a regular cartesian mesh. In the second step, an harmonic correction is applied in order to satisfy the boundary conditions, resulting in a second kind Fredholm integral equation. The properties of the method are illustrated through two examples, one starting from a computed velocity field and the other from a measured velocity field

I – Introduction

Le travail présenté ici trouve son origine dans une discussion avec Gérard Delhommeau au sujet des méthodes Smooth Particle Hydrodynamic (SPH) et des similitudes entre celles-ci et les méthodes dites Vortex. Il s’agit dans les deux cas de méthodes particulières, mais associées à des formulations différentes des équations de Navier-Stokes, vitesse-pression pour les premières, vitesse-tourbillon pour les secondes. Le transfert de ”technologies” entre les deux types de méthodes a permis à chacune des améliorations significatives. C’est ainsi que la renormalisation introduite en SPH par Gingold et Monaghan[5] dès le départ et analysé en détail par Villa[13] par la suite a permis de résoudre le problème de l’inhomogénéité des répartitions de particules, les techniques de remaillage introduite dans les méthodes vortex par Jollès[8] améliore sensiblement les résultats des méthodes SPH pour des temps longs et les techniques de calcul rapide type Tree-code de Greengard et Rocklin[6] sont aujourd’hui couramment employées par les deux méthodes. Enfin, le calcul semi-direct de la pression par résolution de l’équation de Poisson a été introduit dans les méthodes SPH par Cummins et Rudman[2] en remplacement de la méthode de compressibilité artificielle et perfectionnée par la suite pour donner les méthodes XSPH. Il faut cependant noter que, compte tenu de l’aptitude des méthodes SPH à fournir des résultats spectaculaires à des problèmes très difficiles, souvent inaccessibles aux méthodes Vortex, les efforts ont souvent porté sur des aspects spécifiques de ceux-ci et les techniques que nous venons de passer en revue ne sont pas encore, loin s’en faut, d’un usage généralisé. On trouve ainsi, à côté de développements ayant pour objectif l’amélioration de la qualité des résultats ([1], [3]) des recherches dont le but est d’étendre le champ d’application des méthodes SPH ([11],[12]) en travaillant sur une version de la méthode plus proche de la forme originale de Gingold et Monaghan. Nous nous plaçons ici dans le premier cadre, et nous allons concentrer nos efforts sur le calcul de la pression à partir du champ des vitesses.

Le calcul du champ de pression est très souvent indispensable à l’exploitation d’un résultat, qu’il soit numérique ou expérimental. D’un point de vue pratique, deux types de difficultés principales sont rencontrées : il n’existe généralement pas de conditions aux limites explicites pour la pression ce qui concerne surtout la première catégorie de méthodes, et les efforts sont concentrés sur la construction du champ de vitesse ; dans le cas de méthodes numériques, cela est dû principalement à la forme des équations alors que les techniques expérimentales non intrusives type VDL ou PIV sont, elles, dédiées exclusivement aux champs des vitesses. Le problème qui nous intéresse ici est la construction d’un champ de pression à posteriori partant d’une définition supposée bonne du champ des vitesses. Ce problème dépasse donc largement le cadre des méthodes SPH et la méthode que nous proposons s’applique tout aussi bien, pour les cas numériques à des méthodes de frontières fictives, pour les cas expérimentaux à des champs de mesures PIV par exemple. Dans tous les cas, nous considérons un écoulement tourbillonnaire instationnaire d’un fluide incompressible visqueux.

II – Formulation

On considère un obstacle Ω' délimité par la surface S_0 et placé dans un domaine Ω de frontière extérieure S_∞ . On note $\partial\Omega = S_0 \cup S_\infty$ et \mathbf{n} le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$ (figure 1). L’écoulement, dans le domaine Ω , est tourbillonnaire instationnaire et on suppose que la frontière S_∞ est dans une région où la vitesse peut être supposée uniforme. Enfin, le

fluide est newtonien et incompressible.

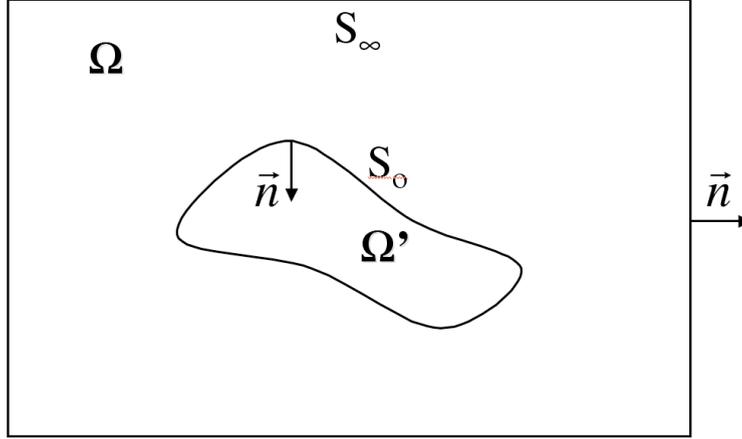


Figure 1 – domaine de calcul

L'écoulement est solution des équations de Navier Stokes dont l'équation de conservation de la quantité de mouvement est écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \wedge \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{g} = -\nabla h \quad (1)$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, ω le tourbillon, g la gravité, ρ la masse volumique et $h = p/\rho + \mathbf{u}^2/2$. Le calcul de la pression ne sera pas fait directement, mais à travers h qui est l'inconnu de notre problème. Pour évaluer h , on applique l'opérateur divergence à l'équation précédente. L'incompressibilité du fluide nous permet d'obtenir l'équation de Poisson (2). L'unicité de la solution est obtenue par l'imposition d'une condition de Neumann sur la surface de l'obstacle S_0 et d'une condition de Dirichlet sur la surface extérieure S_∞ .

$$\begin{cases} \Delta h = -\nabla(\omega \wedge \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial n} = g_1 & \text{sur } S_0 \\ h = g_2 & \text{sur } S_\infty \end{cases} \quad (2)$$

où $g_1 = -(\partial \mathbf{u} / \partial t + \omega \wedge \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}$ et $g_2 = h_\infty$

Nous allons résoudre ce problème par une méthode mixte intégre-différentielle. Celle-ci peut être vue comme une extension de la formulation purement intégrale utilisée par Cantaloube & Rehbach [4].

II – 1 décomposition du problème

Nous avons construit une méthode de résolution en deux étapes en utilisant la linéarité de l'équation (2) par rapport à la pression. Nous utilisons la décomposition de h suivante :

$$h = h_\omega + h_\gamma \quad (3)$$

La première étape consiste alors à calculer une valeur de h_ω , cette quantité représente la contribution à la pression du champ de vitesse calculé ou mesuré. h_ω est la solution de l'équation de Poisson habituelle (4) dans le domaine $\Omega \cup \Omega'$. Les conditions aux limites peuvent être fixées arbitrairement dans la mesure où une correction harmonique sera calculée à l'étape suivante. Par conséquent, on ne tient pas compte de la présence des parois solides et on utilise une simple condition de Dirichlet sur les frontières extérieures.

$$\begin{cases} \Delta h_\omega = -\nabla(\omega \wedge \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \cup \Omega' \\ h_\omega = h_\infty & \text{sur } S_\infty \end{cases} \quad (4)$$

Dans la deuxième étape, h_γ est calculée de manière à ce que la somme $h_\omega + h_\gamma$ soit solution du problème initial. Le problème définissant h_γ est donc directement obtenu par simple soustraction du problème précédent à celui dont h est solution soit :

$$\begin{cases} \Delta h_\gamma = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial n} = g_1 & \text{sur } S_0 \\ h = 0 & \text{sur } S_\infty \end{cases} \quad (5)$$

Ce problème ne sera pas encore résolu directement sous cette forme, mais reformulé en intégrale de frontière. C'est l'objet de la section suivante.

II – 2 formulation intégrale de frontière

la seconde étape utilise une équation intégrale de Fredholm de second espèce pour apporter la correction h_γ nécessaire pour tenir compte de la présence des frontières (surface libre ou parois solides). Pour retrouver cette équation, on applique la deuxième identité de Green à (1) :

$$k h(x) + \int_{\partial\Omega} h(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) ds - \int_{\partial\Omega} G(x,y) \frac{\partial h}{\partial n_y}(x,y) ds = \int_{\Omega} \nabla_y(\omega \wedge \mathbf{u}) G(x,y) dv \quad (6)$$

G étant la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans un domaine infini. Dans les cas bidimensionnels, $G(x,y) = -1/2\pi \log(|x-y|)$. La valeur de k dépend de la position du point observateur x dans le domaine, elle est calculée de la façon suivante :

$$k = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) ds \quad (7)$$

$k = 1$ dans Ω , $k = \frac{1}{2}$ sur S_0 dans le cas où la courbe porteuse de S_0 est de classe $C^2(\mathbb{R})$ et $k = 0$ dans Ω' . On écrit aussi l'équation (4) sous sa formulation intégrale et tenant compte du fait que sur S_∞ on a $h = h_\omega = h_\infty$ et $\nabla h = 0$:

$$h_\omega(x) + \int_{S_\infty} h_\omega(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) ds = \int_{\Omega} \nabla_y(\omega \wedge \mathbf{u}) G(x,y) dv \quad (8)$$

La différence des deux équations (6) et (8) nous donne l'équation intégrale définissant h_γ où les intégrations se font seulement sur la surface S_0 :

$$k h_\gamma(x) + \int_{S_0} h_\gamma(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) ds = (1-k)h_\omega(x) - \int_{S_0} h_\omega(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) ds + \int_{S_0} G(x,y) \frac{\partial h}{\partial n_y}(y) ds \quad (9)$$

III – discrétisation

Le problème 4 permettant de calculer h_ω est résolu sur un maillage cartésien régulier ne respectant pas les parois solides. Il est discrétisé par une méthode de volumes finis.

L'équation intégrale (9) est résolue avec les techniques habituelles : les frontières sont discrétisées en un ensemble de lignes polygonales et l'intégrale est évaluée sur chacun des segments constituant ces lignes. La présence de coins dans le domaine de calcul est une source d'erreur pour les méthodes intégrales. Pour améliorer la précision de la méthode, la discrétisation du noyau de l'intégrale a été réalisée à l'aide d'une généralisation de la méthode dite de double nœud de Grilli et Svendsen [7].

Cette méthode est basée sur deux idées principales. D'une part sur un point anguleux, il existe deux définitions de la normale, d'autre part la meilleure précision est obtenue en adaptant le facteur k dans 6 à une combinaison linéaire des solutions correspondant à chacune de ces deux définitions. On peut rapprocher cette argumentation de la condition de continuité du noyau de l'équation intégrale : celui-ci faisant explicitement intervenir la normale, celle-ci doit être continue, même si elle cesse d'être orthogonale à la frontière discrétisée. Il s'agit en quelque sorte de définir une approximation régulière de la normale qui ne sera orthogonale, ni à la frontière réelle, ni à la frontière discrète, mais à une approximation régulière de la première. La qualité de cette approximation repose évidemment sur celle de la discrétisation locale et sur l'ordre de l'approximation choisie. Avec des fonctions constantes par morceaux, donc non-continue, nous retrouvons la méthode de Grilly.

L'équation intégrale (9) peut être écrite sous la forme matricielle :

$$[A] [h_\gamma] = [B] \quad (10)$$

$[h_\gamma]$ est le vecteur inconnu contenant la valeur de h_γ au centre de chaque segment de la surface. $[B]$ le vecteur second membre sur lequel on fixe les conditions aux limites sur les segments. $[A]$ est une matrice carré où on peut lire sur chaque ligne l'influence des points d'intégration sur un point d'observation donné.

Sur la figure 2 on présente l'erreur relative sur la pression hydrostatique calculée dans une cuve de dimension $[1 \times 1]$.

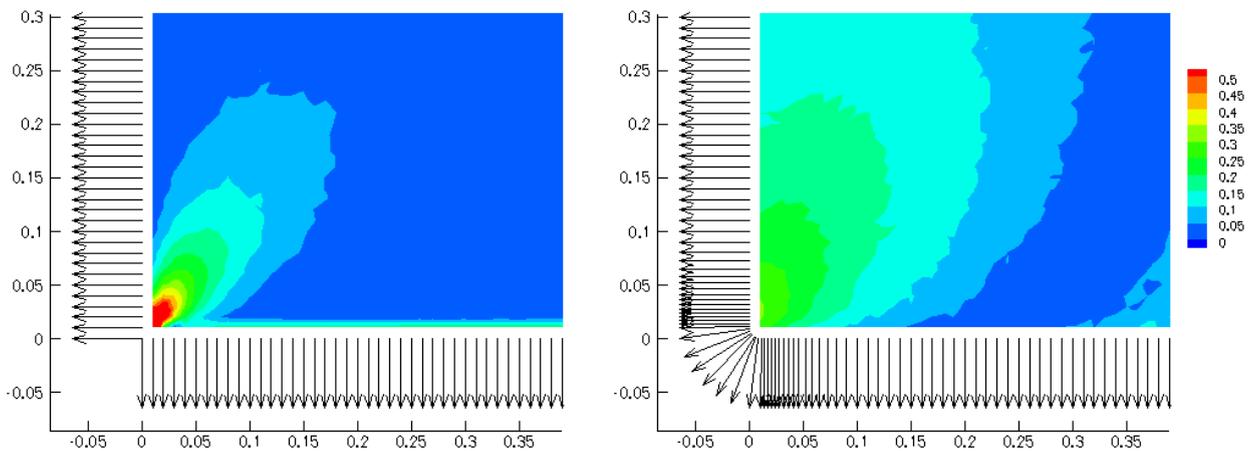


Figure 2 – Erreur relative de calcul de pression : On remarque qu’avec une discrétisation respectant la continuité de vecteur normal au voisinage d’un angle 90° , l’erreur est moins concentrée et plus faible ce qui est conforme aux analyses théoriques connues de méthodes similaires.

IV – applications

IV – 1 à partir d’un champ de vitesse numérique

La méthode que nous venons de présenter à été appliquée à différents exemples de champs de vitesses. Dans le cas d’un champ de vitesse numérique, on a utilisé les résultats obtenu par un code de calcul DNS couplé avec une méthode de frontières fictives pour modéliser les effets des parois. La configuration choisie est celle d’un écoulement autour d’un cylindre [10] avec un nombre de Reynolds $Re = 150$, un nombre de Strouhal $Sr = 0.2$. Le cylindre était découpé en 100 segments. Les résultats sont pris à l’instant $t = 3/10T$, T étant la période de l’écoulement.

Les champs de pression obtenu par les deux méthodes de calcul sont illustrés sur la figure 3 . On remarque que le deux champs de pression sont similaires avec un maximum de pression au point d’arrêt amont plus accentué dans le cas de la méthode de frontières fictives. L’observation du coefficient de pression à la paroi du cylindre précise ce résultat : le maximum est le même dans les deux cas, mais l’étalement de la zone de haute pression est plus fort pour la méthode de frontières fictives. Par ailleurs, les minima de pression observées au voisinage des points de séparation sont plus accentués. On retrouvera cette caractéristiques dans l’ensemble de l’écoulement ce qui semble indiquer que la partie ”méthode intégrale de frontière” amorti moins les extremas que la méthode de frontières fictives à la paroi, mais les étale plus dans le champ. Rappelons que ce dernier étalement n’est pas lié à une quelconque dissipation numérique puisque le transport est assuré dans les deux cas par la même méthode. Il s’agit simplement du résultat d’une intégration moins précise de l’équation de Poisson car la méthode de frontières ficives, de précision limitée au voisinage des parois, fait par contre appel à des schémas de haute précision partout ailleurs.

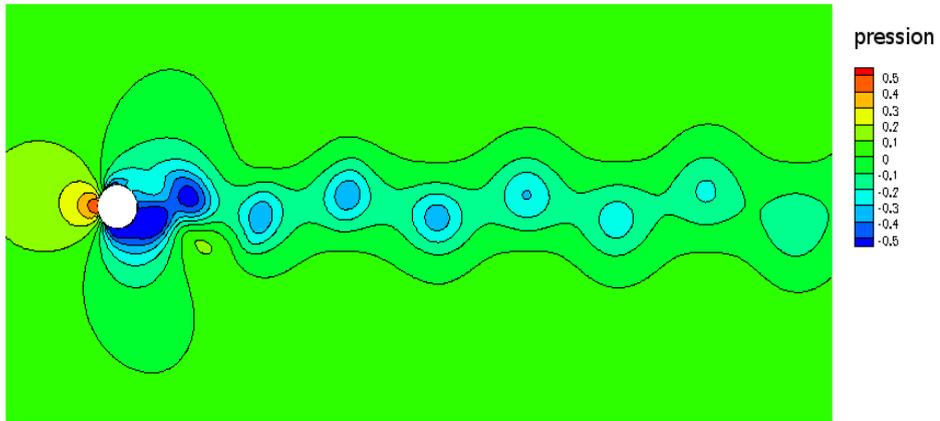
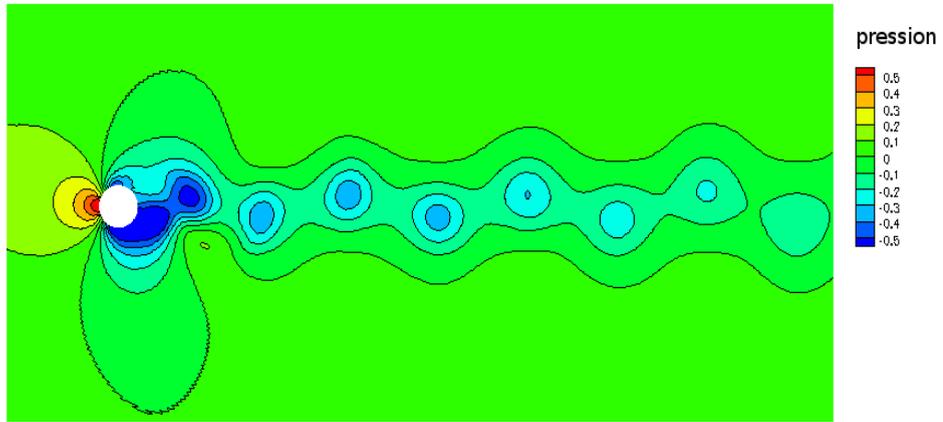


Figure 3 – Champ de pression calculé en haut par les frontières fictives, en bas par résolution de l'équation de Poisson

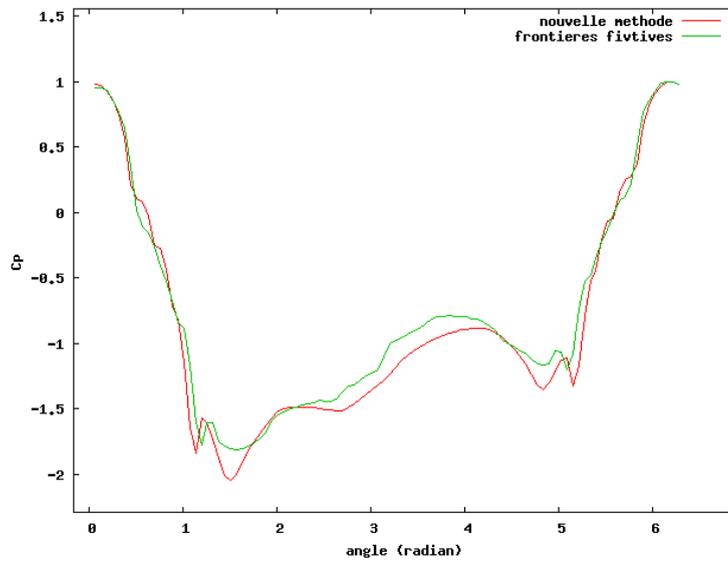


Figure 4 – Coefficients de pression sur le cylindre

IV – 2 à partir d'un champ de vitesse mesuré

Dans le cas d'une application à un champ de vitesse mesuré, on a choisi l'écoulement autour d'un profil en configuration dite de vol battu [9]. L'expérience a été réalisée dans une cuve d'eau de dimensions $1 \times 1 \times 2 \text{ m}^3$. Le profil étudié est une aile NACA0012 de corde et d'envergure respectivement égales à 60 et 500 mm. Le mouvement du profil est représenté sur la figure 5 où on reconnaîtra un mouvement de "godille". Il est caractérisé par une vitesse de translation $u_0 = 0.0166 \text{ m/s}$ et un angle d'attaque différent entre les phases appelées upstroke et downstroke (20° et 45° , respectivement).

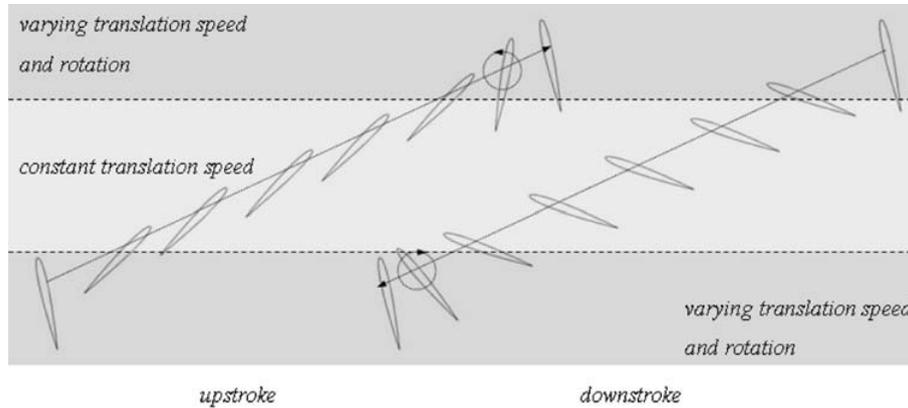


Figure 5 – Description du mouvement du profil

Le champ de vitesse est mesuré par la méthode PIV (Particle Image Velocimetry). Ces mesures sont effectuées dans le plan de symétrie vertical du profil où l'écoulement est supposé bidimensionnel. La pertinence de cette hypothèse et la qualité des mesures du champ de vitesse sont très importants pour la précision du calcul du champ de pression.

La figure 6 illustre les variations du coefficient de pression C_p calculé à différents instants de l'écoulement pendant une période T .

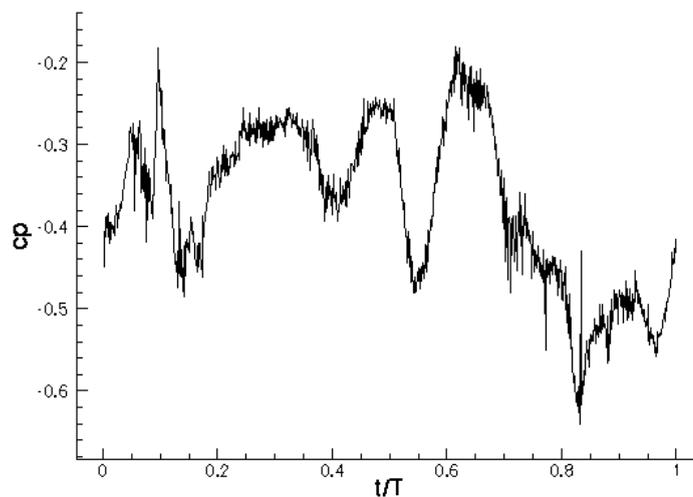


Figure 6 – Coefficient de pression sur le profil en fonction du temps

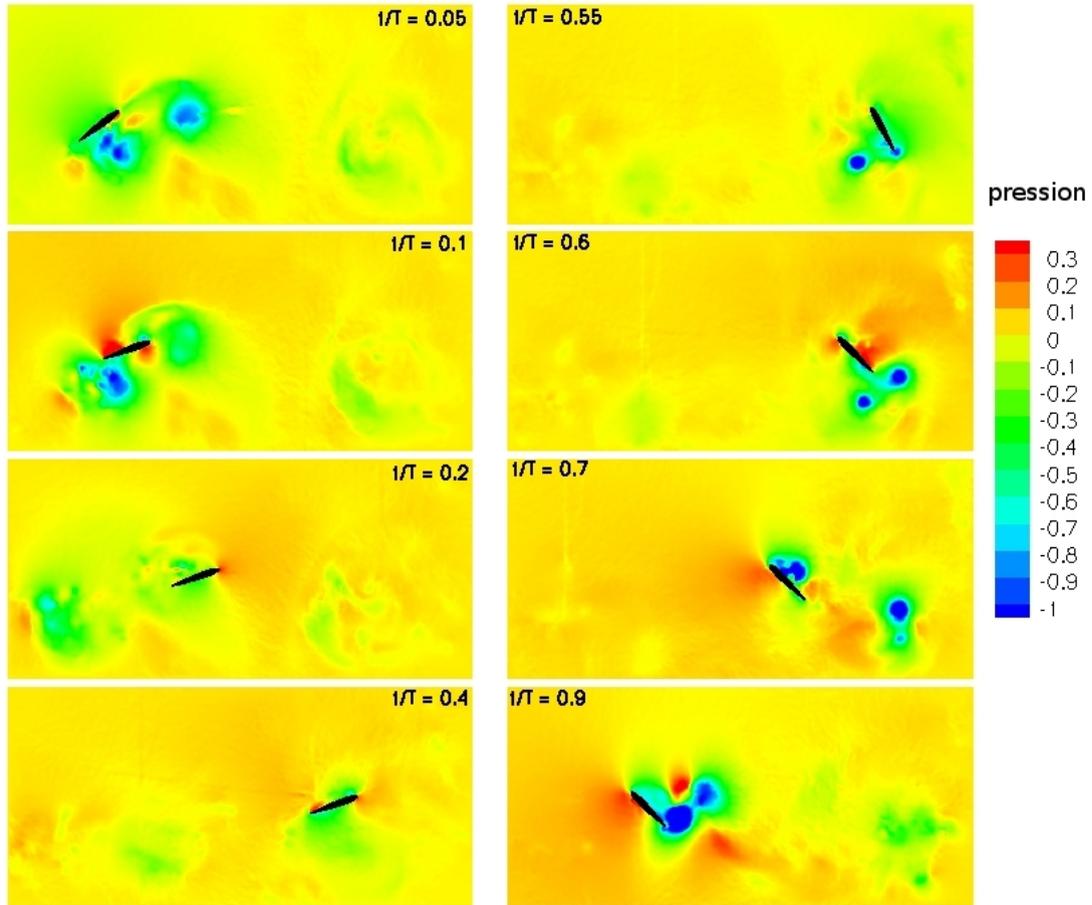


Figure 7 – champ de pression adimensionnel à différents instants

La figure 7 donne la carte du champ de pression adimensionnel calculé à différents instants de l'écoulement pendant une période T . On remarque que pendant la phase dite "de rotation" ($t \leq 0.1$ et $t \leq 0.1$) À $t = 0.1T$, le profil est également en mouvement de translation et continue à tourner jusqu'à atteindre un angle d'attaque de 20° . A cause de cette rotation, la pression est très importante au voisinage du bord de fuite côté extrados. À $t = 0.3T$, le profil est en translation seul et la pression maximale retrouve sa position habituelle au voisinage du bord d'attaque. Enfin, à $t = 0.6T$, le profil a entamé une rotation pour la phase retour jusqu'à atteindre un angle d'attaque de 45° . Les forces de pression sont encore très importants au voisinage du bord de fuite côté extrados et au bord d'attaque la pression est plus élevée que quand le profil était dans la phase aller à cause de la différence d'angle entre les deux phases. On note enfin, les zones de dépression derrière le bord de fuite créés quand le profil est en rotation.

Ces résultats ne peuvent être comparés à des résultats de mesure de pression dans le champ car de telles mesures n'existent pas. Il faut néanmoins se rappeler que le champ de vitesse, même dans le plan médian, est rarement bidimensionnel. Tout au plus peut on supposer raisonnablement que la composante normale au plan et sa dérivée normale sont petites, de même que celles des autres composantes de la vitesse.

V – Conclusion

La méthode proposée ici permet de construire le champ de pression correspondant à un champ de vitesse défini sur un réseau de point non structuré. Le problème correspondant n'est pas uniquement rencontré avec des méthodes particulières type SPH, mais peut également se retrouver dans beaucoup d'autres situations, en particulier expérimentales. Dans ce dernier cas, plusieurs difficultés sont encore présentes : la plupart des champs de vitesse expérimentaux sont incomplets, à la fois parce qu'ils sont mesurés sur des réseaux de points non nécessairement réguliers et parce qu'il manque une composante. L'estimation de l'erreur réalisée avec ces deux problèmes reste à faire. Enfin, cette méthode a été construite pour améliorer la précision des méthodes SPH. Il est évident que son emploi systématique représente un accroissement du temps CPU pas toujours acceptable. Par contre, et parce qu'il s'agit d'une formulation exacte, elle pourrait apporter une correction périodique au champ des pressions calculées.

Références

- [1] A. K. Chaniotis, D. Poulidakos, and P. Koumoutsakos. Remeshed smoothed particle hydrodynamics for the simulation of viscous and heat conducting flows. *Journal of Computational Physics*, 182(1) :67 – 90, 2002.
- [2] Sharen J. Cummins and Murray Rudman. An sph projection method. *J. Comput. Phys.*, 152(2) :584–607, 1999.
- [3] Marco Ellero, Mar Serrano, and Pep Español. Incompressible smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 226(2) :1731 – 1752, 2007.
- [4] B. Cantaloube et C. Rhebach. Calcul de la pression dans écoulement rotationnel incompressible de fluide parfait. *Rech. Aérop.*, 1988.
- [5] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 181 :375–389, November 1977.
- [6] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73(2) :325–348, December 1987.
- [7] S.T. Grilli and I.A. Svendsen. Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 7(4) :178 – 195, 1990.
- [8] A. Jollès S. Huberson and W. Shen. Numerical simulation of incompressible viscous flows by means of particle methods. *Lect. Appl. Math*, 1991.
- [9] Thierry Jardin, Ludovic Chatellier, Alain Farcy, and Laurent David. Correlation between vortex structures and unsteady loads for flapping motion in hover. *Experiments in Fluids*, 47 :655–664, 2009. 10.1007/s00348-009-0658-x.
- [10] Sylvain Laizet and Eric Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :5989 – 6015, 2009.

- [11] G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini, and P. Ferrant. Two-dimensional sph simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213(2) :803 – 822, 2006.
- [12] J.-M. Cherfilis L. Blonce G. Pinon E. Rivoalen. Simulation numérique des interactions houle-ouvrages marins. *XXVIe Rencontres Universitaires de Génie Civile*, 2008.
- [13] Vila, Jean-Paul. Méthodes particulières régularisées. développements récents et nouvelles applications. *ESAIM : Proc.*, 3 :131–146, 1998.