

ANALYSE DES EFFETS THERMIQUES EN CAVITATION

ANALYSIS OF THERMAL EFFECTS IN CAVITATION

C. PELLONE^{*}, J.P. FRANC^{}**

***Christian.Pellone@hmg.inpg.fr** 04 76 82 50 39

****Jean-Pierre.Franc@hmg.inpg.fr** 04 76 82 50 35

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels
Institut National Polytechnique de Grenoble - Université Joseph Fourier - Centre National de la Recherche Scientifique
B.P. 53 – 38041 Grenoble Cedex 09 – France

Résumé

Un modèle simple basé sur la résolution de l'équation de Rayleigh décrivant l'évolution d'une bulle sphérique isolée est développé pour analyser les effets thermiques en cavitation. Deux approches différentes sont utilisées pour modéliser le transfert de chaleur à travers l'interface liquide-vapeur. La première est basée sur un modèle de type convectif, la seconde sur la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur dans le liquide entourant la bulle. Dans les deux cas, l'importance des effets thermiques est contrôlée par un nombre adimensionnel, le nombre de Nusselt pour le modèle convectif et le nombre de Peclet pour le modèle conductif. Les deux modèles sont appliqués à un inducteur cavitant. La distribution de pression sur les pales est issue d'un calcul 2D potentiel de grille d'aubes. La cavité qui se développe depuis le bord d'attaque est approximée par l'enveloppe d'une bulle hémisphérique se déplaçant sur la face en dépression de la pale. Les formes de cavités ainsi que les distributions de température prédites par les deux modèles sont comparées. Les évolutions de la longueur de cavité en fonction du nombre de cavitation pour l'eau froide (sans effet thermique) et pour le fluide réfrigérant R114 à deux températures différentes sont confrontées aux résultats expérimentaux.

Summary

A simple model based on the resolution of Rayleigh equation for a single spherical bubble is used to analyse thermal effects in cavitation. Two different assumptions are considered for modelling heat transfer through the liquid / vapour interface. One is based upon a convective type approach using a convection heat transfer coefficient or the equivalent Nusselt number. The other one is based upon the resolution of the heat diffusion equation in the liquid surrounding the bubble. This conductive type approach requires to specify the eddy thermal diffusivity or the equivalent Peclet number. Both models are applied to a cavitating inducer. The basic pressure distribution on the blades is determined from a potential flow computation in a 2D cascade of flat plates. The sheet cavity which develops from the leading edge is approximated by the envelope of a hemispherical bubble travelling on the suction side of the blade. Cavity shapes and temperature distributions predicted by both models are compared. The evolution of cavity length with the cavitation number for cold water (without thermal effects) and for Refrigerant 114 at two different temperatures are compared to experimental data.

Nomenclature

B	facteur de Stepanoff	V_u	vitesse de l'écoulement à l'amont
c	longueur de corde de la pale	W	vitesse relative de l'écoulement
C_p	coefficient de pression	W_u	vitesse relative de l'écoulement à l'amont
$c_{p\ell}$	capacité calorifique du liquide	\underline{x}	abscisse curviligne sur la pale
e	épaisseur de la pale	\bar{x}	abscisse curviligne adimensionnelle x/c
h	coefficient convectif de transfert de chaleur	α	paramètre thermodynamique de Kato
ℓ	longueur de cavité	α_a	angle d'attaque
L	chaleur latente de vaporisation	α_ℓ	diffusivité thermique du liquide
N_u	nombre de Nusselt basé sur la longueur de corde	α_t	diffusivité thermique turbulente
p	pression	α_v	taux de vide
p_u	pression de référence à l'amont	δ	épaisseur de la couche limite thermique
p_v	pression de vapeur	Δp_v^*	écart caractéristique de pression de vapeur
P_e	nombre de Peclet	ΔT	écart de température $T_\infty - T_c$
P_r	nombre de Prandtl	ΔT^*	écart caractéristique de température
R	rayon de bulle	ε	rapport α_t/α_ℓ ou λ_t/λ_ℓ
\bar{R}	rayon adimensionnel R/c	λ_ℓ	conductivité thermique du liquide
R_e	nombre de Reynolds basé sur la longueur de corde	λ_t	conductivité thermique turbulente
t	temps	μ_ℓ	viscosité moléculaire de l'eau
T	température	ρ_v	masse volumique de la vapeur
T_c	température locale dans la cavité	ρ_ℓ	masse volumique du liquide
T_∞	température du liquide à l'infini	Σ	paramètre thermodynamique de Brennen
V	vitesse de l'écoulement	σ_c	nombre de cavitation basé sur $p_v(T_c)$
		σ_v	nombre de cavitation
		τ	temps de transit

I. INTRODUCTION

L'effet thermodynamique en cavitation est caractérisé par un écart de température entre le liquide à l'infini et les zones diphasiques de cavitation. Cet effet est dû à la chaleur latente de vaporisation qui, lors de la phase de vaporisation, est soutirée au liquide entourant la zone de cavitation dont la température se trouve alors abaissée. Si cet effet est négligeable pour l'eau à température ambiante, il n'en est pas de même pour les fluides thermosensibles tels que les fluides cryogéniques utilisés pour la propulsion des moteurs fusées.

Parmi les paramètres introduits habituellement pour caractériser cet effet, citons:

- le facteur de Stepanoff [1,2] :

$$B = \frac{T_\infty - T_c}{\Delta T^*} \quad (1)$$

qui représente le rapport de l'écart de température ΔT entre le liquide loin de la cavité (T_∞) et la cavité (T_c) à un écart caractéristique ΔT^* . Ce dernier peut être considéré comme le refroidissement qu'il faudrait appliquer à une unité de volume de liquide pour fournir la chaleur latente nécessaire à la vaporisation d'une unité de volume de vapeur. Il est défini par $\Delta T^* = \rho_v L / \rho_\ell c_{p\ell}$ où ρ_v et ρ_ℓ sont les masses volumiques de la vapeur et du liquide et L et $c_{p\ell}$ la chaleur latente de vaporisation et la capacité calorifique du liquide. Cet écart dépend fortement du fluide utilisé. Il est de l'ordre de 0,01 K pour l'eau à température ambiante alors qu'il vaut environ 1 K pour l'hydrogène liquide à 22 K.

- le paramètre de Brennen [3,4] :

$$\Sigma = \frac{\Delta p_v^*}{\rho_\ell \sqrt{\alpha_\ell}} \quad (2)$$

ou de façon équivalente le paramètre de Kato [5] :

$$\alpha = \Sigma \sqrt{\frac{\rho_\ell}{\rho_v}} \quad (3)$$

Δp_v^* étant l'écart de pression caractéristique correspondant à ΔT^* et défini par :

$$\Delta p_v^* = \frac{dp_v}{dT} \times \Delta T^* \quad (4)$$

dp_v/dT étant la pente de la courbe de pression de vapeur et α_ℓ la diffusivité thermique du liquide.

Le paramètre de Brennen est déduit de l'analyse de la dynamique d'une bulle isolée sous l'hypothèse que le transfert de chaleur à l'interface se fait intégralement par conduction dans le liquide. L'épaisseur de la couche limite thermique joue un rôle important caractérisé par la présence du terme en racine carrée de la diffusivité thermique du liquide.

A partir d'une analyse systématique des expériences de Hord [6], Kato a montré une bonne corrélation entre l'amplitude de l'effet thermodynamique mesuré par le paramètre sans dimension $2\Delta p_v/(\rho_\ell V^2)$ et le paramètre adimensionnel $\alpha\sqrt{c/V^3}$ où c et V sont respectivement une longueur et une vitesse de référence de l'écoulement.

Dans ce type de modèle, où l'interface liquide / vapeur (qu'il s'agisse d'une bulle ou d'une cavité) est bien définie, le transfert de chaleur caractérisé par la diffusivité thermique moléculaire du liquide est beaucoup trop petit pour obtenir l'écart de température donné par l'expérience. Pour avoir une prédiction correcte, Kato [5] et Watanabe et al. [7] ont montré que la diffusivité moléculaire devait être multipliée par un coefficient d'amplification ε pouvant aller jusqu'à 10^5 . La valeur élevée de ce coefficient est généralement attribuée aux phénomènes de turbulence qui améliorent considérablement l'efficacité des transferts thermiques. Cette tendance a été confirmée par Fruman et al. [8, 9] sur la base du modèle d'entraînement de Billet [10, 11, 12].

Parallèlement aux modèles à interface, des modèles diphasiques ont été développés. Le mélange des deux phases est en général considéré comme un pseudo-fluide homogène obéissant aux équations de Navier-Stokes. Dans ce cas, une loi d'état doit être introduite pour la masse volumique du mélange, par exemple une loi barotrope (Rapposelli et d'Agostino [13], Rolland et al. [14]). Une autre approche consiste à résoudre une équation de transport supplémentaire pour la phase vapeur comportant un terme source modélisant le phénomène de cavitation (cf. Tani & Nagashima [15], Hosangadi & Ahuja [16, 17, 18]). Le processus de vaporisation ou de condensation peut être modélisé par des équations spécifiques [16] ou en ensemençant le fluide en microbulles et en suivant leur évolution grâce à l'équation de Rayleigh-Plesset (cf. Kubota et al. [19], Singhal et al. [20]). Pour tenir compte des effets thermiques, il est alors nécessaire d'adjoindre l'équation d'énergie pour le mélange aux équations de conservation de masse et de quantité de mouvement.

Dans le cas des modèles à interface, le volume de liquide entourant la vapeur étant quasi infini, le transfert de chaleur est limité par le taux de croissance de la couche limite thermique. Par contre, les modèles diphasiques qui font l'hypothèse d'un mélange intime entre le liquide et sa vapeur sont tels que le volume de liquide entourant une bulle donnée est naturellement limité par les bulles environnantes. De fait, pour les modèles diphasiques, les effets thermiques sont principalement limités par le volume de liquide capable de fournir la chaleur de vaporisation et non par la croissance d'une couche limite thermique comme c'est le cas pour les modèles à interface. Les effets thermiques sont alors contrôlés par l'évolution du taux de vide et ne dépendent pas directement de la diffusivité thermique du liquide.

La différence entre les deux types de modèles peut facilement être mise en évidence en comparant les expressions du facteur B. Dans le cas d'une bulle qui passe d'un rayon nul à un rayon R pendant le temps t , le facteur B est donné par (cf. [21]):

$$B \approx \frac{R}{\sqrt{\alpha_\ell t}} \quad (5)$$

Pour un mélange diphasique de taux de vide α_v , la conservation de la chaleur conduit à (cf. [22]) :

$$B \approx \frac{\alpha_v}{1 - \alpha_v} \quad (6)$$

La relation (5) montre clairement que les effets thermiques pour une bulle isolée dépendent de la diffusivité thermique du liquide, ce qui n'est pas le cas de la relation (6). De plus, la relation (6) devient singulière quand le taux de vide tend vers 1, ce qui montre que le modèle diphasique n'est plus valable quand la cavité n'est composée que de vapeur. Dans ce cas, un modèle à interface s'impose. Il est donc important en pratique de reconnaître le type de cavitation afin d'identifier le mécanisme physique qui limite réellement l'apport de chaleur nécessaire à la vaporisation.

Cette communication est consacrée au développement d'une méthode d'analyse des effets thermiques en cavitation basée sur la résolution de l'équation de Rayleigh pour la dynamique d'une bulle de vapeur. Il appartient à la classe des modèles à interface pour lesquels le transfert de chaleur au travers de la couche limite thermique est supposé être le phénomène physique limitatif. L'originalité de cette contribution réside dans le fait qu'un terme relatif aux effets thermiques est introduit dans l'équation de Rayleigh et que deux approches, l'une convective et l'autre conductive, sont considérées pour expliciter ce terme. Les résultats de la modélisation sont comparés à des résultats d'essais d'un inducteur de turbo-pompe spatiale [22] obtenus en fluide réfrigérant de type R114 connu pour présenter des effets thermiques relativement importants.

Le calcul est mené en deux étapes. La première consiste à déterminer le champ de pression. Pour cela, une méthode intégrale aux frontières a été choisie. La seconde consiste à résoudre l'équation de Rayleigh en utilisant la distribution de pression calculée précédemment. La forme de la cavité est assimilée à l'enveloppe d'une bulle hémisphérique qui grossit puis implose sur l'extrados de la pale.

Ce genre de modèle présente un certain nombre de limitations. L'une d'entre elles est que le champ de pression n'interagit pas avec la cavité puisque la bulle est calculée à partir d'un champ de pression obtenu en écoulement non cavitant. La nature 2D du calcul est une autre limitation puisqu'on sait que les inducteurs peuvent être le siège d'écoulements de retour qui peuvent changer de façon significative les angles d'attaque. Néanmoins, cette contribution fournit un support théorique pour l'interprétation et la compréhension physique des résultats expérimentaux.

II. FORMULATION ET RESOLUTION

II.1. Calcul de l'écoulement de base

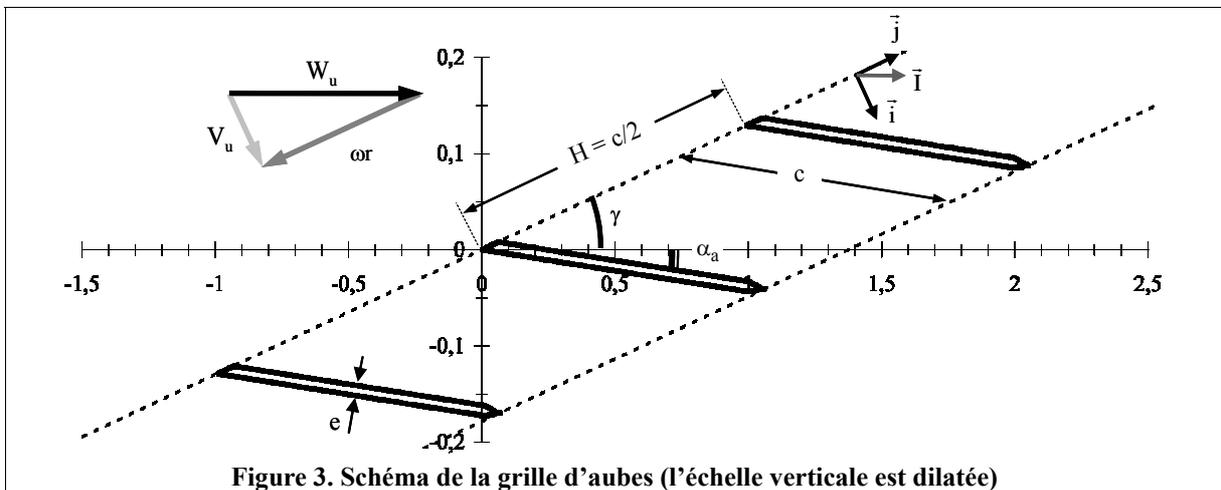
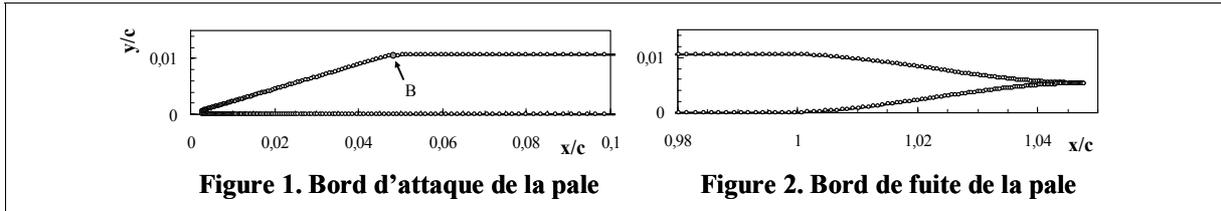
L'inducteur est représenté par une grille d'aubes (Figure 3). Cette configuration 2D est classiquement obtenue par une section cylindrique de la machine tournante à un rayon donné r . Les agrandissements des bords d'attaque et de fuite sont montrés respectivement sur les figures 1 et 2. Le calcul d'évolution de bulle commence à la fin du biseau extrados (point B) où la pression est minimum (figure 4). Cette position correspond au point de détachement observé des cavités. La forme du bord de fuite a été choisie de façon à obtenir une sortie régulière de l'écoulement dans la direction de la pale. L'épaisseur relative des pales est de l'ordre de 1% et la solidité c/H vaut 2. L'angle d'incidence α_a et l'angle γ de grille sont tels que le biseau soit parallèle à la direction \vec{j} de la grille. La vitesse d'entrée $V_{u,i}$ est supposée perpendiculaire à la grille (pas de pré-rotation).

A l'infini amont, la vitesse relative de référence est:

$$W_u = \sqrt{V_u^2 + \omega^2 r^2} \quad (7)$$

où ω est la vitesse angulaire. L'écoulement radial normal à la surface cylindrique est ignoré et l'écoulement est supposé bidimensionnel dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) . En supposant de plus l'écoulement incompressible et irrotationnel et le fluide parfait, le coefficient de pression est donné par :

$$C_p = \frac{p - p_u}{\frac{1}{2} \rho \ell W_u^2} = 1 - \frac{W^2 - \omega^2 r^2}{W_u^2 - \omega^2 r^2} \quad (8)$$



La distribution de pression sur la pale est calculée par la méthode des équations intégrales aux frontières. Une double distribution de sources et de tourbillons (σ^* , γ^*) est répartie sur la surface d'une pale avec une périodicité H suivant la direction de la grille afin de prendre en compte la série infinie de pales. Cette distribution est choisie de façon à ce que la vitesse relative à l'infini amont soit dans la direction \vec{I} . Les conditions aux limites sont une condition de glissement sur la pale et la continuité de pression au bord de fuite. La conservation du débit dans l'inducteur nécessite que la composante normale au front de grille de la vitesse relative soit la même à l'infini amont et aval. L'écoulement à l'infini aval se trouve dévié par rapport à celui à l'infini amont.

La double distribution utilisée ici introduit plus d'inconnues que d'équations. Des conditions supplémentaires sont

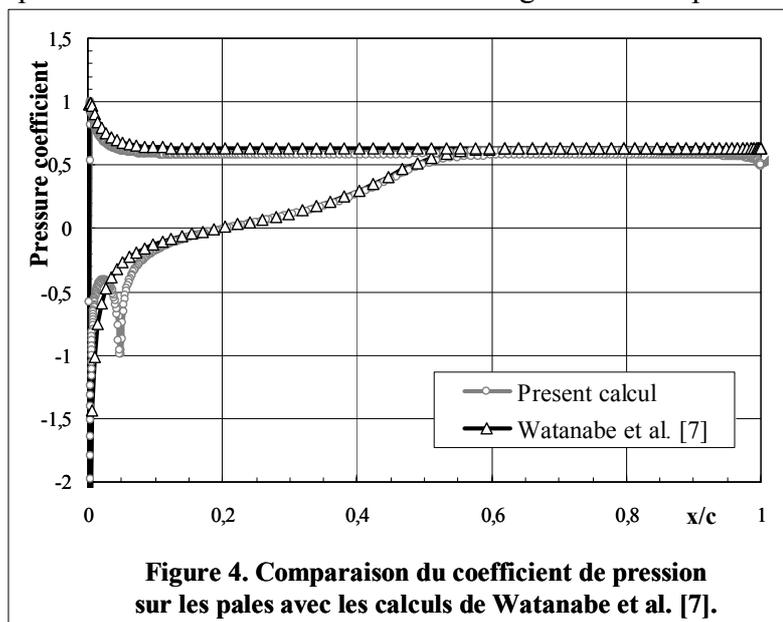


Figure 4. Comparaison du coefficient de pression sur les pales avec les calculs de Watanabe et al. [7].

imposées de manière à minimiser les erreurs de discrétisation. Cela permet de calculer, avec une très bonne précision, le coefficient de pression sur des pales de petite épaisseur relative. Ce calcul a été validé par comparaison avec celui de Watanabe et al. [7]. La figure 4 met en évidence la bonne concordance des résultats, excepté au bord d'attaque dans la zone du biseau où les écarts sont dus à la nature non linéaire du présent calcul contrairement à l'étude [7] dans laquelle les pales ont une épaisseur nulle.

II.2. Equation de Rayleigh avec effets thermiques

En négligeant les effets visqueux, la tension superficielle à l'interface et les effets de gaz non condensables, ce qui est justifié dès que le germe de cavitation devient une bulle macroscopique, l'évolution au cours du temps t d'une bulle sphérique de rayon R en milieu infini est donnée par l'équation classique de Rayleigh :

$$R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_v(T_c) - p(t)}{\rho_\ell} \quad (9)$$

Le champ de pression $p(t)$ est celui auquel la bulle est assujettie lorsqu'elle se déplace sur l'extrados de la pale. Il est obtenu par la procédure décrite au § II.1.

Pour prendre en compte les effets thermiques dans l'équation (9), il est nécessaire de considérer la pression de vapeur p_v à la température de cavité T_c qui est différente de la température T_∞ dans le liquide loin à l'infini. En utilisant le coefficient de pression défini en (8), ainsi que le nombre de cavitation habituel :

$$\sigma_v = \frac{p_u - p_v(T_\infty)}{\frac{1}{2} \rho_\ell W_u^2}$$

l'équation (9) devient :

$$R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_v(T_c) - p_v(T_\infty)}{\rho_\ell} - W_u^2 \frac{C_p + \sigma_v}{2} \quad (10)$$

En supposant que la bulle se déplace sur la pale avec la vitesse locale du fluide $W_u \sqrt{1 - C_p}$, on peut transformer les dérivées en temps en dérivées spatiales par :

$$\frac{d}{dt} = W_u \sqrt{1 - C_p} \frac{d}{dx}$$

où x désigne l'abscisse curviligne sur la pale. En adimensionnalisant les variables spatiales par la corde c de la pale (variables surlignées), on obtient la forme adimensionnelle suivante de l'équation (10) :

$$\left[1 - C_p \right] \left[\bar{R} \frac{d^2 \bar{R}}{d\bar{x}^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{x}} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{dC_p}{d\bar{x}} \bar{R} \frac{d\bar{R}}{d\bar{x}} + \frac{1}{\rho_\ell W_u^2} \frac{dp_v}{dT} (T_\infty - T_c) = - \frac{C_p + \sigma_v}{2} \quad (11)$$

Dans la suite, deux modèles sont utilisés, le modèle convectif et le modèle conductif, pour expliciter le terme relatif aux effets thermiques dans cette équation.

Approche convective

Le transfert de chaleur à l'interface est supposé proportionnel à la différence de température, c'est-à-dire égal à $h(T_\infty - T_c)$. En l'absence de corrélation validée pour les écoulements cavitants, le coefficient de transfert de chaleur convectif h est considéré ici comme un paramètre d'ajustement.

Le bilan de chaleur à l'interface de la bulle :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_v \right] L = 4\pi R^2 h (T_\infty - T_c)$$

permet d'expliciter la différence de température. Elle apparaît proportionnelle au taux de variation du rayon de bulle :

$$\Delta T = T_\infty - T_c = \frac{\rho_v L}{h} \frac{dR}{dt} \quad (12)$$

Pendant la phase de croissance, la température de la bulle est inférieure à la température du liquide et inversement pendant la phase d'implosion. En injectant l'expression (12) dans l'équation générale (11), on obtient l'équation de Rayleigh pour l'approche convective, à savoir :

$$\left[1 - C_p\right] \left[\bar{R} \ddot{\bar{R}} + \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{C}_p \bar{R} \dot{\bar{R}} + \frac{1}{N_u} \frac{\Delta p_v^*}{\rho_\ell \alpha_\ell} \tau \sqrt{1 - C_p} \dot{\bar{R}} = - \frac{C_p + \sigma_v}{2} \quad (13)$$

où $N_u = h c / \lambda_\ell$ est le nombre de Nusselt et $\tau = c / W_u$ le temps caractéristique de transit.

L'intensité des effets thermiques dépend du rapport τ / τ_T , où $\tau_T = N_u (\rho_\ell \alpha_\ell) / \Delta p_v^*$ peut être considéré comme un temps thermique puisqu'il contient l'information sur le transfert de chaleur à l'interface. Si ce rapport est petit devant 1, alors les effets thermiques sont négligeables et on retrouve l'équation classique de Rayleigh. L'évaluation de l'importance des effets thermiques peut donc se faire en comparant ces deux temps caractéristiques. Outre le nombre de Nusselt, le temps thermique dépend du facteur $\Delta p_v^* / \rho_\ell \alpha_\ell$ dont l'expression est très proche de celle du paramètre de Brennen (2).

Comme déjà mentionné, le coefficient convectif de transfert de chaleur (ou le nombre sans dimension de Nusselt correspondant) est un paramètre libre du modèle. Pour rendre le calcul complètement prédictif, il serait nécessaire de corrélérer le nombre de Nusselt aux nombres de Reynolds ($Re = c W_u \rho_\ell / \mu_\ell$) et de Prandtl ($Pr = \mu_\ell / \alpha_\ell \rho_\ell$), comme cela est fait classiquement en convection forcée monophasique.

Remarquons que l'équation (12) prend la forme adimensionnelle suivante:

$$B = \frac{P_e \sqrt{1 - C_p}}{N_u} \dot{\bar{R}} \quad (14)$$

P_e étant le nombre de Peclet défini par la relation $P_e = Re Pr = W_u c / \alpha_\ell$.

Approche conductive

Cette seconde approche nécessite la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur dans le liquide entourant la bulle. En faisant l'hypothèse que l'épaisseur de la couche limite thermique dans le liquide est beaucoup plus petite que le rayon de la bulle, Plesset & Zwick [23, 24, 25] ont obtenu une expression explicite de la température de la bulle à l'interface. Dans cette hypothèse, la température d'interface est donnée par l'expression intégrale suivante :

$$B = \frac{T_\infty - T_c}{\Delta T^*} = \sqrt{\frac{P_e}{\varepsilon}} J(\bar{x}) \quad (15)$$

où :

$$J(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=\bar{x}} \frac{\bar{R}^2(u) \frac{d\bar{R}}{d\bar{x}}(u) du}{\sqrt{\int_{v=u}^{v=\bar{x}} \frac{\bar{R}^4(v)}{\sqrt{1 - C_p}} dv}}$$

En reportant l'expression (15) dans l'équation générale (11) et en introduisant le paramètre de Brennen (2), on obtient l'équation de Rayleigh pour l'approche conductive :

$$\boxed{[1 - C_p] \left[\bar{R} \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{C}_p \bar{R} \dot{R} + \Sigma \sqrt{\frac{c}{W_u^3}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} J = -\frac{C_p + \sigma_v}{2}} \quad (16)$$

L'expression de J montre que (16) est en toute rigueur une équation intégral-différentielle complexe.

La validité de cette approche dépend principalement de la validité de l'hypothèse de Plesset & Zwick qui est discutée ci-après. L'épaisseur de la couche limite thermique est estimé par $\delta \approx \sqrt{\varepsilon} \alpha_\ell \tau$, ce qui donne :

$$\frac{\delta}{c} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{P_e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{R_e P_r}}$$

Une valeur typique du nombre de Reynolds pour les inducteurs de turbopompe de fusée est 10^6 et pour le fluide thermosensible R114 considéré ici le nombre de Prandtl est de l'ordre de 5. Avec un coefficient d'amplification ε de 10^4 , on obtient $\delta/c \approx 0,04$, ce qui montre que l'hypothèse de Plesset & Zwick est justifiée. Remarquons que plus ε est grand, plus la diffusivité thermique effective est grande et moins cette hypothèse est valable.

Dans quelques cas, et particulièrement quand les effets thermiques deviennent importants, le modèle conductif peut conduire à des formes de cavité oscillantes ne correspondant pas à la réalité. Cet effet est observé dans la zone de fermeture de la cavité, là où la bulle collapse, c'est-à-dire quand la pression locale est a priori supérieure à la pression de vapeur. Si les effets thermiques sont importants, l'accroissement de température dû à la condensation augmente très sensiblement la pression de vapeur qui peut alors dépasser la pression locale. De ce fait, la dynamique de la bulle s'inverse et elle grossit à nouveau ce qui provoque l'oscillation de l'interface.

Afin d'éviter cet effet irréaliste, la différence de température $T_c - T_\infty$ est mise à zéro dès qu'elle devient positive. Cela revient à supposer que la température de la bulle ne peut jamais dépasser la température du liquide ou, en d'autres termes, que la diffusion de la chaleur est considérablement accrue pendant la phase du collapse de telle sorte que la température s'uniformise presque instantanément. L'instabilité de la forme sphérique et l'éclatement de la phase vapeur en petites structures pendant le collapse sont de nature à justifier cette hypothèse. Toute la phase de croissance, par contre, n'est pas affectée par cet effet. Une hypothèse identique est faite par Watanabe et al. [7] qui ont négligé le flux de chaleur dû à la condensation dans la zone de fermeture de la cavité. Ils justifient cette hypothèse par le fait que la condensation ne peut intervenir que relativement loin à l'aval de la poche à cause du phénomène de lâcher et d'entraînement des structures de vapeur par l'écoulement. Pour que les comparaisons entre les deux modèles soient cohérentes, la même hypothèse d'uniformisation de la température dans la zone de condensation a été faite pour le modèle convectif.

II.3. Résolution numérique

Les résolutions de l'équation différentielle (13) et de l'équation intégral-différentielle (16) sont faites à l'aide de deux méthodes de Runge Kutta couplées, une d'ordre 4 et l'autre d'ordre 5. La première donne une approximation de la solution, la deuxième une estimation de l'erreur commise. Cette combinaison due à Fehlberg et améliorée par Kash & Carp [26] permet de contrôler l'erreur pendant la procédure itérative. Pour une tolérance relative donnée (en général de l'ordre de 10^{-6}), l'ordre de grandeur de l'erreur est calculé et le pas d'intégration est modifié afin de satisfaire le critère de précision. Le pas est augmenté si l'erreur relative est inférieure à la tolérance et inversement. Le pas d'intégration devient ainsi variable, ce qui augmente considérablement la rapidité du calcul. Cette méthode a été étendue à la résolution d'un système de deux équations différentielles ayant les deux fonctions R et dR/dx comme fonctions inconnues. Dans ce cas l'erreur relative est simplement prise égale au maximum des deux erreurs respectives faites sur les deux fonctions.

La procédure itérative autorise de transformer l'équation intégral-différentielle (16) en une équation différentielle ordinaire. A l'itération courante, l'intégrale J est évaluée à l'aide des résultats obtenus à l'issue de toutes les itérations précédentes.

Les conditions initiales sont données par l'équilibre mécanique et thermique de la bulle. La vitesse de l'interface $(dR/dx)_0$ et son accélération $(d^2R/dx^2)_0$ sont initialisées à zéro, la température à T_∞ et d'après la définition de l'intégrale J (donnée à propos de la relation (15)), $J(0) = 0$. Pour initialiser correctement la procédure itérative, une valeur non nulle de R_0 est nécessaire. Nous avons vérifié que le comportement de la bulle est insensible à son rayon initial dans une très large gamme de variation.

Sous ces hypothèses, les équations (13) et (16) imposent, qu'au temps initial, $C_{p0} + \sigma_v = 0$. Le point de départ de la cavité étant fixé, cette dernière condition n'est généralement pas satisfaite, excepté dans le cas très particulier où $\sigma_v = -C_{p0}$. Néanmoins, pour toutes les valeurs de σ_v , les conditions initiales précédentes sont préservées. C'est pourquoi la vitesse de l'interface présente une discontinuité au temps initial qui se manifeste en particulier par un détachement de cavité non tangent à la paroi. Les résultats numériques montrent que cette discontinuité n'affecte pas la résolution de l'équation différentielle.

III. RESULTATS

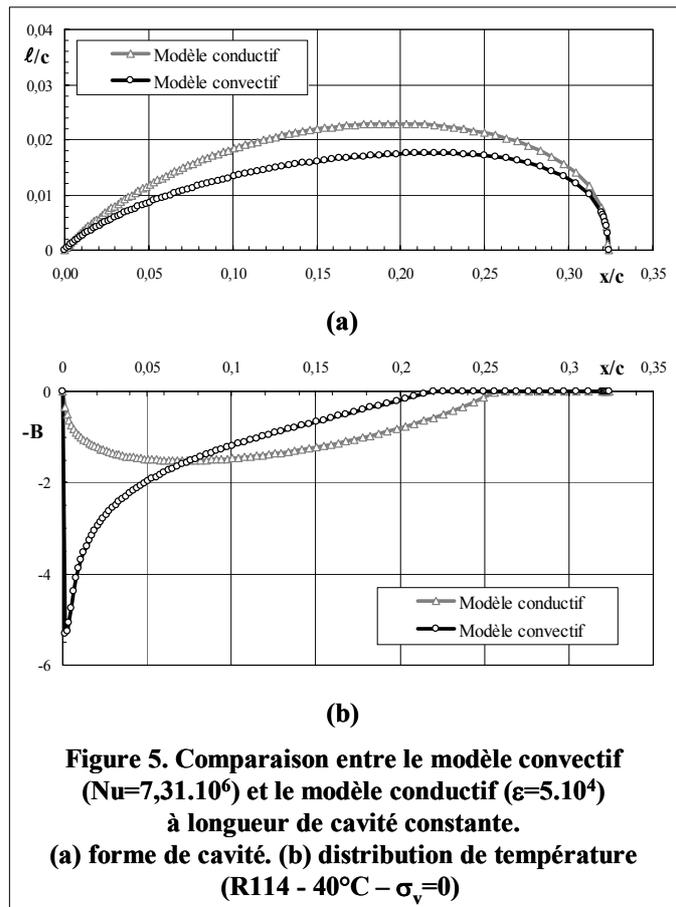
III.1. Analyse comparative

Les formes de cavité ainsi que les distributions de température obtenues par les deux modèles sont présentées figure 5. Les valeurs du nombre de Nusselt N_u pour le modèle convectif et du coefficient ε pour le modèle diffusif ont été ajustées de telle façon que les longueurs de cavité soient identiques.

La figure 5b montre clairement une différence de comportement de la température. Pour le modèle convectif, l'écart de température présente une forte discontinuité au point de départ de la cavité. L'écart croît ensuite de façon régulière jusqu'à zéro. L'équation (12) montre que, dans le cas du modèle convectif, l'écart de température est proportionnel à la vitesse de l'interface. Puisque cette vitesse est maximum au point de détachement de la cavité où la pression est minimum, l'écart de température est également maximum en ce point.

Pour le modèle conductif par contre, l'écart de température est nul au point de départ de la cavité. Un minimum est observé au tiers de la longueur de cavité environ. Ce comportement très régulier est une conséquence de la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur au sein du liquide.

Du fait de la discontinuité de l'écart de température au départ de la cavité, la vitesse initiale de croissance de la bulle est plus petite pour l'approche convective. Par contre, dans le



cas conductif, cette vitesse initiale est la même qu'en l'absence d'effets thermiques (ce résultat peut se voir sur la figure 9), ce qui est cohérent avec le fait que l'écart de température est initialement nul. En conséquence, les cavités prédites par le modèle convectif sont plus minces.

L'épaisseur maximum de cavité est plus proche du point de fermeture de la cavité pour le modèle convectif (figure 5a). Sa position correspond exactement au point où le facteur B s'annule, toujours à cause de la proportionnalité entre B et la vitesse de l'interface. Pour le modèle conductif, la relation (15) montre que le facteur B dépend de toute l'histoire de la température du liquide environnant. De fait, le point où l'épaisseur de cavité est maximum est décalé par rapport à celui où le facteur B devient nul.

Il est difficile de se prononcer en faveur d'un modèle plutôt que de l'autre. La discontinuité présentée par le modèle convectif ne semble pas réaliste d'un point de vue physique. Bien que les résultats expérimentaux de Hord [6] et de Fruman [9] aient tendance à montrer que le sous-refroidissement est maximal juste à l'aval du point de détachement, il semblerait que l'extremum observé expérimentalement ne soit pas aussi marqué que celui prévu par ce modèle, les profils de température mesurés étant généralement relativement plats. Le modèle conductif semblerait donc conduire à un comportement plus proche de celui révélé par l'expérience. Notons que les différences entre les deux modèles s'amenuisent quand les effets thermiques augmentent, comme présenté ci-dessous.

III.2. Influence des deux paramètres N_u et ε

Lorsque ces paramètres tendent vers l'infini, les effets thermiques tendent à s'annuler. Une analogie paramétrique peut être extraite de la comparaison des deux modèles. Le flux de chaleur à l'interface est donné par $q = h \Delta T$ dans le cas du modèle convectif et par l'approximation $q \approx \lambda_t \Delta T / \delta$ dans le cas du modèle conductif, puisque $\Delta T / \delta$ est l'ordre de grandeur du gradient de température. En identifiant ces deux relations et en introduisant l'épaisseur de la couche limite thermique $\delta \approx \sqrt{\varepsilon \alpha_\ell \tau}$, on obtient la relation adimensionnelle:

$$N_u \approx \sqrt{\varepsilon P_e} \quad (17)$$

L'équation (17) suggère que l'influence du nombre de Nusselt dans le modèle convectif est équivalente à celle de $\sqrt{\varepsilon P_e}$ dans le modèle conductif, ce que confirme le calcul.

La figure 6 montre que, lorsque le nombre de Nusselt ou le paramètre ε diminuent, les effets thermiques augmentent et la longueur de cavité diminue comme le confirme l'expérience. Pour des effets thermiques très importants, c'est-à-dire pour des valeurs de N_u ou de ε en dessous d'un certain seuil, la longueur de cavité tend à se stabiliser à une valeur minimum non nulle. L'épaisseur de cavité ainsi que son volume tendent par contre vers zéro. La vitesse et l'accélération de l'interface deviennent nulles et les termes inertiels du premier membre de l'équation de Rayleigh (9) s'annulent et par conséquent le second membre de (9) doit aussi s'annuler. Cela implique que, quelque soit le modèle thermique utilisé, la pression de vapeur

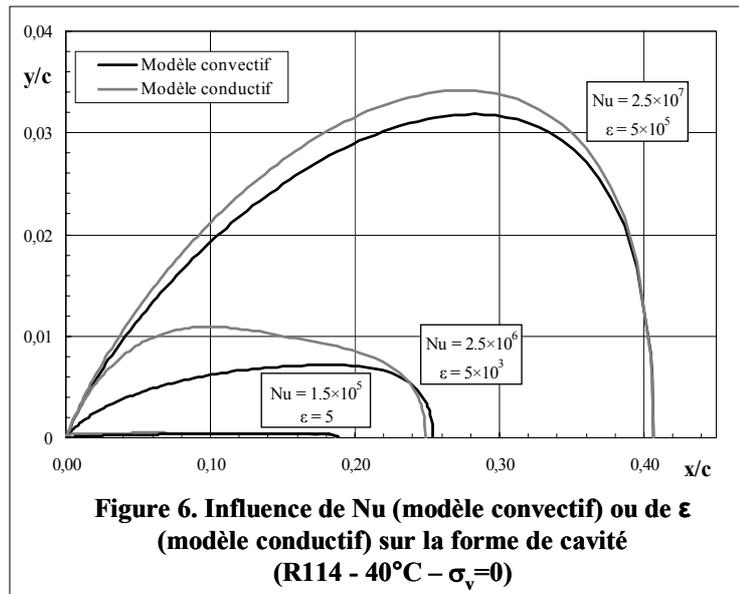


Figure 6. Influence de N_u (modèle convectif) ou de ε (modèle conductif) sur la forme de cavité (R114 - 40°C - $\sigma_v=0$)

évaluée à la température réelle de cavité en chaque point doit tendre vers la distribution de pression sur la pale.

Ce comportement est confirmé sur la figure 7 qui montre clairement que l'opposé du nombre de cavitation $-\sigma_c$ tend à se confondre avec le coefficient de pression C_p quand les effets thermiques augmentent. Dans le cas limite où la cavitation disparaît totalement à cause des effets thermiques, la température de cavité est déterminée seulement par la distribution de pression sur la pale et par la courbe de pression de vapeur du fluide.

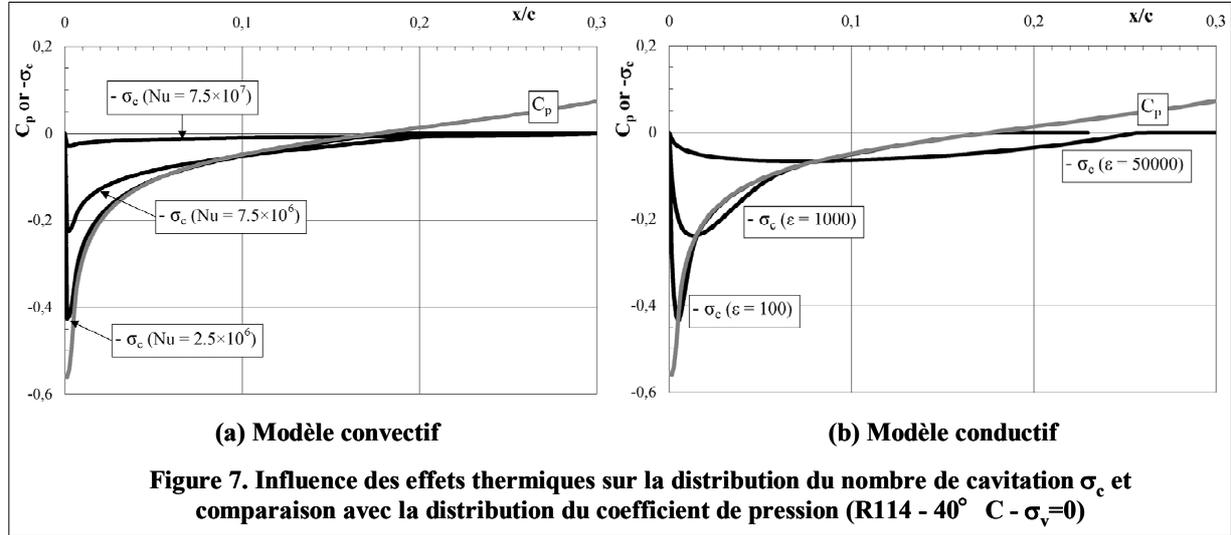


Figure 7. Influence des effets thermiques sur la distribution du nombre de cavitation σ_c et comparaison avec la distribution du coefficient de pression (R114 - 40° C - $\sigma_v=0$)

L'existence d'une longueur de cavité minimum quand les effets thermiques deviennent prépondérants peut recevoir une explication qualitative sur la base du modèle convectif. La forme limite de la cavité est donnée par la résolution de l'équation de Rayleigh (13) dans laquelle les termes inertiels sont négligés. Cette équation simplifiée s'écrit :

$$\dot{R} \cong - \frac{\tau_T}{\tau} \frac{C_p + \sigma_v}{2\sqrt{1-C_p}} \quad (18)$$

Puisque $\int_0^\ell \dot{R} dx = 0$, la longueur de cavité minimum ℓ est déterminée par l'équation suivante :

$$\int_0^\ell \frac{C_p + \sigma_v}{\sqrt{1-C_p}} dx = 0 \quad (19)$$

La relation (19) montre que cette longueur minimum ne dépend que de la distribution de pression et du nombre de cavitation. En réalité la situation est plus complexe puisqu'on force le facteur B à s'annuler dans la région de condensation, ce qui n'a pas été pris en compte dans l'approche ci-dessus. Par ailleurs, cette approche n'est pas directement transposable au modèle conductif du fait de la complexité de l'équation integro-différentielle de base.

III.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux

La figure 8 présente l'évolution de la longueur de cavité en fonction du nombre de cavitation pour l'eau et le Réfrigérant 114. Dans ce diagramme la longueur de cavité est adimensionnée par la distance interaubes H. Le nombre de cavitation est le nombre de cavitation de l'inducteur défini par :

$$\frac{\sigma_{\text{inducteur}}}{\sigma} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{r}{R} \right]^2$$

r étant le rayon local entre le moyeu et le carter où la grille est considérée et R le rayon périphérique de l'inducteur utilisé comme longueur de référence.

Dans le cas de l'eau, c'est-à-dire sans effet thermique, la courbe calculée $\ell(\sigma)$ est en accord satisfaisant avec l'expérience même si des écarts sont observables en particulier à faible σ du fait probablement des hypothèses simplificatrices mentionnées précédemment et de l'approximation de la forme réelle de pale par une plaque plane.

Le calcul a été conduit avec une valeur de 5000 pour ε dans le cas du modèle conductif et une valeur du nombre de Nusselt de $2,085 \cdot 10^6$ dans le cas convectif. Ces valeurs ont été ajustées de façon à ce que les deux modèles donnent la même longueur de cavité dans le cas particulier $\sigma_{\text{inducteur}} = 0$ pour le R114 à 20°C et de façon à ce que cette longueur commune soit par ailleurs proche de celle obtenue par l'expérience. Ces valeurs particulières du nombre de Nusselt N_u et du paramètre ε ont ensuite été gardées constantes dans tous les calculs y compris pour le R114 à 40°C.

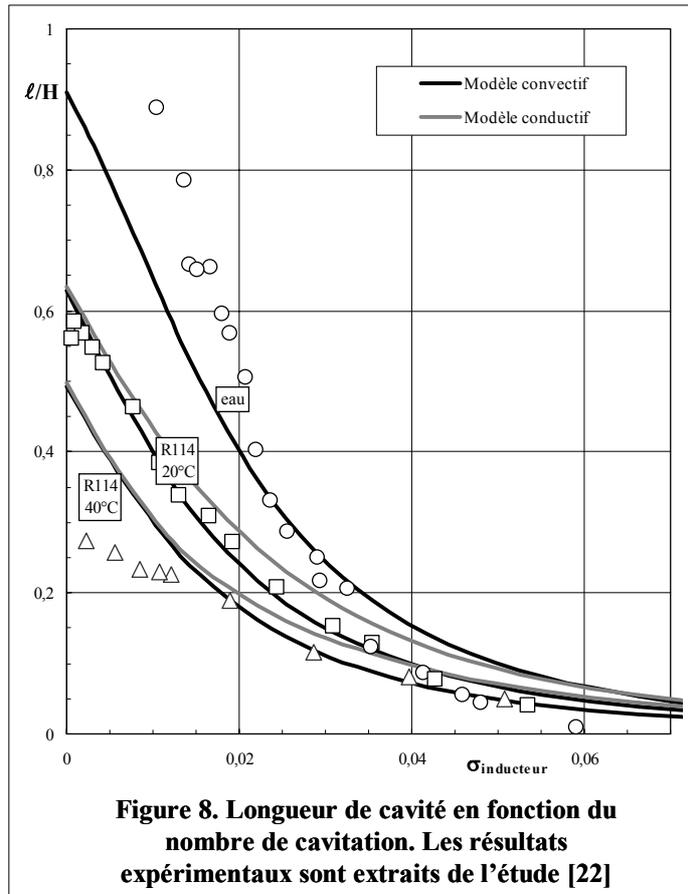


Figure 8. Longueur de cavité en fonction du nombre de cavitation. Les résultats expérimentaux sont extraits de l'étude [22]

formes de cavité avec et sans effet thermique ne sont pas en similitude géométrique. Si les effets thermiques ne sont pas négligeables, d'après l'équation (16), une similitude exacte nécessite la conservation du paramètre $\Sigma \sqrt{c} / W_u^3$ caractérisant les effets thermiques, en plus du facteur de similitude habituel σ . Les résultats ne peuvent être transposés que si ce paramètre additionnel se conserve. La même conclusion s'applique à la distribution de température de cavité qui ne peut pas être transposée simplement de l'eau au R114, ni entre deux températures différentes en R114, du fait de la distorsion du paramètre de similitude supplémentaire.

La comparaison entre l'expérience et le calcul montre que les deux modèles conduisent, lorsque la température augmente, à une réduction de la longueur de cavité du même ordre de grandeur que celle observée expérimentalement. Les deux modèles peuvent donc être considérés comme acceptables pour la modélisation des effets thermiques quoique des calculs complémentaires utilisant en particulier la géométrie réelle soient nécessaires pour une validation plus poussée.

La figure 9 présente une comparaison des formes de cavité obtenues avec le modèle conductif, en eau (sans effet thermique) et en R114 à 20°C et 40°C. Pour chaque simulation, la valeur du nombre de cavitation a été ajustée pour conduire à la même longueur de cavité. Comme déjà observé, la cavité devient de plus en plus mince quand les effets thermiques augmentent.

Notons par ailleurs que les

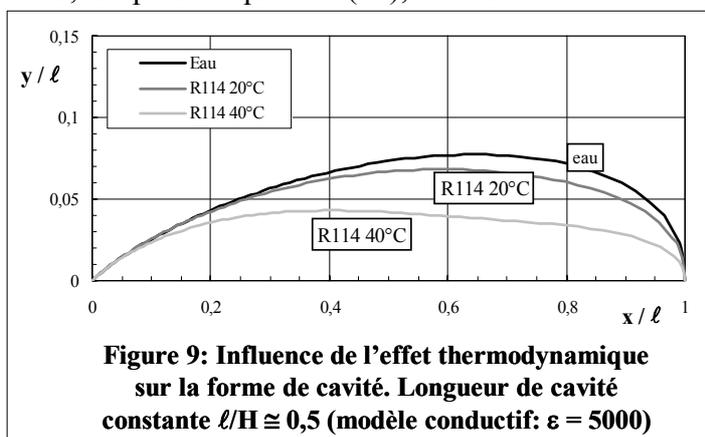


Figure 9: Influence de l'effet thermodynamique sur la forme de cavité. Longueur de cavité constante $\ell/H \cong 0,5$ (modèle conductif: $\varepsilon = 5000$)

IV. CONCLUSIONS

Cette communication présente une méthode d'analyse et de prédiction des effets thermiques en cavitation. Pour une première validation, elle a été appliquée au cas d'un inducteur cavitant pour lequel des résultats expérimentaux avec effets thermiques sont disponibles. La distribution de pression sur les pales est approximée par un calcul potentiel en géométrie bidimensionnelle de grille d'aubes et le développement de la cavitation est évalué sur la base de la résolution de l'équation de Rayleigh. L'interface de la cavité est assimilée à l'enveloppe d'une bulle hémisphérique qui se déplace sur l'extrados des pales. Les effets thermiques dans l'équation de Rayleigh sont pris en compte en considérant la pression de vapeur à la température réelle de la cavité qui est différente de la température du liquide loin de la bulle à cause précisément des effets thermiques.

Deux approches différentes ont été évaluées pour modéliser le transfert de chaleur à l'interface et calculer la température de cavité. Dans l'approche convective, le flux de chaleur est supposé proportionnel à l'écart de température entre la cavité et le fluide environnant. L'amplitude des effets thermiques est contrôlée par le nombre adimensionnel de Nusselt N_u qui donne la valeur du coefficient de transfert thermique convectif à l'interface. Dans l'approche conductive, l'équation de diffusion de la chaleur est résolue dans le liquide autour de la bulle. Dans ce cas les effets thermiques sont contrôlés par la diffusivité thermique turbulente.

Le modèle convectif donne une discontinuité de température au point de détachement de la cavité avec une température minimum en ce point. Dans le cas du modèle conductif, la température évolue régulièrement le long de la cavité et présente un minimum en aval du point de détachement. Ces comportements différents de la température induisent des formes de cavités différentes, le modèle convectif conduisant à des cavités plus minces.

Les effets thermiques augmentent lorsque diminue le nombre de Nusselt N_u pour le modèle convectif ou le rapport ε de la diffusivité thermique turbulente à la diffusivité moléculaire pour le modèle conductif. La longueur de cavité décroît avec l'augmentation des effets thermiques conformément à l'expérience et atteint à la limite une valeur minimum non nulle pour les deux modèles. Son épaisseur tend par contre vers zéro, ce qui implique que le volume de cavité tend aussi vers zéro. Les deux modèles donnent à la limite des solutions identiques lorsque les effets thermiques sont largement prépondérants. Cette solution limite correspond à une disparition de la cavitation par effets thermiques, la pression de vapeur dans la cavité s'identifiant alors en tout point à la pression locale sur la pale.

L'évolution des courbes $\ell(\sigma)$ a été comparée aux résultats expérimentaux obtenus sur un inducteur dans le cas de l'eau froide (sans effet thermique) et pour le fluide réfrigérant R114 à 20°C et à 40°C qui présente des effets thermiques importants. Les deux modèles donnent une réduction de longueur de cavité comparable à celle obtenue par l'expérience pour des paramètres N_u et ε gardés constants. La modélisation des effets thermiques présentée ici peut donc être considérée comme globalement satisfaisante même si des développements complémentaires sont nécessaires pour rendre la méthode complètement prédictive ce qui n'est pas le cas actuellement puisque le nombre de Nusselt comme la diffusivité thermique turbulente restent des données du calcul.

Remerciements: Cette étude a été menée grâce au soutien du CNES et de SNECMA.

Références

- [1] Stahl H.A., Stepanoff A.J. & Phillipsburg N.J. "Thermodynamic aspects of cavitation in centrifugal pumps" ASME J. of Basic Eng., 1956, 1691-1693.
- [2] Stepanoff A.J. "Cavitation properties of liquids" J. of Eng. for Power, April 1964, 195-200.
- [3] Brennen C.E. "Cavitation and Bubble Dynamics" Oxford Univ. Press 1995.
- [4] Brennen C.E. "Hydrodynamics of pumps" 1994 Concepts ETI Inc. & Oxford University Press.
- [5] Kato H. "Thermodynamic effect on incipient and developed sheet cavitation" Int. Symp. on Cavitation inception, FED-Vol.16, New-Orleans (USA), Dec. 9-14, 1984, 127-136
- [6] Hord J. "Cavitation in liquid cryogenes" NASA reports CR-2054, CR-2156 (1972), CR-2242 (1973), CR-2448 (1974).
- [7] Watanabe S., Hidaka T., Horiguchi H., Furukawa A. & Tsujimoto Y. "Steady analysis of thermodynamic effect of partial cavitation using singularity method" Proc. of FEDSM2005, 2005 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting and Exhibition, June 19-23, 2005, Houston, TX, USA
- [8] Fruman D.H., Benmansour I. & Sery R. "Estimation of the thermal effects on cavitation of cryogenic liquids" Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME FED 109, 1991, 93-96.
- [9] Fruman D.H., Reboud J.L. & Stutz B. "Estimation of thermal effects in cavitation of thermosensible liquids" Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.42, 1999, 3195-3204.
- [10] Billet M.L. "Thermodynamic effects on developed cavitation in water and Freon 113" Master of Science Thesis, The Pennsylvania State University, March 1970.
- [11] Billet M.L., Holl J.W. & Weir D.S. "Correlations of Thermodynamic Effects for Developed Cavitation" J. of Fluids Eng., Vol.103, Dec.1981, 534-542
- [12] Holl J.W., Billet M.L. & Weir D.S. "Thermodynamic effects on developed cavitation" J. of Fluids Eng., Dec.1975, 507-514.
- [13] Rapposelli E. & d'Agostino L. "A barotropic cavitation model with thermodynamic effects" 5th Int. Symp. on Cavitation, Osaka, Japan, November 1-4, 2003
- [14] Rolland J., Boitel G., Barre S., Goncalves E. & Fortes Patella R. "Experiments and modelling of cavitating flows in Venturi – Part I: stable cavitation" 6th Int. Symp. on Cavitation, Wageningen, The Netherlands, Sept. 2006
- [15] Tani N. & Nagashima T. "Numerical analysis of cryogenic cavitating flow on hydrofoil – Comparison between water and cryogenic fluids" 4th Int. Conf. on Launcher Technology, Dec. 3-6, 2002, Liege (Belgium)
- [16] Ahuja V. & Hosangadi A. "A numerical study of cavitation in cryogenic fluids. Part I: Mean flow parametric studies" 6th Int. Symp. on Cavitation, Wageningen, The Netherlands, Sept.2006.
- [17] Hosangadi A. & Ahuja V. " A numerical study of cavitation in cryogenic fluids. Part II: New unsteady model for dense cloud cavitation" 6th Int. Symp. on Cavitation, Wageningen, The Netherlands, Sept.2006.
- [18] Hosangadi A. & Ahuja V. "Numerical study of cavitation in cryogenic fluids" Journal of Fluids Engineering, March 2005, Vol.127, pp.267-281.
- [19] Kubota A., Kato H. & Yamaguchi H. 1992 "A New Modeling of Cavitating Flows: A Numerical Study of Unsteady Cavitation on a Hydrofoil Section" J. Fluid Mech., 240, pp. 59–96.
- [20] Singhal A.K., Athavale M.M., Li H. & Jiang Y. "Mathematical basis and validation of the full cavitation model" Journal of Fluids Engineering, September 2002, Vol.124, pp.617-624.
- [21] Franc J.P. & Michel J.M. 2004 "Fundamentals of cavitation" Kluwer Academic Publishers
- [22] Franc J.P., Rebattet C. & Coulon A. "An experimental investigation of thermal effects in a cavitating inducer" J. of Fluids Eng., September 2004, Vol.126, pp.716-723.
- [23] Plesset M.S. & Zwick S.A. January 1952 "A nonsteady heat diffusion problem with spherical symmetry" Journal of Applied Physics, Vol.23, N°1, pp.95-98.
- [24] Plesset M.S. & Zwick S.A. April 1954 "The growth of vapour bubbles in superheated liquids" Journal of Applied Physics, Vol.25, N°4, pp.493-500.
- [25] Zwick S.A. & Plesset M.S. 1955 "On the dynamics of small vapour bubbles in liquids" Journal of Mathematical Physics, Vol.33, pp.308-330
- [26] Fortin A. 2002 "Analyse numérique" Presses Internationales Polytechniques