

Surface libre non linéaire au droit d'un mur vertical.

Effet d'une bathymétrie locale

Nonlinear free surface at a vertical wall.

Effect of a local bathymetry.

Y.-M. Scolan*, **O. Kimmoun***, **H. Branger****, **F. Remy***,

* Ecole Centrale Marseille, 13451 Marseille cedex 20, France, ymscolan@ec-marseille.fr

** IRPHE, 13383 Marseille cedex 13, France,

Résumé

Des algorithmes robustes sont mis en œuvre afin de rendre compte des mouvements non-linéaires de surface libre. Sur la base d'une technique de désingularisation couplée à des transformations conformes du domaine fluide, on peut réduire les équations différentielles, au seul suivi de marqueurs placés à la surface libre. Les résultats obtenus montrent que l'on reproduit de manière satisfaisante une cinématique de déferlement plongeant. De nombreuses directions d'étude sont désormais ouvertes. C'est le cas de certains phénomènes locaux comme la formation d'un jet vertical le long d'un mur à l'approche d'un front de vague non déferlant. Le modèle développé permet également d'accéder à des cinématiques réalistes juste avant l'impact sur une paroi rigide ou élastique. Une analyse des effets hydroélastiques est désormais possible.

Summary

Robust algorithms are implemented in order to simulate nonlinear free surface motion. On the basis of a desingularization technique coupled to conformal mappings of the fluid domain, we can reduce the time differential system to the tracking of markers placed at the free surface only. Obtained results show that the kinematics of plunging waves is satisfactorily reproduced. Numerous directions of research are now open. Some local effects like the so-called "flip-through" phenomenon can be studied. The elaborated model gives also rise to realistic wave kinematics before impact on a rigid or elastic wall. This makes it possible to study hydroelastic effects in more details.

1 Introduction

Depuis les premiers travaux de Faltinsen (1977) ou Vinje et Brevig (1981) sur la simulation numérique de mouvements de surface libre non-linéaires, des efforts continus ont permis d'améliorer sans cesse les algorithmes de résolution de ces équations.

Dans la foulée des travaux de Tuck (1998), on résout ici ces équations dans le cadre de la théorie potentielle pour des configurations bidimensionnelles. La robustesse des algorithmes vient de l'emploi d'une méthode intégrale dite désingularisée (Cf Krasny, 1985, ou Cao *et al.*, 1991). Cela permet notamment de s'affranchir des coûts de calcul importants, lesquels étaient souvent redhibitoires pour mener une analyse paramétrique. D'autres problèmes d'instabilités numériques requéraient aussi un savoir-faire d'utilisateur relativement important.

Sur la base des algorithmes présentés ici, on peut enfin balayer une large gamme de vagues déferlantes (plongeante, glissante, ...) en réglant un petit nombre de paramètres. Le but est clair, on ne s'intéresse qu'aux instants ultimes du déferlement ou de la focalisation d'un front de vague au droit d'un mur; on ne simule donc pas la génération d'une vague au moyen d'un batteur comme c'est le cas classiquement dans un bassin de houle numérique. Une simple déformée initiale de surface libre décrite par 2 paramètres conduit au résultat recherché.

En soi, tout ceci ne constitue pas une avancée décisive. Les améliorations proposées concernent plutôt les techniques mises en œuvre pour rendre compte de l'influence d'une bathymétrie locale au droit d'un mur. On a en tête les variations bathymétriques au voisinage d'une jetée, les chamfreins dans les cuves de LNG, ou encore les plages de véritables bassins de génie océanique.

Dans ce but on utilise des transformations conformes, encore elles... En "développant" les parois fixes d'un bassin pour obtenir un demi plan, on exhibe le potentiel d'une source qui vérifie les conditions d'imperméabilité. On en déduit une fonction de Green adaptée à la géométrie du bassin. Seule la surface libre porte (dans son voisinage proche) ces singularités d'intensité à calculer. On peut en outre s'affranchir d'une formulation intégrale puisque le principe de désingularisation consiste à placer les sources au delà des frontières du domaine fluide.

Les développements qui suivent tracent les grandes lignes des algorithmes élaborés. Suivent quelques applications. En conclusion on liste les perspectives offertes par la mise en œuvre du programme de simulation notamment pour l'étude de certaines interactions hydro-élastiques.

2 Quelques développements théoriques

Résoudre les équations non linéaires de surface libre en théorie potentielle, consiste à poser et résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - g(y - h) \\ \frac{dX}{dt} = U \\ \frac{dY}{dt} = V \end{array} \right. \quad (1)$$

Ces équations sont formulées pour le potentiel des vitesses ϕ et les coordonnées cartésiennes (X, Y) des marqueurs lagrangiens définissant la position instantanée de la surface libre. Les composantes de vitesse (U, V) se déduisent des dérivées spatiales du potentiel $(U, V) = \vec{\nabla}\phi$. Les variables sont calculées dans un repère centré sur le coin inférieur gauche du bassin.

Le potentiel est déterminé en tout point (x, y) du domaine fluide selon la décomposition

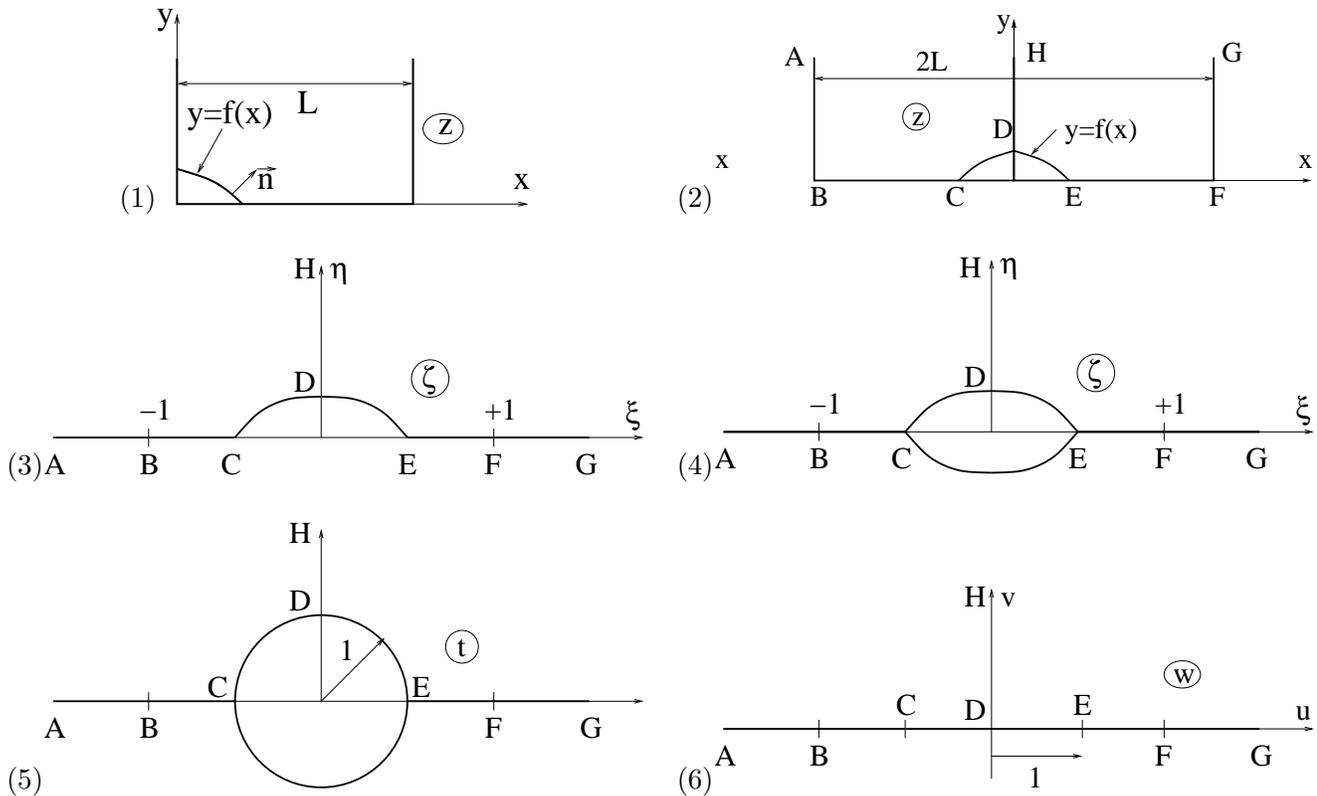
$$\phi(x, y) = \sum_{j=1}^N q_j G(x, y, X_j, Y_j) \quad (2)$$

où (q_j, X_j, Y_j) représentent l'intensité et la position de sources, N est leur nombre. La fonction de Green G dépend de la géométrie et par conséquent du type de transformations conformes utilisées. Les sources étant placées en dehors du domaine fluide, il n'y a pas lieu de formuler une équation intégrale.

Si l'on veut traiter un simple bassin rectangulaire de longueur L , Tuck (1998) a décrit la marche à suivre. La transformation géométrique relie le plan physique z au plan transformé ζ dans lequel les parois du bassin sont désormais définies par l'axe horizontal $\Im(\zeta) = 0$

$$\zeta = \sin \frac{\pi z}{2L} \quad \text{ou} \quad \zeta = -\cos \frac{\pi z}{L} \quad (3)$$

sachant que la première suppose que l'axe $\Re(z) = 0$ est un axe de symétrie. Pour des domaines non rectangulaires, la procédure se complique car il faut également "aplatir" la bathymétrie locale. On illustre sur le schéma suivant les transformations conformes utilisées.



On ajoute si nécessaire des domaines symétriques: ici au passage des plans (1) à (2) puis au passage des plans (3) à (4). Le domaine physique est d'abord transformé en un quart de plan en utilisant la deuxième transformation de Schwartz-Christoffel (3). Les axes $z = \pm L + iy$ sont ainsi aplatis sur l'axe réel. La forme de la bathymétrie est elle même affectée par cette transformation. Cependant les angles étant conservés, on connaît la valeur des angles aux points C , D et E (si ce sont effectivement des points anguleux). Dans ce cas on transforme le contour fermé décrivant la bathymétrie en ajoutant les parties du contour par symétrie. La transformation de Karmann-Trefftz est utilisée. Pour une forme anguleuse à deux symétries pour laquelle les angles sont situés sur l'axe réel, le domaine original z_0 est transformé en un domaine borné par un quasi cercle z_1 selon la formule

$$z_1 = \beta Z_t \frac{(z_0 + Z_t)^\beta + (z_0 - Z_t)^\beta}{(z_0 + Z_t)^\beta - (z_0 - Z_t)^\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{2 - \alpha/\pi} \quad (4)$$

où α est l'angle intérieur et Z_t est l'affixe du coin E . Le domaine obtenu est ensuite transformé en utilisant la transformation de Theodorsen-Garrick

$$\zeta = t \cdot \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{-n} \right] \quad (5)$$

qui relie la plan original ζ au plan dans lequel le contour est désormais un cercle unité. Finalement la transformation suivante

$$w = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad (6)$$

transforme l'extérieur du cercle unité en l'extérieur d'une plaque plane de longueur 2. Dorénavant le domaine fluide physique se situe dans le premier quadrant du plan w défini par les points H , D et G .

Afin de construire une solution potentielle qui vérifie les conditions d'imperméabilité sur les frontières physiques solides, on place des sources et leurs images par rapport aux axes du repère. On considère une source isolée, placée à l'affixe ω dans le plan w , on ajoute ses images aux points $-\omega$, $\bar{\omega}$ et $-\bar{\omega}$ où trait supérieur désigne le complexe conjugué. Le potentiel complexe de l'écoulement induit par ses 4 sources d'intensité unitaire s'écrit

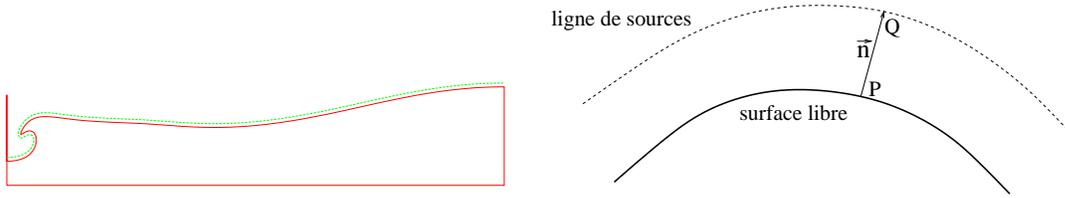
$$F(w, \omega) = \log(w - \omega) + \log(w + \omega) + \log(w - \bar{\omega}) + \log(w + \bar{\omega}) \quad (7)$$

et la vitesse complexe correspondante

$$\frac{dF}{dw}(w, \omega) = 4w \left[\frac{w^2 - \Re(\omega^2)}{w^4 - 2w^2\Re(\omega^2) + |\omega^4|} \right] \quad (8)$$

On constate que $\frac{dF}{dw}$ est réel sur l'axe réel et est purement imaginaire sur le segment DH . On en conclut que la vitesse normale sur toutes les frontières solides s'y annule.

Le principe des méthodes de désingularisation date des travaux de Krasny (1985). Leur application au suivi de surface libre non-linéaire est détaillée dans Tuck (1997) et Cao *et al.* (1991). La cinématique de l'écoulement se déduit d'une distribution de sources placées à une faible distance de la limite physique de la surface libre comme illustré sur la figure suivante



En pratique on distribue autant de sources qu'il y a de marqueurs à la surface libre, soit N leur nombre. Une fois fixés les marqueurs de la surface libre, on place les sources correspondantes suivant la normale locale extérieure à la surface libre à une distance $PQ = \frac{L}{2N}$. On constate numériquement que cette distance satisfait des critères de stabilité suffisants.

Pour un grand nombre de cas d'applications, les simulations numériques réalisées montrent que la reproduction du retournement d'une vague ne nécessite aucun lissage. En fait comme on s'y attend les marqueurs se concentrent "naturellement" à la crête assurant ainsi une bonne définition de faible rayon de courbure.

Il est à noter que les algorithmes développés requièrent des ressources informatiques très limitées. La structure du code élaboré est une boucle en temps. Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 est implémenté nécessitant quatre inversions du système linéaire (2) à chaque itération en temps. Le nombre de marqueurs dépend de la taille caractéristique des phénomènes étudiés. A titre d'exemple, pour simuler le retournement de vague illustré par la figure ci-dessus, 100 marqueurs et un pas de temps $\Delta t \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 0.05$ suffisent.

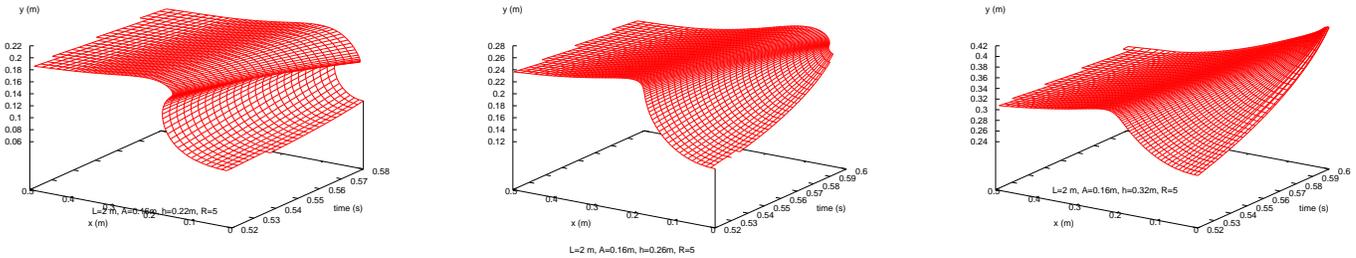
3 Exemples d'application

3.1 Cinématique dans la crête

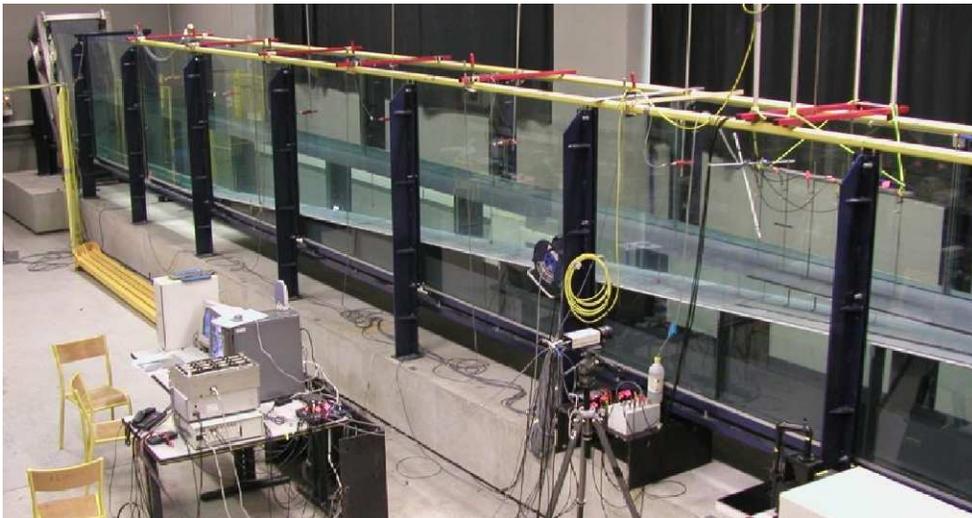
Les premiers tests ont porté sur l'écroulement d'une masse fluide initialement au repos. A l'instant initial on impose une déformée de surface libre du type

$$y = h + A \tanh(R(x - L/2)), \quad \text{ou} \quad y = h + A e^{-R(x-L/2)^2} \quad (9)$$

où h désigne la hauteur moyenne de surface libre au repos, A est une mesure de l'amplitude de la dénivellation initiale et R permet de régler la pente de cette dénivellation. La forme en tangente hyperbolique était déjà préconisée par Peregrine (2003) pour l'étude du phénomène dit de "flip-through" au droit d'un mur vertical. Définitivement cette forme initiale permet de couvrir un large éventail de phénomènes. Par exemple pour des paramètres (A, R, L) donnés sans variation bathymétrique, en faisant simplement varier h , on accède aussi bien au retournement de la crête avec la formation d'une poche d'air ou encore à la focalisation d'un front de vague sans retournement, comme illustré ci-dessous



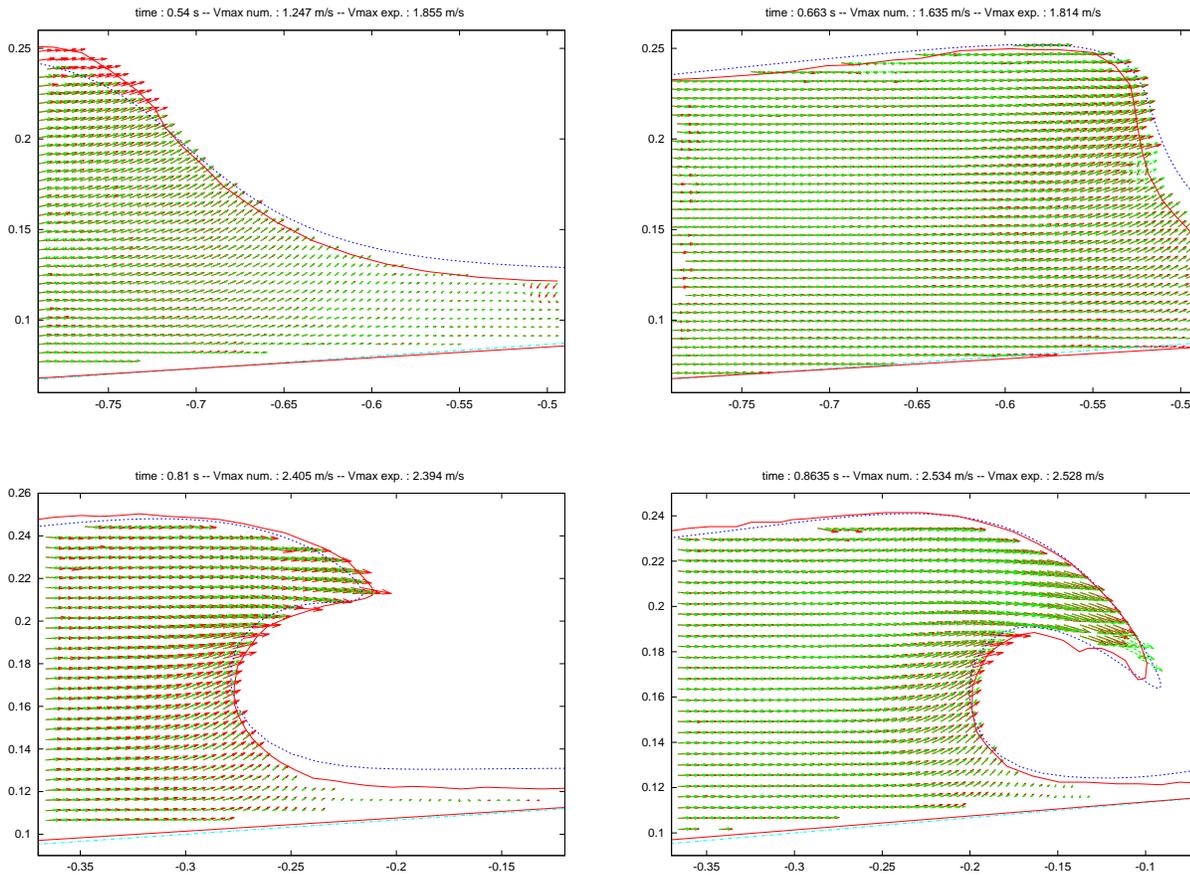
Il est clair que la simulation numérique s'arrête dès lors que les marqueurs définissent une courbe qui s'intersecte. Il faut donc rappeler que les objectifs fixés sont d'accéder, au moyen d'un outil le plus simple possible, à une cinématique réaliste reproduisant une vague qui déferle au droit d'un mur vertical. La validation d'un tel modèle semble a priori fort compromise dans la mesure où il n'est pas possible de reproduire expérimentalement les conditions initiales du modèle théorique. En fait il est apparu que le choix d'une déformée initiale de type gaussienne (équation 9) permet de reproduire une cinématique finale très proches de celle obtenue expérimentalement. Pour cela on dispose des résultats acquis dans le cadre d'un projet IDAO (Interaction Dynamique de l'Atmosphère et de l'Océan). Les expériences ont été menées dans le canal de l'ECM.



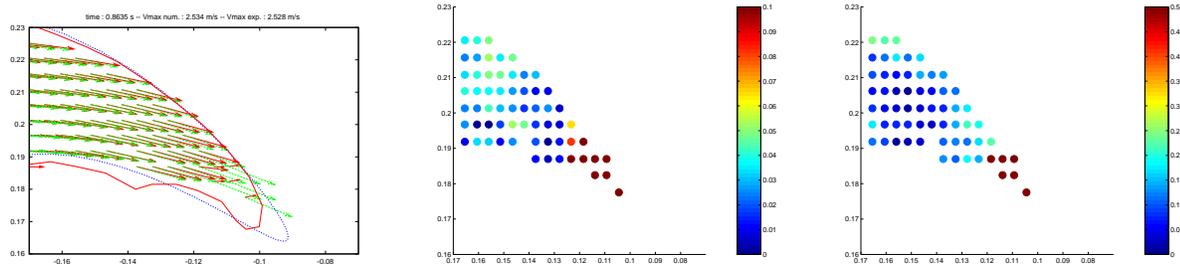
Un soliton est généré par le batteur. Du fait de la présence d'un fond incliné (de pente 1/15), la vague déferle en un point précis du bassin. Des mesures PIV fournissent le champs de vitesse sur plusieurs séquences correspondant à différentes positions le long de la pente et à différents instants. On règle alors les paramètres de déformée initiale de surface libre pour reproduire la dernière séquence acquise expérimentalement. On a ainsi retenu les valeurs suivantes $L = 2\text{ m}$, $A = 0.31\text{ m}$, $h = 0.122\text{ m}$ et $R = 4.3$ afin de s'identifier à la séquence correspondant au temps $t = 0.8635\text{ s}$ dans un cadre donné. Cet instant fixe donc une origine temporelle et la position fournit une origine en espace. Disposant de trois autres séquences: l'une dans le même cadre mais à un instant différent et deux autres dans un

autre cadre et à deux autres instants, on peut donc procéder à des comparaisons plus significatives. Il faut souligner que l'identification ne porte que sur le profil de surface libre et en aucun cas sur le champ de vitesse, ce qui serait de toute façon impossible en pratique.

Les figures suivantes montrent le résultat de ces comparaisons.



La première remarque porte sur l'étape ultime, celle qui conditionne l'identification. Ayant choisi les paramètres ad-hoc, on s'assure que l'accord reste dans la limite des erreurs de mesures expérimentales. Il est toutefois remarquable de constater que la vitesse maximum mesurée (qui n'est pas prise en compte pour l'identification) est quasiment identique à celle que l'on calcule. Cela pourrait suggérer que le profil de surface libre et la vitesse maximum dans la crête sont intimement liés. C'est peut être là un point à éclaircir. Si l'on zoome sur la crête uniquement les figures suivantes montrent les erreurs relatives commises d'une part sur la direction des vecteurs vitesse (à droite) et d'autre part sur l'amplitude de la vitesse (à gauche)

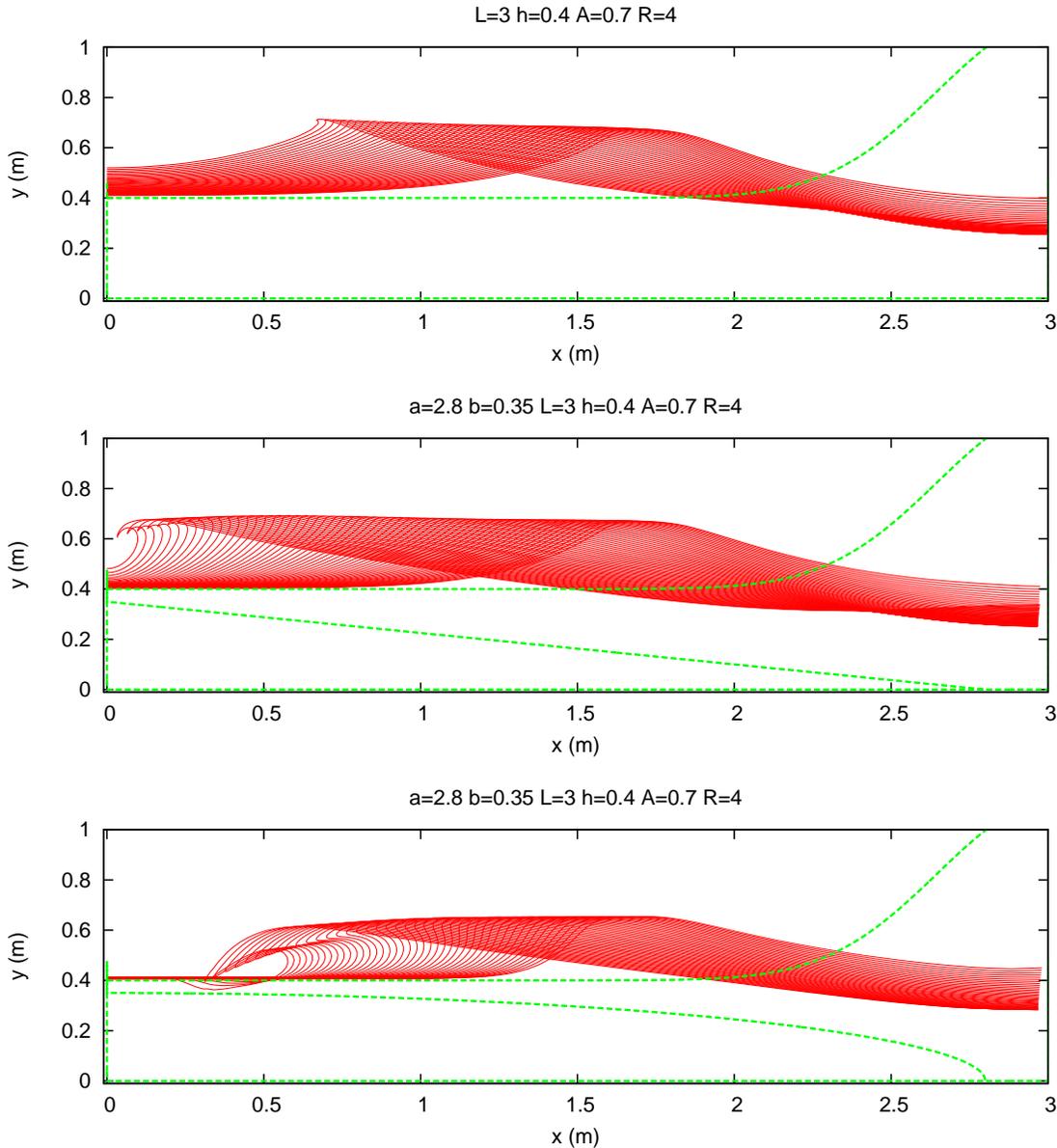


Excepté au bout de la crête, l'accord semble excellent. A noter qu'il s'agit ici des erreurs relatives locales et non pas d'une erreur relative au maximum de la vitesse mesurée.

L'accord se détériore progressivement quand on examine les trois autres séquences disponibles: à $t = 0.81s$ dans le même cadre $x \in [-0.37m : -0.07m]$, ainsi que pour $t = 0.663s$ et $t = 0.54s$ dans un autre cadre plus en amont du déferlement $x \in [-0.79m : -0.49m]$.

3.2 Variations bathymétriques

Différents types de bathymétries sont étudiés. Tout d'abord on examine qualitativement l'influence relative d'une bathymétrie rectiligne ou elliptique. Pour cela on part d'une déformée initiale semi-gaussienne définie par $A = 0.7m$ et $R = 4$. (tracée sur les figures ci-dessous). Le rapport d'aspect de la bathymétrie est $a/b = 2.8/0.35$. La longueur du bassin est $L = 3m$ et la hauteur d'eau est $h = 0.4m$. Le nombre de marqueurs est 120 et le pas de temps est fixé à $0.002s$.

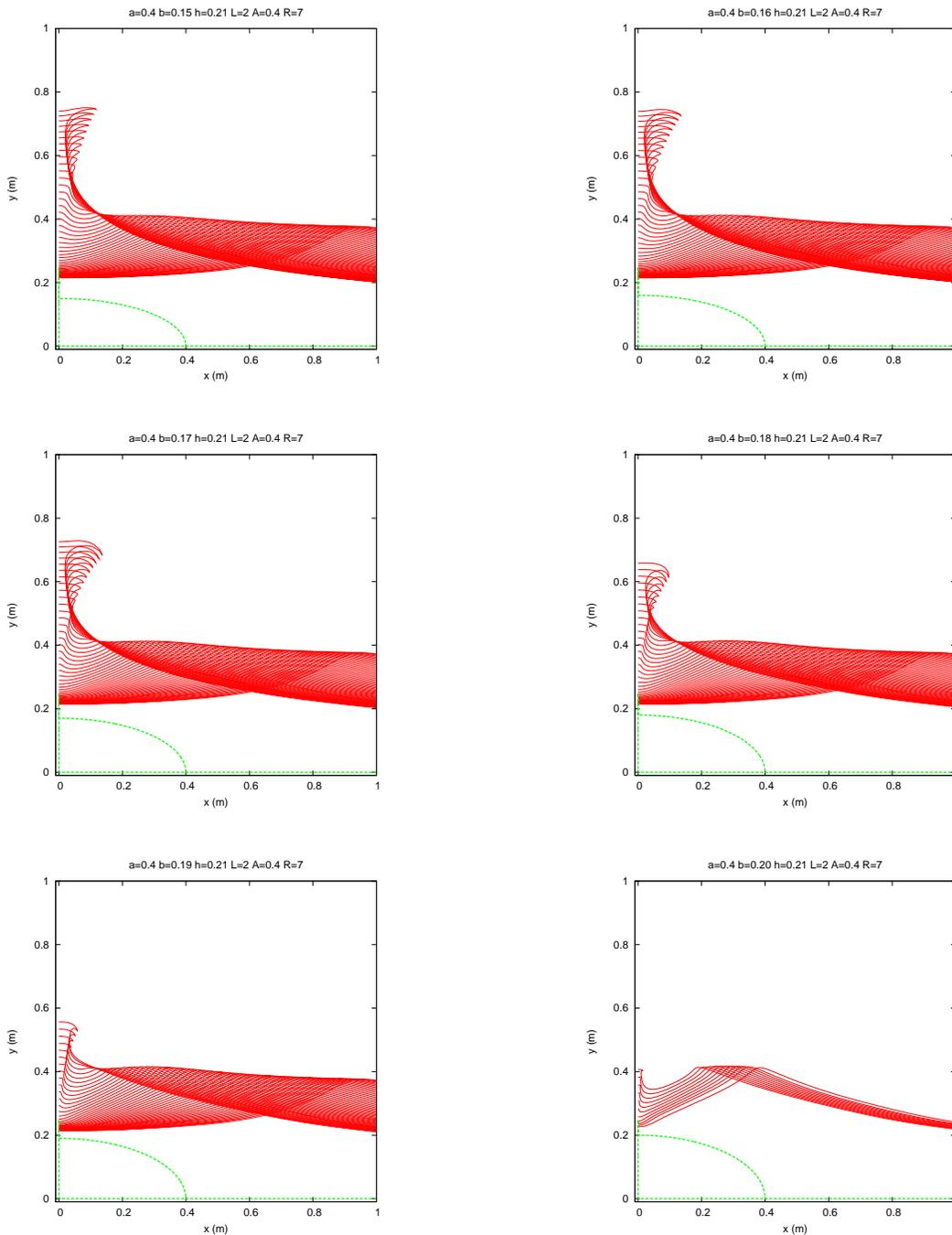


Sans variation bathymétrique (figure du haut), on détecte un déferlement glissant (*spilling breaker*). Dès qu'une variation bathymétrique est imposée, le déferlement est de type plongeant avec une forte influence en fonction de la géométrie.

3.3 Jet vertical à l'approche d'un front de vague

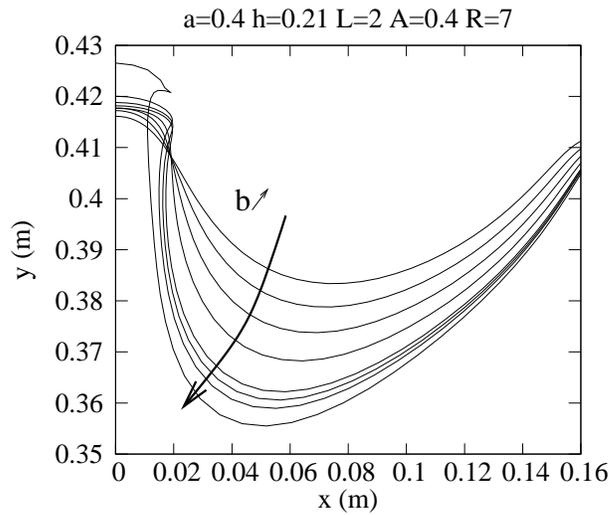
Si on s'intéresse à la focalisation d'un front de vague au droit du mur, une bathymétrie elliptique permet de reproduire des phénomènes qui s'apparentent au "flip through". Pour cela on utilise une déformée initiale de surface libre définie par les paramètres $A = 0.4m$ et $R = 7$. L'ellipse est définie par son grand axe et son petit axe ($a = 0.4m, b \in [0.15m : 0.2m]$). La hauteur d'eau est $h = 0.21m$ et la longueur du bassin est $L = 2m$. Les figures qui suivent montrent les profils successifs de la surface

libre à l'approche d'un front de vague non déferlant lorsque le petit axe b de l'ellipse augmente. A noter que, d'un graphe à un autre, ces profils ne sont pas calculés nécessairement aux mêmes instants. Par ailleurs les simulations s'arrêtent après "explosion numérique".

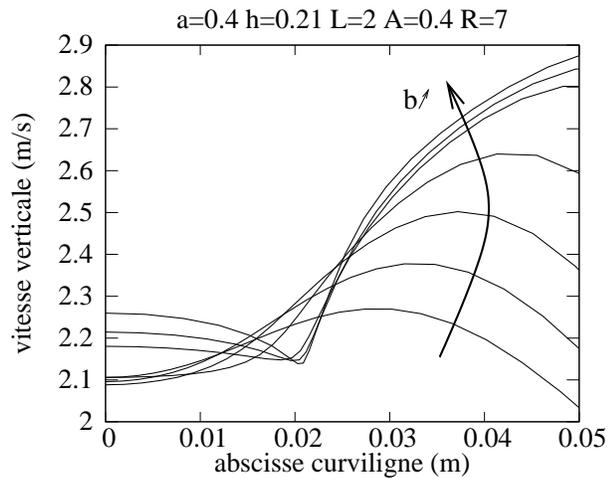
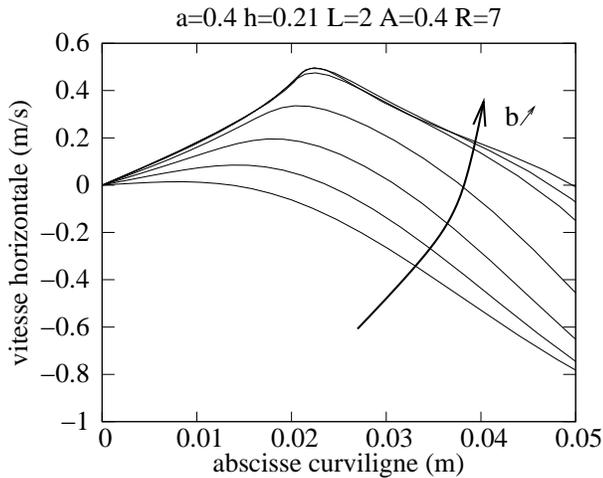


Ce phénomène de "flip through" a été identifié comme la formation d'un jet vertical ascendant le long du mur (voir Cooker & Peregrine, 1990, Lugni *et al.*, 2005, entres autres). Le jet résulte d'une inversion de concavité du profil local de surface libre lorsque le front de vague arrive près du mur. Cooker (2006) a tenté d'extraire ce comportement sur la base d'une analyse asymptotique des équations localement près d'un mur vertical. Néanmoins ces auteurs ont souligné le fait que le flip-through devait être indépendant de la géométrie du fond, ce qui n'est pas le cas ici.

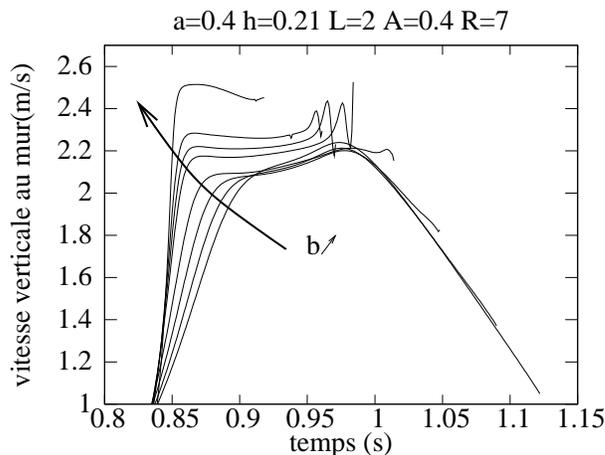
La robustesse des algorithmes permet ici de capturer les structures très fines de l'écoulement y compris lorsqu'une masse d'eau importante s'est élevée dans le jet. La figure suivante illustre les structures fines du jet le long du mur à un même instant $t = 0.917s$.



Au delà de cet instant la simulation pour la bathymétrie la plus épaisse (petit axe : $0.2m$) explose. Le sens de la flèche indique une variation croissante du petit axe dans l'intervalle $b \in [0.15m : 0.2m]$. L'épaisseur du jet est de l'ordre du dixième de la hauteur moyenne. Les composantes de la vitesse à cet instant sont tracées sur les figures suivantes en fonction de l'abscisse curviligne mesurée à partir du mur gauche.



Les maxima de vitesse verticale sont atteints près du retournement de la crête en bout du jet. Plus précisément on trace sur la figure suivante la variation dans le temps de la vitesse verticale le long du mur à son intersection avec la surface libre.



Ces variations mettent en évidence une forte accélération du jet jusqu'à un palier en vitesse, plus ou moins long. Ces premiers résultats appellent une analyse plus fine notamment en terme de distribution de pression le long du mur.

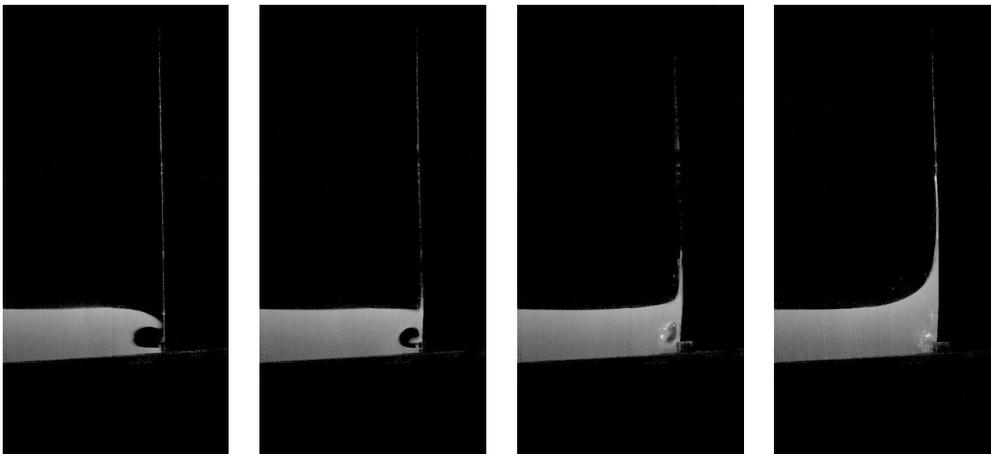
4 Conclusion

Des algorithmes de résolution des équations de surface libre non-linéaires, en théorie potentielle, ont été mis au point afin d'accéder, au moyen de ressources informatiques réduites au minimum, à des cinématiques de vagues déferlantes au droit d'un mur vertical. La robustesse des algorithmes est liée à l'emploi d'une technique de désingularisation. Des résultats numériques sont obtenus sans lissage car les singularités ne sont pas placées sur les frontières du domaine fluide. La rapidité des algorithmes tient aussi à l'utilisation de transformations conformes. Cela permet de concentrer toute l'information concernant notamment la géométrie du bassin, dans l'expression du potentiel des singularités de type sources. On réduit ainsi le nombre d'inconnues aux coordonnées de marqueurs placés à la surface libre et au potentiel des sources correspondantes.

Le modèle élaboré offre la possibilité de mener des analyses paramétriques. Les premières applications consistent à partir d'une déformée initiale de surface libre. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux de déferlement de soliton, montrent, par identification, que le modèle prédit des cinématiques dans la crête tout à fait réalistes. En outre l'emploi d'un tel modèle, mettant en œuvre un nombre très limité de paramètres, offre de larges perspectives d'analyse mathématique de vagues déferlantes.

D'autres voies sont également ouvertes. Par exemple en utilisant le dipôle tournant (voir Clément 1999), la génération artificielle de houle (régulière ou pas) est possible. Les premiers tests effectués sont encourageants.

Dans une autre direction on souhaite mettre en œuvre les algorithmes élaborés afin de capter une cinématique réaliste juste avant l'impact du vague sur une paroi élastique. Les images suivantes, issues d'une campagne réalisée dans le canal à houle de l'ECM, illustrent le phénomène physique.



5 Références

- Cao Y., W.W. Schultz & R.F. Beck, 1991, A three-dimensional desingularized boundary integral method for potential problems, Intl. J. Numer. Meth. Fluids 11 785-803.
- Clément, A., 1999, Spinning dipole: an efficient unsymmetrical numerical wavemaker. Proc. 14th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies.
- Cooker M.J., 2006, Personnel communication.
- Cooker M.J. & Peregrine D.H. , 1990 A model for breaking wave impact pressures Proc. 22nd Internat. Conf. Coastal Engng. Delft. A.S.C.E. 2, pp.1473-1486.

- Faltinsen, O. M. 1977, Numerical Solutions of Transient Nonlinear Free-Surface Motion Outside or Inside Moving Bodies, In Proceedings of 2nd International Conference of Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley, pp.347-357. University Extension Publisher, USA.
- Krasny R., 1986, Desingularization of periodic vortex sheet roll-up, Journal of Computational Physics Vol. 65, Issue 2, 292-313
- Lugni C., Brocchini M., Dolcini A., Palladino F. , Bulgarelli U.P. & Faltinsen O.M. 2005, An experimental investigation on the flip-through phenomenon. Proc. 20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies.
- Peregrine D. H., 2003, Water-wave impact on walls, Annual Review of Fluid Mechanics Vol. 35: 23-43
- Tuck E.O., 1998, Solution of Nonlinear Free-Surface Problems by Boundary and Desingularised Integral Equation Techniques, Invited Lecture, Computational Techniques and Applications: CTAC'97 Eds J. Noye, M. Teubner, A. Gill, World Scientific, Singapore, 11-26.
- Vinje, T., Brevig, P., 1981, Numerical simulation of breaking waves, Adv. Water Resources, vol. 4, pp. 77-82.