

Un modèle de Wagner généralisé : application à des sections de formes arbitraires.

A generalized Wagner model : application to arbitrary sections.

N. Malleron* Y.-M. Scolan*
B. Cochelin*[‡] A. de Gélas**

* Ecole Centrale Marseille, 13451 Marseille cedex 20, France, scolan@ec-marseille.fr.

[‡] LMA, 31 chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille cedex 20, France.

** Eurocopter, Aéroport Marseille-Provence, 13700 Marignane, France.

Résumé

Une méthode de Wagner généralisée pour l'étude de l'impact de sections de formes arbitraires est présentée. Cette méthode permet de s'affranchir de l'hypothèse de faible angle mort sur laquelle reposent classiquement les méthodes de Wagner linéarisées. Son domaine d'application s'étend à des formes asymétriques. Cela est rendu possible par la transformation systématique du problème en celui d'un écoulement autour d'une plaque plane horizontale, tout en tenant compte de la géométrie exacte de la surface mouillée. La théorie des problèmes de Riemann-Hilbert est alors utilisée pour résoudre le problème transformé. Ce modèle est testé ici dans des cas symétriques. Les résultats qu'il fournit sont comparés à d'autres résultats numériques et expérimentaux.

Abstract

A generalized Wagner method for studying water impact of arbitrary sections is presented. This method does not require the deadrise angle to be small, unlike the classical linearized Wagner model. It can be applied to asymmetric sections by using conformal mapping. The problem is systematically transformed into an horizontal flat plate problem but take into account the exact geometry of the wetting surface. The flow around the flat plate is then calculated by using the theory of Riemann-Hilbert problems. The model is tested against both numerical and experimental results for symmetric cases.

1 Introduction

Depuis les premiers travaux de Wagner [14], les modèles permettant de traiter le problème de l'impact d'un corps solide sur la surface d'un fluide ont connu des développements constants. L'approche la plus couramment utilisée pour résoudre ce problème est celle proposée par Wagner [14]. Elle consiste à faire l'hypothèse que l'angle mort (i.e. l'angle entre la section et la surface libre au repos) est faible, ce qui conduit à linéariser la surface mouillée. Dès lors que l'on s'affranchit de l'hypothèse de faible angle mort, on doit prendre en compte la position géométrique exacte de la surface mouillée. L'approche de Zhao et Faltinsen [15],[17],[16] ou Battistin et Iafrati [1] qui repose sur l'utilisation d'une méthode d'éléments finis de frontière, s'inscrit dans ce cadre. Cette approche permet de prendre en compte toutes les non-linéarités, y compris celles de surface libre mais représente un coût informatique important. Pour une utilisation standard dans l'industrie, des modèles moins coûteux doivent être développés. Une approche intermédiaire est celle proposée par Mei *et al* [10], qui proposent un modèle de Wagner généralisé. Le problème est formulé sous forme d'un problème aux limites en théorie potentielle, en négligeant les effets de gravité ainsi que les effets de tension superficielle. Dans ce modèle, la condition d'imperméabilité est imposée sur la surface mouillée exacte. L'originalité de ce modèle provient du fait que la condition dynamique de surface libre, réduite à une condition de Dirichlet homogène pour le potentiel des vitesses, est imposée sur une ligne horizontale, émanant du point de contact. La résolution est alors basée sur l'intégration en temps de la condition cinématique de surface libre écrite aux points de contact. Le jet qui se développe lors de l'impact n'est pas pris en compte dans ce modèle. Sur la base de ces travaux, on considère ici l'impact de sections de formes arbitraires. En section 2, on présente la méthodologie de la solution, étendue au cas de corps asymétriques. On montre en particulier que le modèle exposé respecte une loi de conservation de la masse. En section 3, on expose les résultats obtenus par ce modèle dans des configurations symétriques. Les résultats en terme de distribution de pression et de force sont présentés. On s'intéresse tout d'abord à des corps de formes classiques (coins, cylindre), puis à des formes plus originales (cylindre non-circulaire, carène).

2 Méthodologie de la solution

2.1 Transformation du domaine de calcul

Le domaine fluide est borné par la surface mouillée du corps et deux lignes horizontales, issues des deux points de contacts. Si le corps est asymétrique, ces deux lignes ne sont pas au même niveau (cf. fig. 1-a). Pour éliminer le pas qui résulte de cette dénivellation, on utilise une transformation de Schwarz-Christoffel (SC). Cette transformation fait correspondre au plan physique $Z = x + iy$ le plan $\zeta = p + iq$. Du fait de la condition de Dirichlet homogène sur l'axe des réels (confondu avec l'image par SC de la surface libre linéarisée), le corps est prolongé dans le demi-plan supérieur par le symétrique de sa partie immergée par rapport à l'axe des réels. Le corps qui résulte de ce prolongement recevra dans toute la suite la dénomination de "double corps".

La transformation conforme qui transforme la frontière du double-corps en un cercle unité est notée κ telle que $\zeta = \kappa(T)$. Le contour du corps est alors décrit par $T = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi; \pi]$. A ce stade des transformations, on peut définir une paramétrisation du

contour du corps en terme de séries de Fourier. En particulier, on peut écrire :

$$x(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta), \quad \theta \in [-\pi; \pi]. \quad (1)$$

A noter que pour y , il faut tenir compte du saut lié à la dénivellation (transformée de Fourier d'une fonction discontinue).

Enfin, l'écoulement autour du cercle unité est transformé en un écoulement autour d'une plaque plane horizontale par la transformation de Joukowski qui à T associe $W = u + iv$:

$$W = \frac{1}{2} \left(T + \frac{1}{T} \right). \quad (2)$$

La transformation définie par la fonction κ doit être explicitée. La forme du double corps obtenu dans le plan ζ va influencer sur la manière de procéder pour réaliser cette transformation. Néanmoins, la stratégie à employer sera toujours de la forme suivante :

1. élimination des coins.
2. transformation intermédiaire pour rendre la dernière étape la plus efficace possible.
3. transformation en un cercle unité.

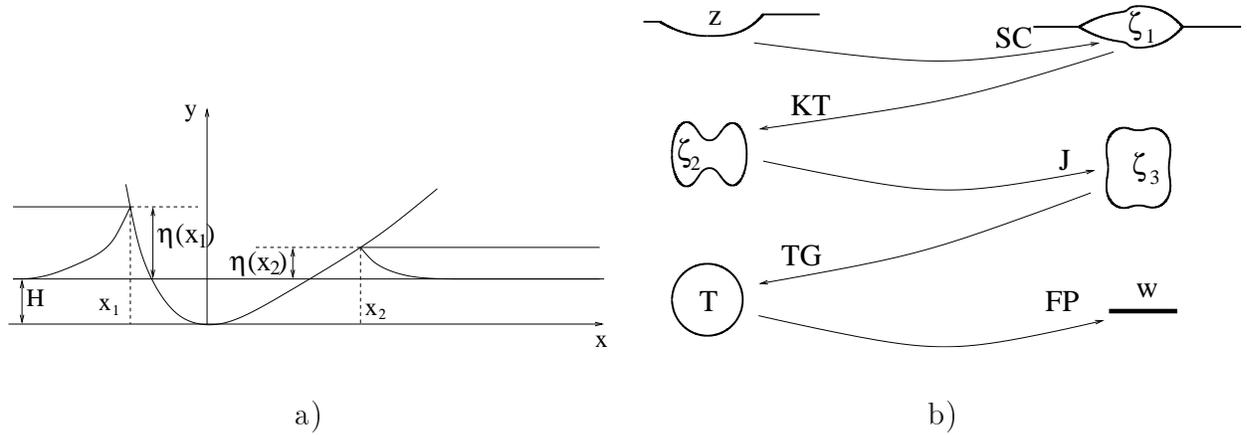


Fig. 1 - a) Problème dans le plan physique b) Transformation du problème.

Du fait du prolongement effectué pour obtenir le double corps, celui-ci présentera toujours au moins deux coins qui seront situés sur l'axe réel du plan ζ . Toutefois, et selon la géométrie du corps considéré, il peut y avoir des coins à supprimer partout ailleurs dans le plan. On note n le nombre de coins.

Pour éliminer ces coins, on utilise la transformation de Karman-Trefftz (voir [7]). La nouvelle coordonnée ζ_i ($i \leq n$) résultant de cette transformation est liée à l'ancienne coordonnée ζ_{i-1} par :

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \frac{\zeta_t - \zeta_c}{2 - \alpha/\pi} \frac{1 + \left(\frac{\zeta_{i-1} - \zeta_t}{\zeta_{i-1} - \zeta_c} \right)^{\frac{1}{2 - \alpha/\pi}}}{1 - \left(\frac{\zeta_{i-1} - \zeta_t}{\zeta_{i-1} - \zeta_c} \right)^{\frac{1}{2 - \alpha/\pi}}}, \quad (3)$$

où α est l'angle intérieur du coin à supprimer. ζ_t et ζ_c sont respectivement les coordonnées complexes du coin considéré et du centroïde du corps.

Si la forme obtenue après les n transformations successives de Karman-Trefftz est très éloignée de celle d'un cercle (cf. fig. 1-b), on est amené à placer une plaque fictive au centroïde du corps et à utiliser une transformation de Joukowski inverse.

La transformation du contour en un cercle unité est réalisée grâce à la transformation de Theodorsen-Garrick [13]. Cette transformation relie ζ_n à T par :

$$\zeta_n = T \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k T^{-k} \right). \quad (4)$$

Les coefficients β_k qui définissent complètement la transformation sont calculés par un algorithme de point fixe. A convergence, un cercle parfait est obtenu.

2.2 Problème aux limites

2.2.1 Formulation du problème

Soit $w = u + iv$ un point courant du plan complexe. On désigne avec un $+$ les grandeurs relatives au demi-plan supérieur \mathcal{D}^+ et avec un $-$ les grandeurs relatives au demi-plan inférieur \mathcal{D}^- . La frontière entre ces deux demi-plans est constituée de \mathcal{L} , image de la surface mouillée par la transformation définie en section 2.1, ainsi que de \mathcal{L}' et \mathcal{L}'' , image de la surface libre linéarisée. Le problème mixte vérifié par le potentiel des vitesses de l'écoulement est représenté en figure 2. Il appartient à la classe des problèmes de Riemann-Hilbert (voir [4]).

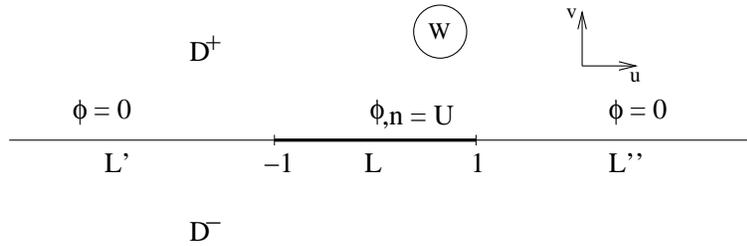


Fig. 2 - Problème transformé en un écoulement autour d'une plaque plane.

2.2.2 Solution du problème aux limites - formulation de Riemann

On cherche à déterminer la fonction $F^-(w)$, analytique dans \mathcal{D}^- telle que :

$$F^-(w) = \phi(w) + i\psi(w). \quad (5)$$

Cette fonction est prolongée analytiquement dans tout le plan complexe par :

$$F(w) = \begin{cases} F^-(w) & \text{pour } w \in \mathcal{D}^-, \\ F^+(w) = -\overline{F^-(\bar{w}, t)} & \text{pour } w \in \mathcal{D}^+, \end{cases} \quad (6)$$

où \bar{w} désigne le complexe conjugué de w .

Le problème aux limites schématisé en figure 2 s'écrit alors sous forme d'un problème de Riemann :

$$F^+(w) = G(w) F^-(w) + g(w), \quad (7)$$

avec :

$$G(w) = \begin{cases} -1 & \text{sur } \mathcal{L}, \\ 1 & \text{sur } \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'' \end{cases}, \quad \text{et } g(w) = \begin{cases} -2i\psi(w) & \text{sur } \mathcal{L}, \\ 0 & \text{sur } \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'' \end{cases}. \quad (8)$$

$G(w)$ est le coefficient du problème de Riemann considéré. Ce coefficient est discontinu à chaque extrémité de \mathcal{L} , i.e. en $w = -1$ et $w = 1$.

En vue d'une résolution, le problème (7) doit être reformulé comme un problème à coefficient continu. Pour cela on forme :

$$\omega^+(w) = (w+1)^{\gamma_1} (w-1)^{\gamma_2} \quad \text{et} \quad \omega^-(w) = \left(\frac{w+1}{w-w_0}\right)^{\gamma_1} \left(\frac{w-1}{w-w_0}\right)^{\gamma_2}, \quad (9)$$

où w_0 est un point quelconque de \mathcal{D}^+ .

En choisissant les coupures du plan adéquates pour $(w-w_0)^{\gamma_1}$ et $(w-w_0)^{\gamma_2}$, impliquant que $\frac{\omega^-(w)}{\omega^+(w)}$ change de signe simultanément avec $G(w)$, on obtient un coefficient $G_1(w) = \frac{\omega^-(w)}{\omega^+(w)} G(w)$ continu tout le long de l'axe réel. Ce coefficient définit un nouveau problème de Riemann pour la nouvelle fonction inconnue F_1 telle que :

$$F^+(w) = \omega^+(w) F_1^+(w) \quad \text{et} \quad F^-(w) = \omega^-(w) F_1^-(w).$$

Ce problème s'écrit sous forme canonique :

$$\frac{F_1^+(w)}{X^+(w)} - \frac{F_1^-(w)}{X^-(w)} = R(w) g(w), \quad (10)$$

où : $X^+(w) = 1$, $X^-(w) = (w-w_0)^{\gamma_1+\gamma_2}$ et $R(w) = (w-1)^{-\gamma_1} (w+1)^{-\gamma_2}$.

On choisit $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$, de sorte que la solution de (10) soit bornée en ± 1 . Cette solution est obtenue de manière classique (voir [4], [5]) :

$$F_1^-(w) = \frac{X^-(w)}{2i\pi} \int_L \frac{g(\ell + i0^-)}{(\ell - w)} d\ell = -\frac{(w-w_0)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\ell + i0^-)}{(\ell^2 - 1)^{1/2} (\ell - w)} d\ell. \quad (11)$$

La solution de (7) s'écrit donc :

$$F^-(w) = \phi(w) + i\psi(w) = \frac{1}{\pi} (1-w^2)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\ell + i0^-)}{(1-\ell^2)^{1/2} (\ell - w)} d\ell. \quad (12)$$

2.3 Calcul de l'écoulement autour du corps

Sous l'hypothèse que le corps est indéformable et chute verticalement avec une vitesse U , on a :

$$\phi_{,n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -U \frac{dx}{ds}. \quad (13)$$

La variable s représente la coordonnée curviligne le long du contour. \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface mouillée et \mathbf{z} est choisit pour que $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{z})$ forment une base orthonormée. La condition de Cauchy-Riemann implique :

$$\phi_{,n} = \psi_{,s} = -U \frac{dx}{ds}. \quad (14)$$

La fonction de courant se déduit de l'intégration de (14) par rapport à s :

$$\psi = -Ux + c, \quad -x_2 < x < x_1, \quad (15)$$

où c est une constante indépendante de x et de y . En introduisant (15) dans (12), on montre que $c = UA_0 = 0$. Connaissant ψ sur la surface mouillée, (12) nous donne accès à ϕ sur le contour du corps, ψ à la surface libre ainsi qu'à la vitesse verticale de l'écoulement à la surface libre $\phi_{,y}$.

Calcul du potentiel des vitesses sur le corps A tout point (x, y) de la surface mouillée est associé un point dans le plan transformé. Ce point $W = u \in \mathbb{R}$, avec $|u| < 1$ est dit homologue de (x, y) . De (12) on déduit que :

$$\phi(u, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-u^2} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-u)} d\tau, \quad |u| < 1. \quad (16)$$

En utilisant le changement de variable $\tau = \cos(\alpha)$ et en notant $u = \cos(\theta)$, on a :

$$\phi(u, 0, t) = \frac{U}{\pi} \sin(\theta) \int_0^\pi \frac{x(\alpha)}{\cos(\alpha) - \cos(\theta)} d\alpha, \quad \theta \in [-\pi; \pi]. \quad (17)$$

En utilisant la décomposition (1), (17) devient :

$$\phi(u, 0, t) = \frac{U}{\pi} \sin(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \int_0^\pi \frac{\cos(n\alpha)}{\cos(\alpha) - \cos(\theta)} d\alpha, \quad (18)$$

ce qui fait apparaître une intégrale de Glauert. On a alors :

$$\phi(u, 0, t) = U \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(n\theta), \quad |u| < 1, \quad \theta \in [-\pi; \pi]. \quad (19)$$

On vérifie que ϕ tend vers 0 aux points homologues des points de contact dans le plan physique i.e. en $\theta = -\pi$ ou $\theta = 0$.

Calcul de la fonction de courant à la surface libre De (12) on déduit cette fois :

$$\psi(u, 0, t) = sg(u) \frac{U}{\pi} \sqrt{u^2-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \frac{\cos(n\alpha)}{\cos(\alpha) - u} d\alpha, \quad |u| > 1. \quad (20)$$

On pose :

$$I_n(u) = \int_0^\pi \frac{\cos(n\alpha)}{\cos(\alpha) - u} d\alpha. \quad (21)$$

[6], nous donne :

$$I_0(u) = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\cos(\alpha) - u} = \frac{-2\pi sg(u)}{\sqrt{u^2-1}}. \quad (22)$$

Et on obtient alors aisément :

$$I_1(u) = \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha)d\alpha}{\cos(\alpha) - u} = \pi + u I_0. \quad (23)$$

Par des considérations trigonométriques, on obtient la relation de récurrence :

$$I_n(u) = 2u I_{n-2}(u) - I_{n-2}(u) \quad (24)$$

2.3.1 Calcul de $\phi_{,y}$ à la surface libre

La vitesse verticale de l'écoulement à la surface libre est donnée par :

$$\phi_{,y} = -\mathcal{I}m \left\{ \frac{dF}{dZ} \right\} = -\mathcal{I}m \left\{ \frac{1}{J(u)} \frac{dF}{du} \right\}, \quad (25)$$

où $J(u)$ est le Jacobien de la transformation conforme, évalué au point u homologue de x point courant de la surface libre linéarisée. $J(u)$ est réel sur $(\mathcal{I}m(w) = 0, |w| > 1)$, ce qui implique :

$$\phi_{,y} = -\frac{1}{J(u)} \frac{d\psi}{du}. \quad (26)$$

Par dérivation de (20) :

$$\phi_{,y}(u, 0, t) = sg(u) \frac{U}{J(u)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L_n(u), \quad |u| > 1. \quad (27)$$

avec :

$$L_n(u) = \frac{d}{du} \left(\sqrt{u^2 - 1} I_n(u) \right) = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} I_n(u) + \sqrt{u^2 - 1} K_n(u). \quad (28)$$

Les $K_n(u)$ sont définis par :

$$K_n(u) = \int_0^\pi \frac{\cos(n\alpha)}{(\cos(\alpha) - u)^2} d\alpha = u K_{n-1}(u) + n I_{n-1}(u), \quad (29)$$

et :

$$K_0(u) = \frac{u I_0(u)}{1 - u^2}. \quad (30)$$

Asymptotiquement on montre que $L_n(u) = O(u^{-(n+1)})$, ce qui permet de vérifier que la surface libre reste au repos à l'infini.

2.4 Calcul des corrections mouillées

L'intégration en temps de la condition cinématique de surface libre, écrite aux points de contact x_1 et x_2 , permet d'écrire :

$$f(x_j) - H(t) = \int_0^t \phi_{,y}(x_j(t), \eta(x_j(\tau), \tau), \tau) d\tau \quad j = 1..2. \quad (31)$$

$\phi_{,y}$ est donné par (27) et dépend uniquement de $(x_j(t), x_1(\tau), x_2(\tau))$. Ces deux équations sont à résoudre simultanément pour calculer les corrections mouillées. En introduisant $H(t)$ dans l'intégrand de (31) et en définissant la nouvelle fonction W par :

$$U(\tau) + \phi_{,y}(x_j(t), y_j(\tau), \tau) = U(\tau)W(x_j(t), x_1(\tau), x_2(\tau)), \quad (32)$$

le changement de variable $\ell = x_j(\tau)$ pour $\tau \leq t$, dans (31) permet d'écrire :

$$f(x_1(t)) = \int_0^{x_1(t)} U(\ell)W(x_1(t), \ell, x_2(\ell))\frac{d\tau}{d\ell}d\ell. \quad (33)$$

En suivant la méthode de Mei [10], $U(\ell)\frac{d\tau}{d\ell}$ est décomposé sur une base de polynômes de Chebyshev :

$$U(\ell)\frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=0}^N a_j^{(1)}T_j(\ell) = \sum_{j=0}^N b_j^{(1)}\ell^j, \quad (34)$$

où $T_j(\ell)$ est le j^{eme} polynôme de Chebyshev de première espèce, auquel on fait subir le changement d'échelle approprié. Connaissant les coefficients $a_j^{(1)}$ ou $b_j^{(1)}$, l'intégration de (34) sur $[0 : x_1(t)]$ fournit la valeur finale de $x_1(t)$. La première équation (33) s'écrit comme :

$$f(x_1(t)) = \sum_{j=0}^N a_j^{(1)} \int_0^{x_1(t)} W(x_1(t), \ell, x_2(\ell))T_j(\ell)d\ell. \quad (35)$$

L'équation (35) est résolue par collocation. La variable $x_1(t)$ est échantillonnée sur l'intervalle $[0 : X_1]$ en prenant les zéros du polynôme de Chebyshev T_{N+1} .

Le nouveau système d'équation pour x_1, x_2 est fortement non-linéaire et sa résolution requiert l'utilisation d'un algorithme de point fixe. Pour initialiser le processus itératif, il est nécessaire de disposer d'une valeur pour $x_2(\ell)$ ou $x_1(\ell)$. Pour cela, on utilise la solution fournie par le modèle de Wagner linéarisé pour des sections asymétriques de Scolan *et al.* [11]. Dans ce cas, les deux conditions de Wagner donnent :

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x) \sqrt{\frac{x_1 - x}{x - x_2}} dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x) \sqrt{\frac{x - x_2}{x_1 - x}} dx. \quad (36)$$

On dispose alors d'un moyen de calcul de x_2 pour une jeu donné de valeurs de x_1 sur l'intervalle $[0 : X_1]$. Il est possible de procéder de la même manière pour $x_2 \in [0 : X_2]$. L'équation (35) et son homologue pour x_2 sont ensuite résolues. On en déduit les coefficients $a_j^{(1)}$ et $a_j^{(2)}$, qui nous permettent de recalculer les fonctions $x_2(\ell)$ or $x_1(\ell)$. Ce même processus est répété jusqu'à convergence, où les corrections mouillées finales sont calculées.

2.5 Calcul de la distribution de pression

La pression est donnée par l'équation de Bernoulli :

$$p = -\rho\phi_{,t} - \frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2, \quad (37)$$

où ρ est la masse volumique du fluide. La transformation conforme dépendant du temps, le calcul de $\phi_{,t}$ doit être effectué avec soin. Pour cela, on introduit $\tilde{\phi}(\theta, t) = \phi(x(\theta, t), y(\theta, t), t)$ qui peut être dérivée en temps en fixant θ . On a alors :

$$\phi_{,t}(x(\theta, t), y(\theta, t), t) = \tilde{\phi}_{,t}(\theta, t) - x_{,t}\phi_{,x}(x(\theta, t), y(\theta, t), t) - y_{,t}\phi_{,y}(x(\theta, t), y(\theta, t), t) \quad (38)$$

Le calcul du terme quadratique de (37) ne pose pas de difficulté. La prise en compte de ce dernier terme est importante. Il permet en effet d'éliminer la singularité que présente le terme linéaire de (37) au point de contact. La pression ainsi calculée s'annule en un point situé avant le point de contact. Ce point définit alors le support d'intégration qui servira à calculer la force hydrodynamique par intégration de la pression le long de la surface mouillée.

2.5.1 Loi de conservation de la masse

Dans cette section, on montre que le présent modèle de Wagner généralisé vérifie une loi de conservation de la masse. Pour cela, on décompose le domaine fluide comme indiqué en figure 3 et on définit :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(t) = \int_{-x_{K1}(t)}^{x_{K2}(t)} (Ut - f(x)) dx, \\ m_2(t) = \int_{-x_1(t)}^{-x_{K1}(t)} (f(x) - Ut) dx + \int_{x_{K2}(t)}^{x_2(t)} (f(x) - Ut) dx, \\ m_3(t) = \int_{-\infty}^{-x_1(t)} (\eta(x, t) - Ut) dx + \int_{x_2(t)}^{\infty} (\eta(x, t) - Ut) dx. \end{array} \right. \quad (39)$$

x_{K1} et x_{K2} sont les corrections mouillées fournies par l'approche de Karman (intersection du corps et de la surface libre non perturbée) et $\eta(x, t)$ représente l'élévation de la surface libre en un point x et au temps t .

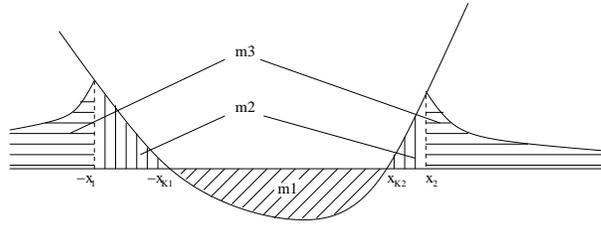


Fig. 3 - Définition de m_1 , m_2 et m_3 - vérification de la loi de conservation de la masse.

La loi de conservation de la masse s'écrit alors simplement :

$$m_1(t) = m_2(t) + m_3(t). \quad (40)$$

On montre analytiquement que (40) est vraie quel que soit t en réécrivant la loi de conservation de la masse sous sa forme dérivée :

$$U (x_1 + x_2) = \int_{-\infty}^{-x_1} (\eta_{,t}(x, t) - U) dx + \int_{x_2}^{\infty} (\eta_{,t}(x, t) - U) dx \quad (41)$$

Le terme de gauche s'écrit en fonction des A_n en remarquant que :

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n, \quad \text{et} \quad x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (42)$$

Dans le terme de droite on substitue $\eta_{,t} - U = \phi_{,y}$ par son expression en fonction des $A_n(t)$ (27). En effectuant le changement de variable $u = u(x)$, on exprime ce terme comme :

$$\frac{U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\int_{-\infty}^{-1} L_n(u) du + \int_1^{\infty} L_n(u) du \right). \quad (43)$$

En utilisant les propriétés importantes :

$$l_{1n} = \int_{-\infty}^{-1} L_n(u) du = (-1)^n \pi, \quad \text{et} \quad l_{2n} = \int_1^{\infty} L_n(u) du = \pi, \quad (44)$$

on montre bien que (41) est vérifiée quel que soit t .

3 Résultats

3.1 Configurations symétriques

Dans cette section, on s'intéresse aux résultats fournis dans le cas de sections symétriques par le modèle développé en section 2. Dans ce cas, la détermination de la correction mouillée ne nécessite pas la mise en oeuvre de l'algorithme défini en section 2.4. En effet, cette détermination revient à calculer une seule valeur du point de contact (qui est la même de part et d'autre du corps), que l'on note $X(t)$. On procède alors de manière analogue à Mei dans [10].

3.1.1 Coin symétrique à vitesse constante

En fig. 4, la distribution de pression sur des coins d'angle mort variant entre 10 et 81 degrés est représentée.

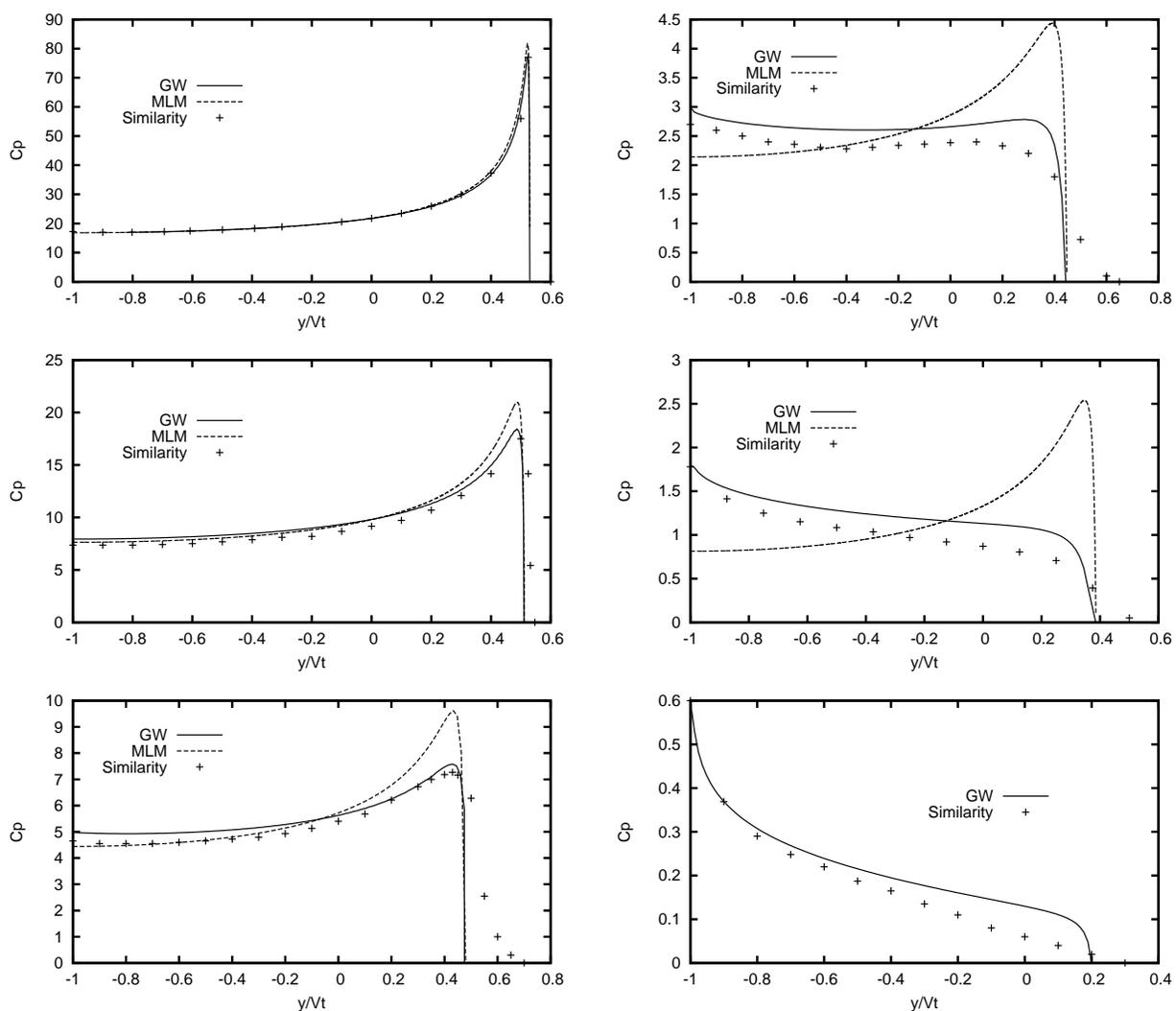


Fig. 4 - Distribution de pression sur un dièdre d'angle mort $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ et 81° .

Les résultats obtenus (GW) en terme de pression sont identiques à ceux de Mei dans [10]. Ils sont comparés aux résultats fournis par la méthode de Logvinovich modifiée (MLM) [8] ainsi qu'à la solution exacte auto-semblable de Dobrovol'skaya [3] (Similarity).

On rappelle que si MLM ne fournit pas de très bon résultats en terme de pression, il permet en revanche une bonne prédiction des efforts hydrodynamiques.

Dans le tableau (fig. 5), le maximum de $C_p = (p - p_0)/(0.5 \rho U^2)$ est reporté pour différentes valeurs de l'angle mort α . Dans le tableau (fig. 6), les valeurs du paramètre $C_f = F/(\rho U^3 t)$, avec F la force hydrodynamique exercée sur le coin, sont reportées pour différents angles morts α . Dans ces deux tableaux et pour chaque angle, la solution auto-semblable est prise comme solution de référence et utilisée pour calculer une erreur relative. Cette erreur est calculée pour le présent modèle (GW), pour la méthode de Wagner linéarisée (LW) [14] et pour la méthode d'éléments de frontière de Zhao (BEM) [15].

α (deg.)	Simil.	GW		LW		BEM	
	Cp	Cp	Err.	Cp	Err.	Cp	Err.
4	503.030	513.6	0.0210	504.61	0.0031	521.4	0.0365
7.5	140.587	138.73	0.0132	142.36	0.0126	148.3	0.0549
10	77.847	77.29	0.0072	79.36	0.0194	80.2	0.0302
15	33.271	33.54	0.0081	34.37	0.0330	32.8	0.0142
20	17.774	18.00	0.0127	18.63	0.0482	18.2	0.0240
25	10.691	11.34	0.0607	11.35	0.0616	10.9	0.0195
30	6.927	7.48	0.0800	7.40	0.0683	6.94	0.0019
40	3.266	3.75	0.1482	3.50	0.0716	3.26	0.0018

Fig. 5 - Maximum du coefficient de pression $C_p = (p - p_0)/(0.5 \rho U^2)$.

α (deg.)	Simil.	GW		LW		BEM	
	Cs	Cs	Err.	Cs	Err.	Cs	Err.
4	1503.638	1440.68	0.0419	1540.506	0.0245	1491.8	0.0079
7.5	399.816	384.22	0.0390	423.735	0.0598	417.9	0.0452
10	213.980	206.55	0.0347	231.973	0.0841	220.8	0.0319
15	85.522	83.26	0.0264	96.879	0.0132	85.5	0.0003
20	42.485	41.87	0.0145	50.639	0.0191	43.0	0.0210
25	23.657	23.45	0.0086	29.765	0.0258	23.7	0.0180
30	14.139	14.29	0.0107	18.747	0.0325	13.9	0.0169
40	5.477	5.82	0.0626	8.322	0.0519	5.31	0.0305

Fig. 6 - Efforts hydrodynamiques - Paramètre $C_f = F/(\rho U^3 t)$.

Dans les deux cas, on constate que le modèle présenté ici est d'une précision intermédiaire entre un modèle linéarisé de type Wagner et d'un modèle BEM.

3.1.2 Cylindre circulaire

L'histoire des corrections mouillées sur un cylindre est représentée en figure 7-a. On vérifie qu'une approche linéarisée conduit à sous-estimer la correction mouillée. En figure 7-b, on représente l'histoire de la force hydrodynamique (via le paramètre $C_f = F/\rho U^2 R$) qui s'exerce sur la section dont la demie largeur est notée R . Cette histoire est comparée à celle fournie par MLM, ainsi qu'aux données expérimentales de Campbell et Weynberg [2]. Les résultats de notre modèle sont en accord avec ceux obtenus par MLM au début de l'impact puis se rapprochent des données expérimentales pour des temps plus importants.

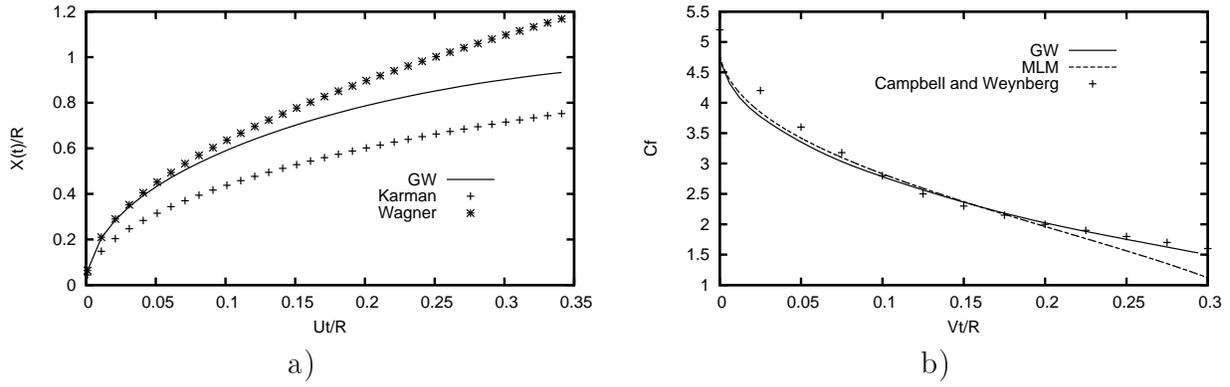


Fig. 7 - a) Histoire des corrections mouillées pour un cylindre circulaire. b) Histoire de la force hydrodynamique s'exerçant sur un cylindre circulaire.

3.1.3 Cylindre non-circulaire

On définit la nouvelle fonction de forme f^* à partir de la fonction de forme f du cylindre circulaire :

$$f^*(x, y) = f(x, y) (1 + 0.2 \cos(2\pi x)). \quad (45)$$

L'histoire des corrections mouillées sur ce cylindre non-circulaire est représentée en figure 8-a. En figure 8-b, on représente l'histoire de la force hydrodynamique (via le paramètre $C_f = F/\rho U^2 R$) qui s'exerce sur la section du cylindre non-circulaire. Cette histoire est comparée à celle prédite par MLM. On note le bon accord des résultats fournis par ces deux modèles. On note également que la force est maximale au point de concavité maximale.

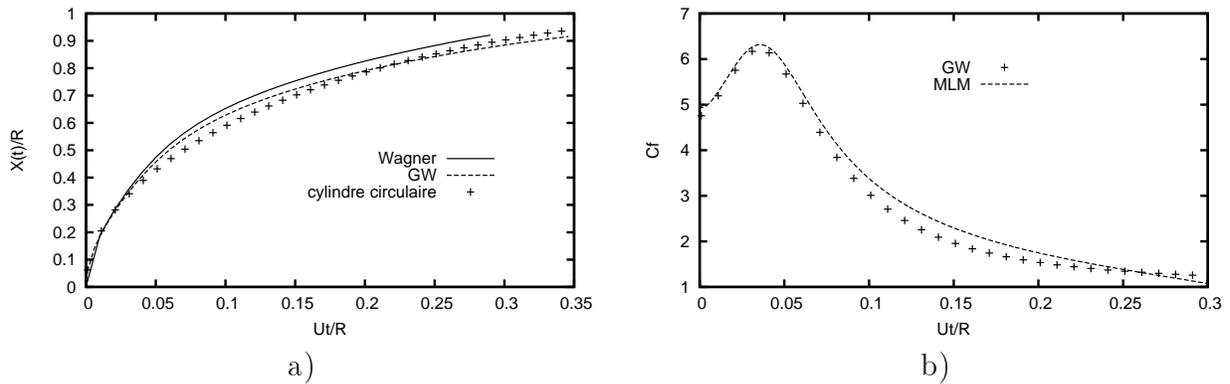


Fig. 8 - a) Histoire des corrections mouillées pour un cylindre non-circulaire. b) Histoire des efforts hydrodynamiques s'exerçant sur un cylindre non-circulaire.

3.1.4 Section de carène

On s'intéresse dans cette section à la carène définie dans [9]. La figure 9-a montre les variations en temps de la correction mouillée. Les résultats du modèle de Logvinovich modifié sont comparés à ceux obtenues dans la présente approche. La figure 9-b montre l'histoire de la force adimensionnée $F/(\rho U^2 R)$ qui s'applique sur le corps au cours de l'impact. On note que les résultats concernant la force sont en bon accord aux premiers instants de l'impact ainsi que pour des temps importants avec les résultats de MLM. Pour

des temps intermédiaires, qui correspondent au minimum des efforts, cet accord est moins évident. Dans ce cas, le présent modèle semble sous-estimer les efforts hydrodynamiques. Ces écarts devront faire l'objet d'une étude plus approfondie.

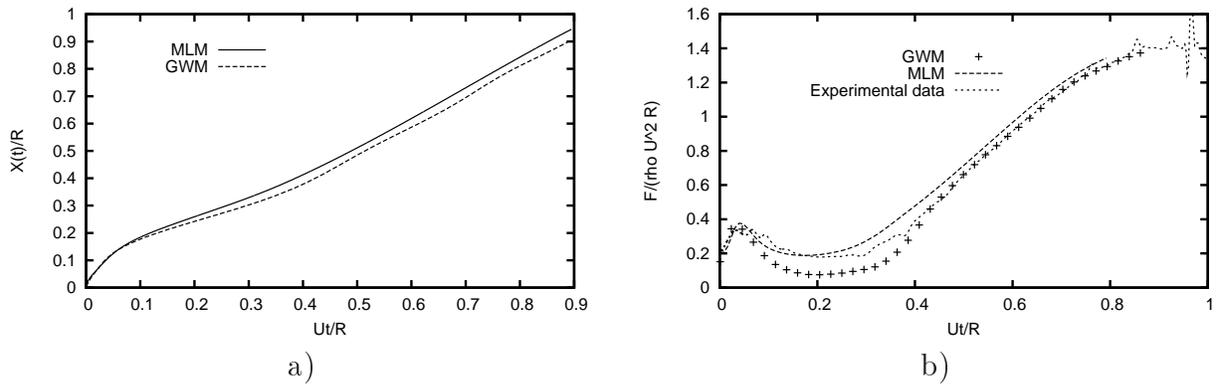


Fig. 9 - a) Histoire des corrections mouillées sur la carène. b) Histoire des efforts hydrodynamiques s'exerçant sur la carène.

4 Conclusions

Sur la base des travaux de Mei *et al.* [10] nous avons décrit ici une méthode de Wagner généralisée dont le domaine d'application s'étend à des formes asymétriques. Cela est rendu possible par la transformation systématique du problème en celui d'un écoulement autour d'une plaque plane horizontale, tout en tenant compte de la position géométrique exacte de la surface mouillée. La théorie des problèmes de Riemann-Hilbert est alors utilisée pour résoudre le problème transformé. Cette manière de procéder est originale par rapport à l'approche de Mei [10]. Elle a été illustrée ici dans des cas symétriques. On a montré l'accord des résultats qui en découlent avec les résultats précédents dans les cas classiques du coin et du cylindre. L'application à des formes moins conventionnelles (cylindre non-circulaire, carène) a également été réalisée.

La présente approche permet d'envisager la résolution de nouveaux problèmes. Le premier d'entre eux est celui de l'impact de corps axisymétriques, qui découle de manière directe du cas 2D. Ce problème peut être traité par une méthode BEM ([16],[1]). En revanche, l'approche consistant à traiter ce problème en linéarisant la surface libre de la même manière que dans cette étude est originale. Dans un cas axisymétrique, les transformations conformes ne peuvent toutefois plus être utilisées. L'écoulement doit donc être calculé en résolvant une équation intégrale. Du fait de l'axisymétrie, cette équation intégrale peut être simplifiée de manière significative. La présente méthode peut alors être utilisée. Le second problème que l'on envisage de traiter concerne la prise en compte de corps 3D de formes arbitraires. Pour ce faire une approche de type Shorygin [12] pourrait être utilisée. Enfin, la présente approche semble être adaptée pour prendre en compte un couplage hydro-élastique fort et de grandes déformations du corps impactant. C'est le cas par exemple lors de l'impact de structures gonflables de type flotteurs.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une thèse CIFRE, financée par Eurocopter-France.

Références

- [1] D. Battistin and A. Iafrati. Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies. *Journal of Fluid and Structures*, pages 643–664, 2003.
- [2] I. Campbell and P. Weynberg. Measurement of parameter affecting slamming. *Technology reports center*, OT-R-8042 :318–334, 1980.
- [3] Z. Dobrovolskaya. On some problems of similarity flow of fluid with free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 36 :805–829, 1969.
- [4] F. Gakhov. *Boundary value problem*. Pergamon, Oxford, 1966.
- [5] K. Gillow. *Codimension-two free boundary problem*. PhD thesis, University of Oxford, 1998.
- [6] I. Gradshteyn and I. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1980.
- [7] N. Halsey. Potential flow analysis of multielement airfoils using conformal mapping. *AIAA Journal*, 17 :1281–1289, 1979.
- [8] A. Korobkin. Analytical models of water impact. *European Journal of Applied Mathematics*, 15 :821–838, 2004.
- [9] A. Korobkin and S. Malenica. Modified Logvinovich model for hydrodynamic loads on asymmetric contours entering water. In *The twentieth international workshop on water waves and floating bodies*, 2005.
- [10] X. Mei, Y. Liu, and D. Yue. On the water impact of general two-dimensional sections. *Applied Ocean Research*, 21 :1–15, 1999.
- [11] Y.-M. Scolan, E. Coche, T. Coudray, and E. Fontaine. Etude analytique et numérique de l’impact hydrodynamique sur des carènes dissymétriques. In *7ème journées de l’hydrodynamique, Marseille*, 1999.
- [12] O. Shorygin. Oblique water entry of axisymmetrical bodies of simple shape. In *Symposium on Non-Steady Flow of Water at High Speeds*, 1973.
- [13] T. Theodorsen and I. Garrick. General potential theory of arbitrary wing sections. *NACA Rept.*, 452 :177–209, 1933.
- [14] H. Wagner. Uber stoss und gleitvorgange an der oberflache von flussigkeiten. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 273–285, 1982.
- [15] R. Zhao and O. Faltinsen. Water entry of two-dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246 :593–612, 1992.
- [16] R. Zhao and O. Faltinsen. Water entry of arbitrary axisymmetric bodies with and without flow separation. In *23th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1998.
- [17] R. Zhao, O. Faltinsen, and J. Aarsnes. Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation. In *21th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1996.