

EFFETS PORTANTS EN ECOULEMENT HYDRODYNAMIQUE INSTATIONNAIRE EN DOMAINE FREQUENTIEL

LIFTING EFFECTS IN UNSTEADY HYDRODYNAMIC FLOW IN THE FREQUENCY DOMAIN

M. H. NGUYEN^{*}, M. BA^{}, S. HUBERSON^{*} ET M. GUILBAUD^{*}**

^{*}Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (UMR CNRS n°6609), Université de Poitiers

^{**} Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (UMR CNRS n°6609), ENSMA

Résumé

Nous présentons ici l'introduction des effets portants dans la version instationnaire du code Poséidon (méthode de singularités en domaine fréquentiel). Nous avons ajouté à la distribution de sources sur la surface du corps, une distribution de doublets sur son squelette, terminé par des bandes semi- infinies simulant le sillage, supposé plan. L'intensité sur chaque bande est déterminée par une condition de Kutta-Joukowski instationnaire imposant l'égalité des pressions instationnaires linéarisées au bord de fuite des parties aiguës à l'arrière des corps. Nous avons comparé avec des résultats numériques ou expérimentaux en aérodynamique et en hydrodynamique pour des corps immergés ou perçant la surface libre.

Summary

In this paper, the lifting effects were added to the hydrodynamic solver Poseidon (panel method in the frequency domain). A doublet distribution was set on the symmetry plane of the body, and on semi infinite strips extending from the acute part of the body trailing edge down to infinity and simulating the wake assumed to be plane. The strength of each strip is determined by a linearized unsteady Kutta-Joukowski condition enforcing the continuity of the unsteady pressure at the trailing edge. The results were validated by comparison with available numerical or experimental results both in aerodynamics and in hydrodynamics for submerged or surface-piercing bodies.

1. INTRODUCTION

La plupart des codes de calculs des écoulements instationnaires hydrodynamiques autour de navires ne prennent pas en compte les effets portants, pourtant importants dans le cas de navires en manœuvre ou encore pour les voiliers. Bertram [1], étudie les mouvements transverses pour des navires à forme arrondie à l'arrière. Dans ce but, la condition de Kutta-Joukowski (sous forme de l'égalité des pressions instationnaires au bord de fuite) est appliquée à des navires avançant dans leur plan de symétrie mais soumis à une houle oblique. L'auteur conclut que cette condition n'améliore pas notablement la représentation physique mais il fait porter la validation sur les mouvements de la coque dans cette houle, pour le porte-conteneur S175, sans donner de précision sur la forme de la partie arrière du navire où est appliquée cette condition. Toutefois, comme mis en évidence par Okhusu & Xen [2], ou Okhusu [3], la comparaison sur les mouvements (et même sur les forces globales) n'est pas la méthode la plus efficace pour valider une méthode numérique car elle prend en compte à la fois, l'hydrodynamique et les mouvements d'un corps dans la houle. Le problème de l'application de la condition de Kutta-Joukowski a été aussi abordé par Zou [4] mais aucun résultat numérique n'est donné. Des calculs par une méthode de singularités utilisant la fonction de Green de diffraction-radiation ont aussi été donnés par Kyosuka [5] pour des corps immergés 2D, ou en surface portante pour des corps perçant la surface libre, Nontakaew [6] et Nontakaew et al. [7].

Par contre, les effets portants, avec satisfaction d'une condition de Kutta-Joukowski, ont été introduits très tôt dans les codes aérodynamiques où ces effets sont essentiels, soit en surface portante Ashley et al. [8], Geissler [9] (appelée dans la suite linéaire), soit en méthode des singularités, [9] (appelé ici non linéaire).

Le travail présenté ici a pour but l'introduction des effets portants dans le code instationnaire Poséidon (domaine fréquentiel) développé au LEA, Boin [10], Ba et al. [11], Boin et al. [12] qui ne les prenait pas en compte. On s'intéresse principalement au cas des quilles de voilier, avec bord de fuite aigu. Pour cela, à la distribution de sources sur la surface du corps, a été ajoutée une distribution de doublets sur le squelette du corps, prolongé par des bandes semi- infinies pour simuler le sillage, supposé plan. L'intensité sur chaque bande est déterminée par une condition de Kutta-Joukowski instationnaire imposant l'égalité des pressions instationnaires linéarisées au bord de fuite des parties aiguës à l'arrière des corps. Une loi arbitraire sur la distribution d'intensités des doublets sur le squelette est utilisée pour éviter les difficultés numériques.

Une étude des effets de cette modification sur les résultats numériques obtenus a été effectuée et les résultats obtenus ont été validés, d'abord en aérodynamique, tant pour des quantités globales (efforts en amplitude et en phase, masse ajoutée et amortissement) que sur des quantités locales (distribution de pression). On s'est intéressé aussi à la qualité de la satisfaction de la condition de Kutta-Joukowski. En outre, on a étudié l'apport de cette condition sur les résultats, en particulier par comparaison avec des calculs en résistance de vagues et avec des résultats numériques ou expérimentaux disponibles.

2. FORMULATION DU PROBLEME ET CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKY

On étudie l'écoulement instationnaire dans le domaine fréquentiel autour d'un navire avançant avec une vitesse constante U_∞ sur une trajectoire rectiligne. Le fluide est supposé parfait et l'écoulement incompressible et irrotationnel. Le système d'axes utilisé est lié à la position moyenne du navire, avec un axe z dirigé vers le haut ($z=0$ correspond à la surface libre moyenne) et l'axe x dirigé vers l'avant. L'origine est prise au milieu de la longueur du navire dans le plan de $z=0$. On utilise le potentiel des vitesses sous la forme $\varphi(x, y, z)e^{i\omega t}$, où ω est la fréquence de rencontre. Ce potentiel satisfait l'équation de Laplace au sein du

domaine D occupé par le fluide, la condition de glissement sur la position moyenne mouillée du corps S_B et une condition de surface libre linéarisée sur la position moyenne de celle-ci, S_F , ainsi que les conditions de radiation et à l'infini (cf. [10 à 12] pour le détail):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{dans } D \\ \left[-\omega^2 - 2i\omega \frac{\partial}{\partial x} + U_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right] \varphi &= 0 \quad \text{sur } S_F, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= (\vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \overline{OM}) \cdot \vec{n} \quad \text{sur } S_B \end{aligned} \quad (1)$$

où g est l'accélération de la pesanteur. \vec{V} et $\vec{\Omega}$ sont respectivement les vitesses de translation et de rotation de S_B et \vec{n} est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du corps.

Pour un domaine fluide D limitée par la surface de la carène, la surface libre et une surface à l'infini, la 3^{ème} formule de Green, avec l'aide de la fonction de Green de diffraction-radiation avec vitesse d'avance, $\tilde{G}(M, M')$, qui satisfait les mêmes conditions que le potentiel des vitesses sauf la condition de glissement, permet d'obtenir une équation intégrale pour celui-ci:

$$\forall M \in S \quad \varphi(M) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{S_B} \varphi(M') \tilde{G}(M, M') dS_{M'} + \frac{U_\infty^2}{4\pi g} \int_C \varphi(M') \tilde{G}(M, M') (\vec{n}_{M'}, \vec{x}) dy_{M'} \quad (2)$$

La pression instationnaire peut être ensuite calculée à l'aide du théorème de Bernoulli que l'on utilise ici sous une forme linéarisée : $p(M) = -\rho [i\omega\varphi(M) - U_\infty \partial\varphi(M)/\partial x]$.

Dans le cas où l'on est en présence d'effets portants, on doit imposer en outre la régularité de l'écoulement au bord de fuite, et la continuité de la pression au bord de fuite si celui-ci est aigu. Si on note les points au voisinage du bord de fuite de la partie portante à l'extrados (M_{ex}) et à l'intrados (M_{in}), la condition de Kutta-Joukowski s'écrit :

$$p(M_{ex}) = p(M_{in}) \quad \text{d'où} \quad \frac{i\omega}{U_\infty} [\varphi(M_{ex}) - \varphi(M_{in})] - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_{M_{ex}}}(M_{ex}) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_{M_{in}}}(M_{in}) \right] = 0 \quad (4)$$

On peut donc écrire la condition de Kutta-Joukowski sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} & \iint_S \sigma(M') \left(\frac{\partial G(M_{ex}, M')}{\partial x_{M_{ex}}} - \frac{\partial G(M_{in}, M')}{\partial x_{M_{in}}} \right) dS_{M'} - \frac{i\omega}{U_\infty} \iint_S \sigma(M') (G(M_{ex}, M') - G(M_{in}, M')) dS_{M'} \\ & - \frac{U_\infty^2}{g} \int_C \sigma(M') \left(\frac{\partial G(M_{ex}, M')}{\partial x_{M_{ex}}} - \frac{\partial G(M_{in}, M')}{\partial x_{M_{in}}} \right) (n_{M'}, x) dy_{M'} + \frac{i\omega U_\infty}{g} \int_C \sigma(M') (G(M_{ex}, M') - G(M_{in}, M')) (n_{M'}, x) dy_{M'} \\ & + \iint_{\text{Squelette+sillage}} \mu(M') \left(\frac{\partial^2 G(M_{ex}, M')}{\partial x_{M_{ex}} \partial n_{M'}} - \frac{\partial^2 G(M_{in}, M')}{\partial x_{M_{in}} \partial n_{M'}} \right) dS_{M'} - \frac{i\omega}{U_\infty} \iint_{\text{Squelette+sillage}} \mu(M') \left(\frac{\partial G(M_{ex}, M')}{\partial n_{M'}} - \frac{\partial G(M_{in}, M')}{\partial n_{M'}} \right) dS_{M'} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (5)$$

σ et μ sont respectivement les distributions de sources et doublets. On peut remarquer que cette équation fait apparaître la dérivée seconde de la fonction de Green, ce qui amène des difficultés de calculs qui sont décrits dans Boin et al. [12].

3. RESOLUTION NUMERIQUE

a) Discrétisation

Le maillage est divisé en bandes et en colonnes, en mettant les sources d'intensité constante σ_i sur chaque facette (i) du corps, et les doublets d'intensité μ_j sur chaque bande (j) du squelette et du sillage de la partie portante. On ne dispose que d'une condition de Kutta-Joukowski par bande de sillage, en conséquence pour chaque facette du squelette de centre M , on utilisera une fonction arbitraire $f(M, \omega)$, oscillante, nulle au bord d'attaque, avec une partie réelle égale à 1 et une partie imaginaire nulle au bord de fuite; donc l'intensité sur la facette sera $\mu(M) = f(M, \omega) \mu_j$. Sur le sillage en aval du bord de fuite, déterminée par le

théorème de Kelvin, l'intensité de doublets sera oscillante, reliée à la valeur au bord de fuite par $\mu(M) = \gamma(M, \omega) \mu_j$. Les fonctions utilisées f et γ sont données par :

$$f(M; \omega) = 1/2 \left\{ 1 + \cos \left(\pi \left| \frac{x_{BF} - x}{x_{BF} - x_{BA}} \right| \right) \right\} \exp(i\omega(x_{BF} - x)/U_\infty); \text{ avec : } x_{BA} \leq x \leq x_{BF} \quad (6)$$

$$\gamma(M; \omega) = \exp(i\omega(x - x_{BF})/U_\infty); \quad \text{avec : } x_{BF} < x$$

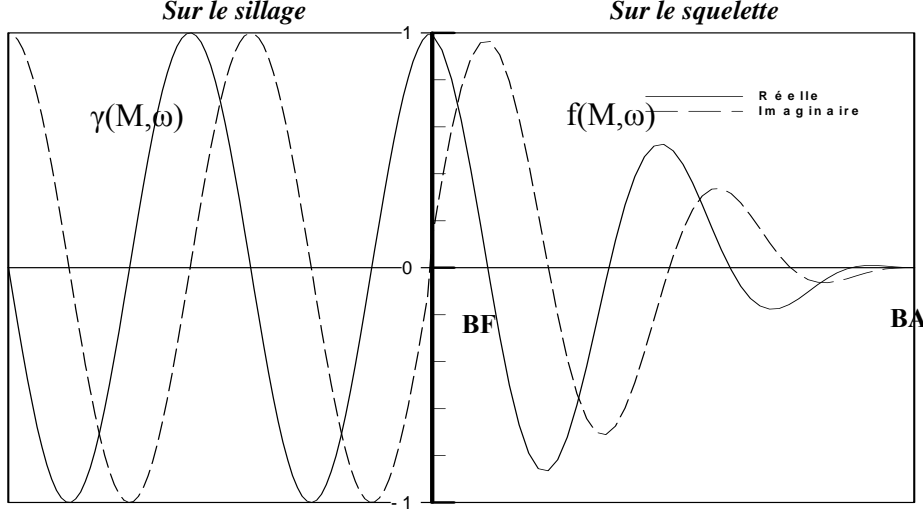


Figure1 : Intensité de doublets sur le squelette et le sillage

La figure 1 montre l'évolution de l'intensité de doublets sur le squelette et le sillage supposé plan dans le plan de symétrie du celui-ci.

Après discrétisation, on obtient un nouveau système d'équations linéaires donné par:

$$[S \rightarrow G]_{ij} \sigma_i + [D \rightarrow G]_{ik} \mu_k = B_i \quad (7)$$

$$[S \rightarrow KJ]_{nj} \sigma_i + [D \rightarrow KJ]_{nk} \mu_k = 0$$

où les nouveaux termes sont ceux donnés par l'influence des sources (S) et des doublets (D) sur la condition de Kutta-Joukowski (KJ) et ceux de l'influence des doublets sur la condition de glissement sur le corps (G). Ces termes sont donnés par:

$$[D \rightarrow G]_{ik} = \left\{ \iint_{\Sigma_k} \gamma(M_k, \omega) \frac{\partial^2 G(M_i, M_k)}{\partial n_i \partial n_k} dS_k + \sum_{l=1}^{NC} \iint_{S_{ik}} f(M_k, \omega) \frac{\partial^2 G(M_i, M_{kl})}{\partial n_i \partial n_{kl}} dS_{kl} \right\} \quad (8)$$

$$[S \rightarrow KJ]_{ij} = \left\{ \iint_{S_j} \left[\frac{\partial G(M_{ex,j}, M_j)}{\partial x_{M_{ex,j}}} - \frac{\partial G(M_{in,j}, M_j)}{\partial x_{M_{in,j}}} \right] dS_j - \frac{i\omega}{U_\infty} \iint_{S_j} [G(M_{ex,j}, M_j) - G(M_{in,j}, M_j)] dS_j \right. \\ \left. + \frac{U_\infty^2}{g} \int_{S_j \cap \Sigma \neq \emptyset} \left(\frac{\partial G(M_{ex,j}, M_j)}{\partial x_{M_{ex,j}}} - \frac{\partial G(M_{in,j}, M_j)}{\partial x_{M_{in,j}}} \right) (\vec{n}_{M_j} \cdot \vec{x}) dy_{M_j} + \frac{iaU_\infty}{g} \int_{S_j \cap \Sigma \neq \emptyset} [G(M_{ex,j}, M_j) - G(M_{in,j}, M_j)] (\vec{n}_{M_j} \cdot \vec{x}) dy_{M_j} \right\} \quad (9)$$

$$[D \rightarrow KJ]_{ik} = \left\{ \sum_{l=1}^{NC} f(M_{kl}; \omega) \iint_{S_{ik} \text{ squelette}} \left[\frac{\partial^2 G(M_{ex,i}, M_{kl})}{\partial x_{M_{ex,i}} \partial x_{M_{kl}}} - \frac{\partial^2 G(M_{in,i}, M_{kl})}{\partial x_{M_{in,i}} \partial x_{M_{kl}}} \right] dS_{kl} - \frac{i\omega}{U_\infty} \sum_{l=1}^{NC} f(M_{kl}; \omega) \iint_{S_{ik} \text{ squelette}} \left[\frac{\partial G(M_{ex,i}, M_{kl})}{\partial x_{M_{kl}}} - \frac{\partial G(M_{in,i}, M_{kl})}{\partial x_{M_{kl}}} \right] dS_{kl} \right. \\ \left. + \iint_{\Sigma_k \text{ sillage}} \gamma(M_k; \omega) \left(\frac{\partial^2 G(M_{ex,i}, M_k)}{\partial x_{M_{ex,i}} \partial x_{M_k}} - \frac{\partial^2 G(M_{in,i}, M_k)}{\partial x_{M_{in,i}} \partial x_{M_k}} \right) dS_k - \frac{i\omega}{U_\infty} \iint_{\Sigma_k \text{ sillage}} \gamma(M_k; \omega) \left(\frac{\partial G(M_{ex,i}, M_k)}{\partial x_{M_k}} - \frac{\partial G(M_{in,i}, M_k)}{\partial x_{M_k}} \right) dS_k \right\} \quad (10)$$

Les indices ont les valeurs respectives $k, n = 1, NB$ $i, j = 1, NTC$ où NB est le nombre de bandes du maillage (identique sur le corps, son squelette et le sillage), NC est le nombre de colonnes du maillage du squelette et du corps. Le nombre total de facettes est $NT = NB * NC$ sur le squelette et $NTC = 2(NB * NC)$ sur le corps. Le second membre du système d'équations linéaires à résoudre est donnée par:

$$B_i = [i\omega n_l(M_i) + m_l(M_i)]; l=1,6 \quad (11)$$

où $(n_1, n_2, n_3) = \vec{n}$; $(n_4, n_5, n_6) = \vec{r} \times \vec{n}$ et $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0)$; $(m_4, m_5, m_6) = (0, n_3, -n_2)$ ce qui correspond à supposer que la composante stationnaire de l'écoulement est l'écoulement uniforme.

b) Calculs des intégrales supplémentaires

Les équations (8 à 10) montrent que ces calculs font apparaître des intégrales sur les dérivées secondes de la fonction de Green:

$$I_{ij} = \iint_{S_j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} ds; J_i = \iint_{\Sigma_i} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial n'} ds \quad (12)$$

où S_j et Σ_l correspondent respectivement à une facette du squelette et à une bande semi infinie du sillage. On ne traite ici que la partie de la fonction de Green dépendant du nombre de Froude. La partie dite de Rankine, G_0 , est traitée classiquement comme dans les méthodes de ce type. La fonction de Green, où seuls les termes G_1 et G_2 dépendent du nombre de Froude, est définie par:

$$G(M, M') = G_0(M, M') + G_1(M, M') + G_2(M, M')$$

La partie G_1 est utilisée sous la forme donnée par Guevel and Bougis [13]:

$$G_1 = \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{K_1 [g_1(K_1 \xi) + g_1(K_1 \xi')] - K_2 [g_1(K_2 \xi) + g_1(K_2 \xi')]}{\pi L_0 \sqrt{1 + 4\tau \cos \theta}} d\theta \right\} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = z + z' + i[(x - x') \cos \theta \pm (y - y') \sin \theta] \quad (13)$$

ξ and ξ' sont des variables liées aux différentes positions des points source et champ M, M' . Les paramètres adimensionnels utilisés sont la fréquence réduite $\varpi = \omega \sqrt{L_0/g}$ (basée sur la fréquence de rencontre), le nombre d'onde $K_0 = g/U_\infty^2$, le nombre de Froude $F = U_\infty / \sqrt{gL_0}$ et le paramètre de Brard $\tau = \omega U_\infty / g = F\varpi$. Les différents pôles sont définis par:

$$K_j = \frac{1 + 2\tau \cos \theta + (-i)^j \sqrt{1 + 4\tau \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta}, j=1,2$$

g_l est une fonction intégrale exponentielle complexe modifiée, définie par: $g_l(\xi) = e^\xi \varepsilon_l(\xi)$, si $0 < \arg(\xi) < 2\pi$; $\varepsilon_l(\xi) = E_l(\xi)$ si $\Im(\xi) \geq 0$ ou $\varepsilon_l(\xi) = E_l(\xi) - 2i\pi$ si $\Im(\xi) < 0$, E_l est la fonction intégrale exponentielle complexe d'ordre 1:

$$E_1(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ si } -\pi < \arg(\xi) < \pi; E_1(\xi) = \int_1^\infty \frac{e^{-\xi t}}{t} dt \text{ si } \Re(\xi) > 0.$$

La partie G_2 est définie comme la somme d'intégrales du type de l'équation (13) mais avec des limites différentes (cf. annexe). Par dérivation, on obtient avec $i, j=1,3$:

$$\frac{\partial^2 G_1(M, M')}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\pi L_0^3} \left\{ \int_0^{\pi/2} B_i B_j \frac{K_1^3 [\ddot{g}_1(K_1 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_1(K_1 \xi')] - K_2^3 [\ddot{g}_1(K_2 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_1(K_2 \xi')]}{\sqrt{1 + 4\tau \cos \theta}} d\theta \right\}$$

En utilisant pour simplifier les notations suivantes:

$$i = 1 : x_1 = x, A = A_1 = X - X', B_1 = i \cos \theta, B_{c1} = i \cos \theta_c$$

$$i = 2 : x_2 = y, A = A_1 = Y - Y', B_2 = i \sin \theta, B_{c2} = i \sin \theta_c$$

$$i = 3 : x_3 = z, A = Z + Z', A_1 = X - X', B_3 = B_{c3} = 1$$

Le symbole (\ddot{g}_i) correspond à la dérivée seconde de g_i . L'intégration sur une facette est effectuée en utilisant un théorème de Stokes ([10,12]), avec $\vec{n} = (p, q, r)$:

$$I_s = \iint_s \frac{d^2}{d\chi^2} f(\chi) ds' = \sum_{k=1}^4 C_k \frac{f(\chi_{k+1}) - f(\chi_k)}{\chi_{k+1} - \chi_k}$$

On obtient donc :

$$\iint_S \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i \partial x_j} ds' = \frac{1}{\pi L o^2} \int_0^{\pi/2} \frac{B_i B_j}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k [K_1^2 \ddot{D}_{1k} - K_2^2 \ddot{D}_{2k}] + (-1)^{i+j} C'_k [K_1^2 \ddot{D}'_{1k} - K_2^2 \ddot{D}'_{2k}] \right\} d\theta$$

Avec : $\left. \begin{matrix} C_k \\ C'_k \end{matrix} \right\} = (q \mp ir \sin \theta)(x'_{k+1} - x'_k) - (p - ir \cos \theta)(y'_{k+1} - y'_k)$, $\ddot{D}_{jk} = \frac{g_1(\chi_{j,k+1}) - g_1(\chi_{j,k})}{\chi_{j,k+1} - \chi_{j,k}}$; $j=1,2$

$$\left. \begin{matrix} \chi_{j,k} \\ \chi'_{j,k} \end{matrix} \right\} = \frac{K_j}{Lo} \left[z + z'_k + i \left\{ (x - x'_k) \cos \theta \pm (y - y'_k) \sin \theta \right\} \right], j=1,2$$

les termes (') se déduisent des termes () en remplaçant χ par χ' . Et pour l'intégration sur une bande semi-infinie de largeur l :

$$J_l = \frac{\overline{AB}}{\pi L_0^3} \int_0^{-\tau} e^{iks} \sum_{n=0}^N (-1)^n \left\{ \begin{matrix} +n_y \int_0^{\pi/2} \alpha \left\{ K_1^3 [\ddot{D}'_1 - \ddot{D}_1] - K_2^3 [\ddot{D}'_2 - \ddot{D}_2] \right\} \gamma_l \sin \theta d\theta \\ +n_z \int_0^{\pi/2} \alpha \left\{ K_1^3 [\ddot{D}_1 + \ddot{D}'_1] - K_2^3 [\ddot{D}_2 + \ddot{D}'_2] \right\} \delta_l d\theta \end{matrix} \right\} ds$$

$$\ddot{D}_1 = \frac{\ddot{g}_1(\chi_1^B) - \ddot{g}_1(\chi_1^A)}{\chi_1^B - \chi_1^A}; \ddot{D}'_1 = \frac{\ddot{g}_1(\chi_1'^B) - \ddot{g}_1(\chi_1'^A)}{\chi_1'^B - \chi_1'^A} \text{ et } \chi_i^A \text{ ou } \chi_i'^A = f(K_i), i=1,2$$

$$\gamma_l = -\cos \theta \text{ si } l=1; \sin \theta \text{ si } l=2 \text{ et } i \text{ si } l=3; \delta_l = i \cos \theta \text{ si } l=1; i \sin \theta \text{ si } l=2 \text{ et } 1 \text{ si } l=3$$

$$\alpha = 1 / \sqrt{1 + 4\tau \cos \theta}$$

4. RESULTATS DES CALCULS

a. Calculs aérodynamiques

Etude de la convergence

La convergence a été étudiée en aérodynamique instationnaire à grande profondeur (immersion $h/C=10$). On a choisi le cas d'une aile rectangulaire de profil NACA 0024, d'allongement de $\lambda=1$ en mouvement de pilonnement, pour une fréquence réduite $\varpi=0,4$ et pour le nombre de Froude $F=0.4$. La figure 2 montre la masse ajoutée et l'amortissement en fonction du nombre de facettes par bandes, NC pour des nombres de bandes $NB=8, 10, 15, 20$ et 25. Comme on a choisi des pas en x variables sur le corps, le tableau 1 montre les valeurs maximales et minimales de l'allongement des facettes sur le corps. Cette figure montre que dès 20 colonnes les résultats sur la masse ajoutée et l'amortissement de portance en pilonnement sont pratiquement indépendants du nombre de facettes par bandes.

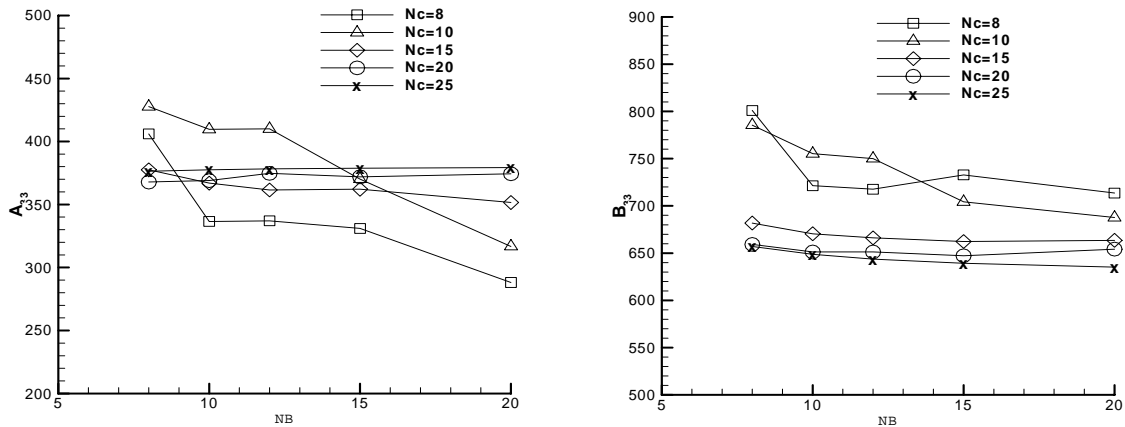


Figure 2 : Effet du nombre de bandes et de colonnes sur la masse ajoutée et l'amortissement de pilonnement en portance

NT	NC	NB	1/NB	NTC	$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{Max}$	$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{Min}$
8*8=64	8	8	0.125	128	2.88	0.76
8*10=80		10	0.1	160	4.01	0.9125
8*12=96		12	0.083	192	4.68	0.61
8*15=120		15	0.067	240	6.14	0.43
8*20=160		20	0.05	320	9.19	0.34
10*8=80	10	8	0.125	160	2.3	0.6
10*10=100		10	0.1	200	4.83	0.69
10*12=120		12	0.083	240	4.93	0.79
10*15=150		15	0.067	300	4.96	0.53
10*20=200		20	0.05	400	7.35	0.42
15*8=120	15	8	0.125	240	1.98	0.52
15*10=150		10	0.1	300	4.02	0.58
15*12=180		12	0.083	360	4.84	0.97
15*15=225		15	0.067	450	4.9	0.66
15*20=300		20	0.05	600	6.12	0.64
20*8=160	20	8	0.125	320	3.9	0.343
20*10=200		10	0.1	400	2.34	0.5
20*12=240		12	0.083	480	3.88	0.83
20*15=300		15	0.067	600	4.4	0.83
20*20=400		20	0.05	800	4.9	0.64
25*8=200	25	8	0.125	320	3.18	0.79
25*10=250		10	0.1	500	2.56	0.52
25*15=375		12	0.083	750	4.25	0.59
25*20=500		15	0.067	1000	3.15	0.88
25*25=525		20	0.05	1050	3.67	0.85

Tableau 1

La figure 3 montre l'évolution de mêmes grandeurs avec le nombre total *NTC* de facettes du corps. On voit que la convergence pour la masse ajoutée est atteinte pour environ 400 facettes sur le corps mais qu'il faut un nombre de facettes plus élevé pour atteindre celle-ci pour l'amortissement.

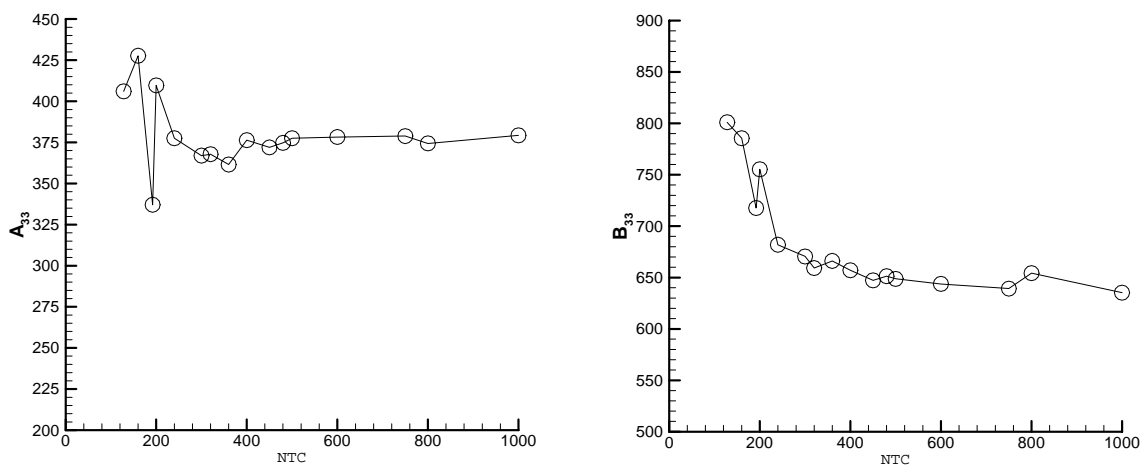


Figure 3 : Effet du nombre total de facettes (corps ou squelette) sur la masse ajoutée et l'amortissement

Influence de la fréquence réduite

Nos résultats sont d'abord comparés avec des résultats en aérodynamique instationnaire, quand la profondeur d'immersion tend vers l'infini. Le maillage, pour ce calcul, comprend 700 facettes sur le corps et 350 facettes sur le squelette, les maillages sont constitués de 10 bandes semis infinis sur le sillage. La figure 4 présente l'amplitude du module et la phase du coefficient de portance ($\bar{C}_L = |C_L| e^{i\Phi_L}$) en fonction de la fréquence réduite $\nu = \omega C / U_\infty$. Par rapport aux calculs de Ashley et al. [8] et Nontakaew et al. [6,7] en surface portante, on constate un bon d'accord, la petite différence de phase pouvant être attribuée à l'effet de l'épaisseur pris en compte par notre calcul, alors qu'il est négligé en surface portante.

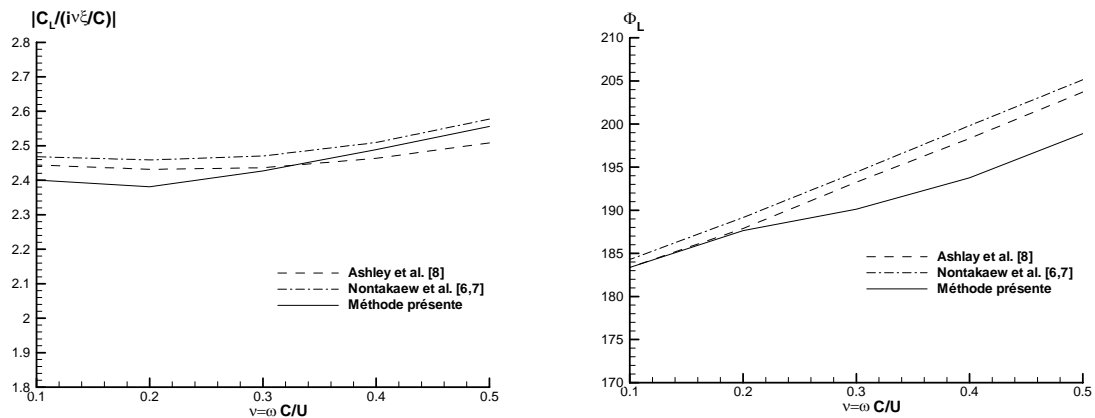


Figure 4 : Coefficient de portance instationnaire sur une aile d'allongement $\lambda=2$ en mouvement de pilonnement, immersion de $10C$

Un autre cas de validation est le mouvement de rotation d'un volet pour une aile en flèche de 25° , de profil NACA0012, allongement $\lambda=2,94$, à une incidence moyenne de 0° , à la fréquence réduite $\nu=0,744$. On a présenté la répartition du saut du coefficient de pression au long de la corde pour la section centrale de l'aile, figure 5 (partie réelle à gauche et imaginaire à droite). Nos résultats sont comparés avec les calculs non linéaires et linéaires (surface portante) de [9] et ceux des essais de [14]. On observe un très bon accord, sauf au voisinage de la charnière, qui peut être du à un manque de raffinement du maillage au voisinage de celle-ci dans nos calculs. De plus, contrairement aux essais, l'espace entre l'aile et le volet n'est pas pris en compte ici. On peut aussi observer la bonne satisfaction de la condition de Kutta-Joukowski.

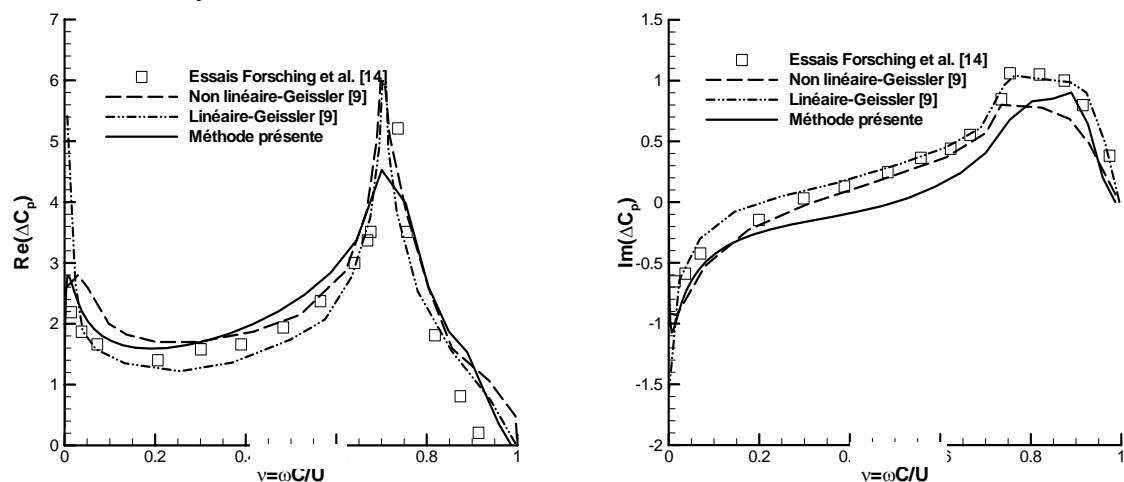


Figure 5 : Coefficient de pression instationnaire à $y/C=1,02$ pour une aile de profil NACA0012, d'allongement $\lambda=2,94$ avec un volet oscillant de longueur $0,2C$ ($\nu=0.744$)

Effet de l'immersion pour les corps immergés

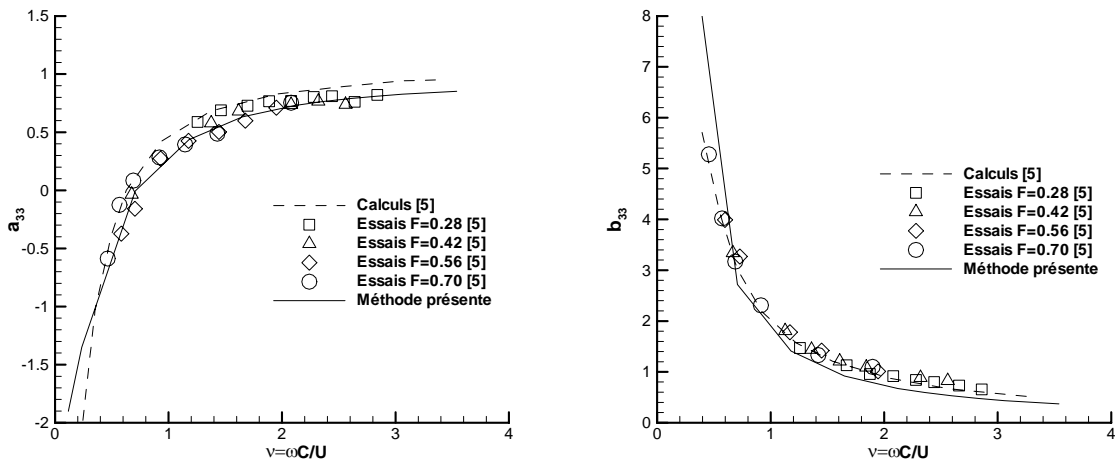


Figure 6 : Coefficients de masse ajoutée et d'amortissement profil 2D NACA0024 en fonction de la fréquence réduite (mouvement de pilonnement à grande immersion)

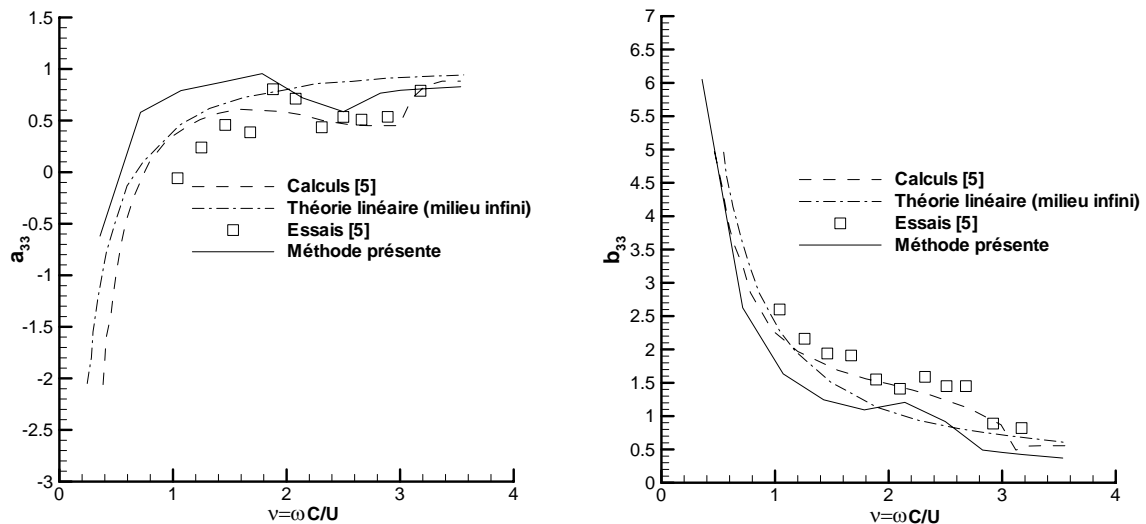


Figure 7 : Coefficients de masse ajoutée et d'amortissement profil 2D NACA0012 en fonction de la fréquence réduite en mouvement de pilonnement à faible immersion ($F=0,28$; $h/C=0,9$)

On a ensuite étudié des corps immergés sous une surface libre. Pour une aile bidimensionnelle de profil NACA0024, à incidence nulle et grande immersion ($h/C=3,18$), on a tracé sur la figure 6 les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement définis $a_{33} = A_{33} / [\rho \pi (C/2)^2]$; $b_{33} = B_{33} / [\rho \pi \omega (C/2)^2]$, où A_{33} est la masse ajoutée et B_{33} l'amortissement, pour comparer aux résultats numériques et expérimentaux de Kyojuka [5]. Les calculs sont représentés par des traits (pleins pour nos calculs et pointillés pour ceux de [5]) et les mesures par des symboles; elles correspondent à un nombre de Reynolds compris entre 0,8 et $2 \cdot 10^5$, l'amplitude relative du mouvement de pilonnement étant de 0,1. Nos calculs étant pleinement tridimensionnels contrairement aux autres, l'accord entre les différents résultats, tant pour les calculs que pour les essais, est satisfaisant aux différents nombres de Froude, bien que leurs influences soient négligeables à grande immersion ($h/C=3,18$). Les figures suivantes 7 et 8 montrent des résultats équivalents à une faible immersion ($h/C=0,9$) pour un profil NACA0012 aux nombres de Froude $F=0,28$ et 0,71. Les calculs sont représentés par des lignes (continues pour nos résultats; pointillés pour ceux de [5] et mixtes

pour la théorie linéaire de Theordorsen correspondant à une plaque plane en milieu infini) et ceux des essais de [5] par des symboles. Compte tenu de la remarque précédente sur la tridimensionnalité de nos calculs, l'accord entre les différents résultats peut, là encore, être trouvé satisfaisant.

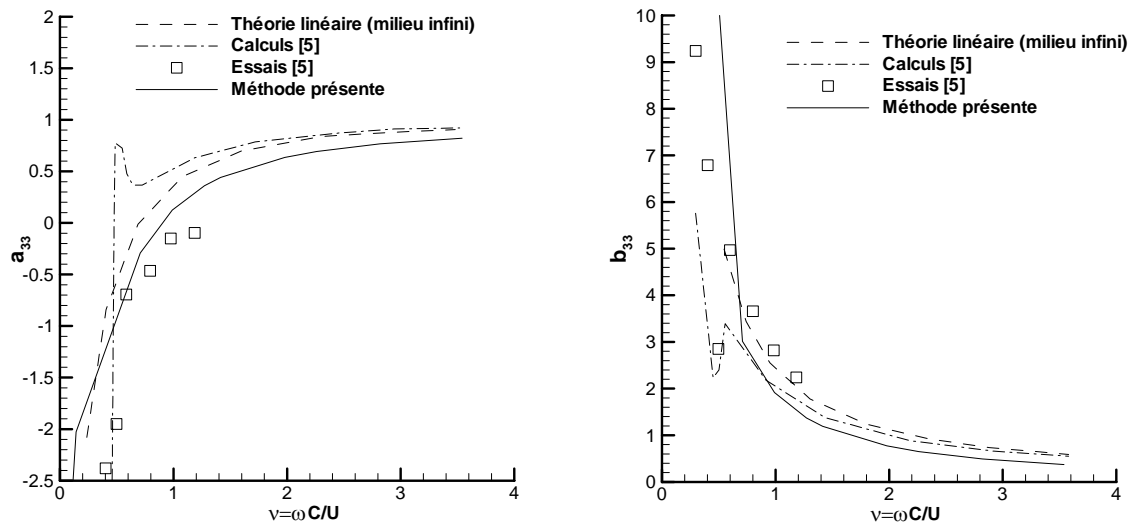


Figure 8 : Coefficients de masse ajoutée et d'amortissement pour 2D NACA0012 en fonction de la fréquence réduite en mouvement de pilonnement à faible immersion ($F=0,71$; $h/C=0,9$)

Répartition de pression

La figure 9 présente la répartition du saut de coefficient de pression sur le profil NACA0024 précédent pour le cas à grande immersion. Le calcul est effectué à la fréquence réduite $v=0.64$ et au nombre de Froude, $F=0.42$. La partie réelle du saut de pression est tracée sur la partie gauche de la figure et la partie imaginaire sur la partie droite. On observe un très bon accord sauf pour la partie réelle à partir du quart corde avant. On peut voir que notre méthode de calcul vérifie bien la condition de Kutta-Joukowski, tant pour la partie réelle que pour la partie imaginaire, ce qui n'est pas le cas pour la partie réelle du coefficient de pression des résultats de [5].

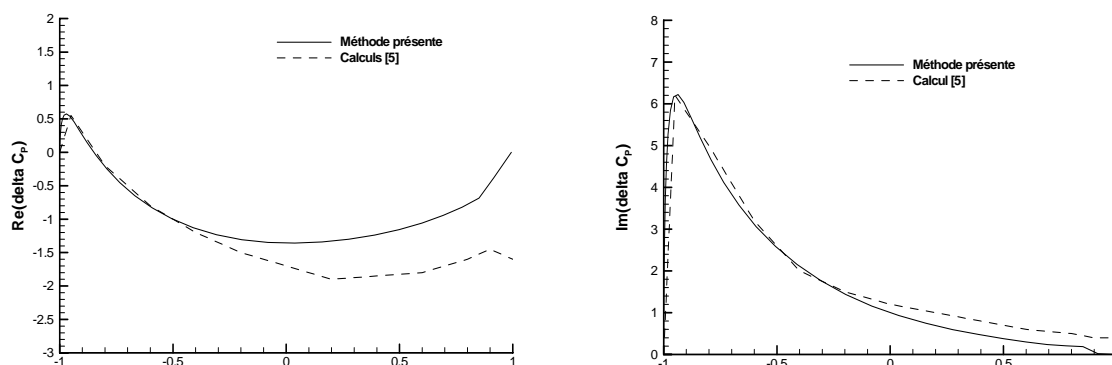


Figure 9: Répartition du saut du coefficient de pression pour le cas aérodynamique

La figure 10 montre aussi l'évolution de la répartition du saut du coefficient de pression à la même fréquence réduite et au même nombre de Froude que la figure 9 mais pour des valeurs différentes de la profondeur d'immersion entre $h/C=0,9$ et 5. On voit que l'on peut considérer la profondeur infinie pour $h/C \geq 4$. On observe une légère variation dès $h/C=3$ qui devient plus importante quand h/C diminue. Pour la plus faible valeur de la profondeur

d'immersion calculée ($h/C=0,9$), on peut voir que la forme de la répartition de la partie réelle change d'une manière très importante, avec même un changement du signe de ce coefficient, alors que la forme de la partie imaginaire reste la même, seule la valeur du maximum situé très près du bord d'attaque diminue nettement quand la profondeur diminue.

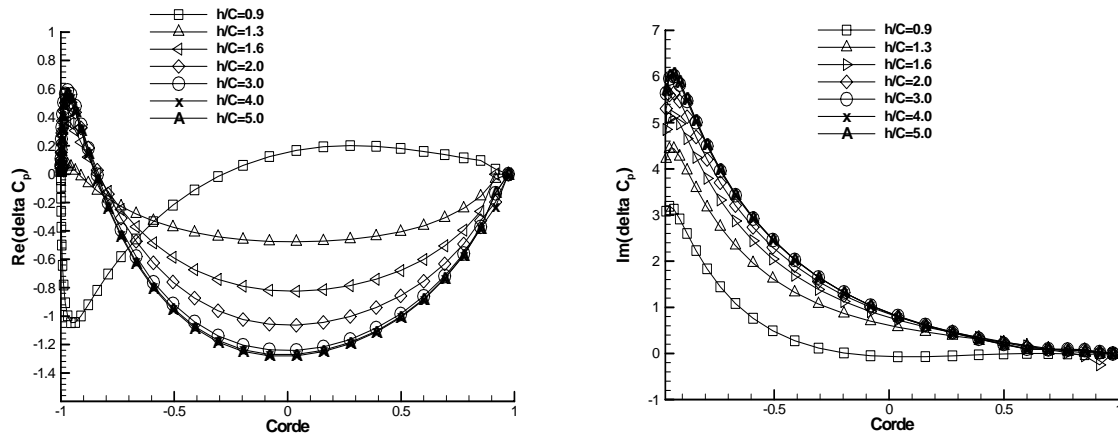


Figure 10: Répartition du saut du coefficient de pression pour différentes immersions

La figure 11 présente la variation des coefficients de masse ajoutée a_{33} et d'amortissement b_{33} pour un profil NACA0012 en mouvement de pilonnement au nombre de Froude $F=0,42$ en fonction de la profondeur d'immersion $2h/C$. La figure de gauche correspond à une fréquence réduite $\nu=1,3$ et celle de droite à $\nu=2$. Nos résultats sont représentés par des courbes (trait plein pour la masse ajoutée et pointillé pour l'amortissement) alors que ceux de [5] sont représentés par des symboles (carrés pour la masse ajoutée et cercles pour l'amortissement). La comparaison montre une évolution qualitative semblable (point d'inflexion à la plus faible fréquence et croissance monotone avec $2h/C$ pour la valeur la plus grande), mais aussi quelques différences quantitatives pour l'amortissement à faible fréquence. A la fréquence la plus élevée, les allures sont identiques mais nos résultats sont un peu inférieurs. Là encore, ces différences peuvent être attribuées au fait que nos calculs sont en réalité tridimensionnels alors que ceux de [5] sont bidimensionnels. De plus, pour l'amortissement à $\nu=1.3$, la profondeur d'immersion diffère dans les calculs; nous avons effectué des calculs pour un nombre plus faible de valeurs, les calculs 3D étant plus longs que les calculs 2D.

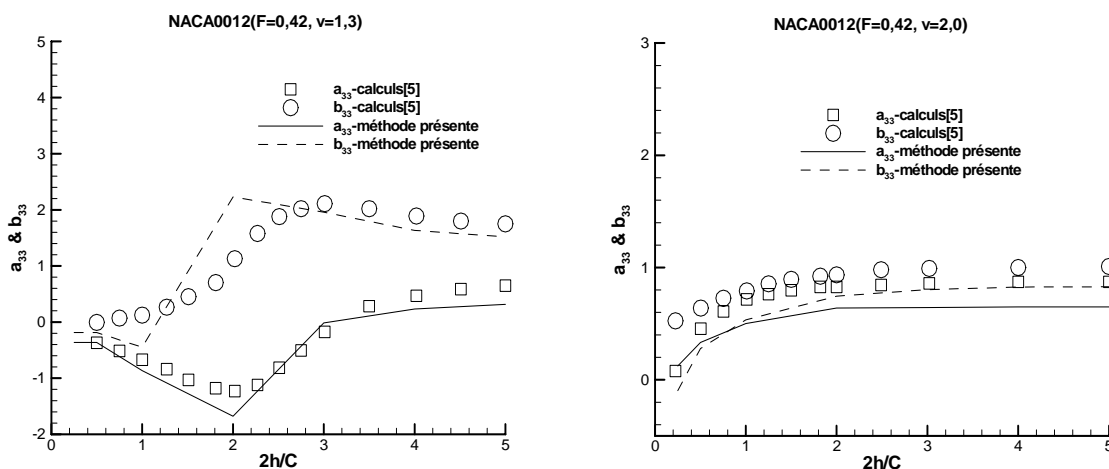


Figure 11: Coefficients de masse ajoutée et d'amortissement en fonction de la profondeur d'immersion (pilonnement à $F=0,42$ et $\nu=1,3$ et 2)

b. Calculs hydrodynamiques pour des corps perçant la surface libre

On a aussi étudié des corps perçant à la surface libre. Finalement, on présente aussi les premiers calculs effectués pour un corps perçant la surface libre. On a calculé les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement $a_{22} = 2A_{22} / (\rho SC)$ et $b_{22} = 2B_{22} / (\rho U_{\infty} SC)$ pour une aile verticale NACA0024 d'allongement $\lambda=0,5$ en mouvement d'embarquée au nombre de Froude $F = U / \sqrt{gC} = 0,96$. Les résultats sont en bon accord avec ceux de [6] en surface portante si l'on tient compte de l'absence d'épaisseur dans ce dernier cas, figure 12. On note une plus grande différence pour l'amortissement que pour la masse ajoutée.

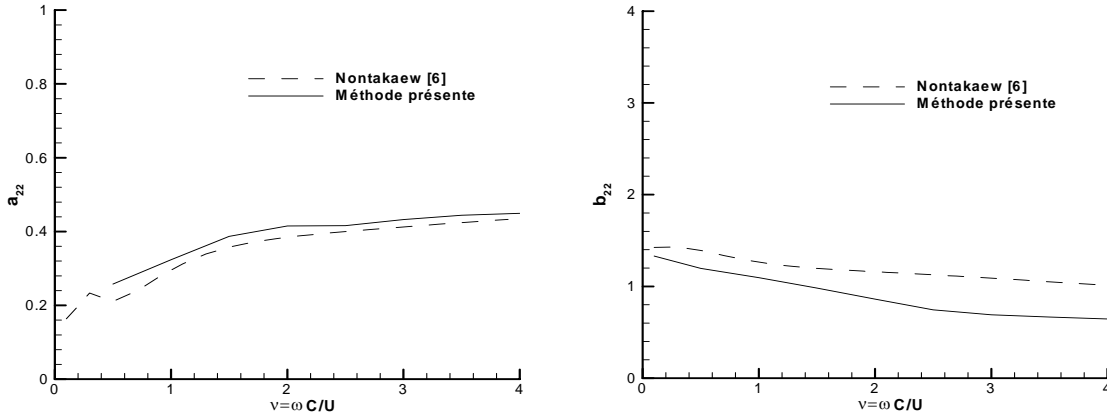


Figure 12: Coefficient de masse ajoutée et amortissement en mouvement d'embarquée à $F=0.96$, $\lambda=0.5$

4. CONCLUSION

Le modèle numérique de résolution du problème linéarisé de tenue à la mer avec vitesse d'avance a pu être étendu de manière à inclure les effets portants. La formulation intégrale de frontière utilisée est construite à partir d'une distribution mixte doublet/source classique en aérodynamique, mais dont l'adaptation au cadre de notre problème repose sur deux éléments clés : le choix de la répartition –arbitraire- des doublets sur le profil d'une part, l'utilisation de la fonction de Green complète et pas seulement de la partie "Rankine" d'autre part. Le premier point en particulier joue un rôle crucial dans la bonne satisfaction de la condition de Kutta-Joukowski aux bords de fuites des appendices portants.

Les premiers résultats obtenus ont été présentés en comparaison avec ceux d'autres méthodes de calcul ou des mesures en aérodynamique instationnaire (aile en mouvement de pilonnement ou volet en rotation d'un volet), tant pour des résultats globaux (masse ajoutée et amortissement), que pour des distributions de pression, qu'en hydrodynamique pour des corps bidimensionnels immergés sous un surface libre. En particulier, on a montré que la condition de Kutta-Joukowski est très bien vérifiée dans nos calculs. Des résultats pour des corps tridimensionnels perçant la surface libre ont été aussi comparés avec ceux obtenus par des méthodes de surface portante. Dans tous les cas on a obtenu un agrément satisfaisant avec les autres résultats disponibles; en particulier, nous avons montré que notre méthode conduisait à une très bonne satisfaction de la condition de continuité de la pression au bord de fuite. On a aussi mis en évidence l'effet du à la condition de Kutta-Joukowski sur les résultats. L'étude de la convergence a montré que l'on pouvait obtenir des résultats corrects dès que l'on avait de l'ordre de 500 facettes sur le corps.

Dans le cadre linéarisé qui est le notre, l'application d'un mouvement ou d'une force sur une gouverne ne semble pas poser de problème hors de la zone de raccord (ou de charnière) entre le profil et la gouverne et l'erreur constatée reste locale, sans polluer les résultats sur le reste du corps. Enfin, la qualité de ces résultats est conservée pour des corps perçant la surface. La méthode proposée peut donc vraisemblablement être appliquée à un bateau complet.

Nous sommes ainsi en mesure d'aborder les problèmes de pilotage ou de tranquillisation d'un navire soumis à l'action de la houle ce qui constitue notre prochain objectif

5. REFERENCES

- [1] V.Bertram, "Numerical investigation of steady flow effect in three-dimensional seakeeping Computations", Proc. of the 22nd Symp. on Naval Hydro., p.417-431, 1998.
- [2] M.Okhusu & G.Wen, "Radiation and diffraction waves of a ship at forward speed", Proc. of the 21st Symp. on Naval Hydrodynamics, p.29-44, 1996.
- [3] M.Okhusu, "Validation of theoretical methods for ship motions by means of experiment", Proc. of the 22nd Symp. on Naval Hydrodynamics, p.341-358, 1998.
- [4] Z.J.Zou, "A 3D panel method for the radiation problem with forward speed", Proc. of 8th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, p.177-180, 1993.
- [5] Y.Kyosuka, "The unsteady lift on a two-dimensional wing oscillating below a free surface", Proc. ISOPE, San Francisco, p.659-665, USA, 1992.
- [6] U.Nontakaew, "Etude théorique et expérimentale du problème de radiation d'ondes par une plaque plane en oscillations forcées avec vitesse d'avance", Thèse de doctorat, Poitiers, 1996.
- [7] U.Nontakaew, M.Ba and M.Guilbaud, "Solving a radiation problem with forward speed using a lifting surface method with a Green's function", Aerospace Science and Techn., n°8, p.533-43, 1997.
- [8] H.Ashley, S.Windall and M.T. Landahl, "New directions in lifting surface theory", AIAA Journal, Vol.3, No.1, p.3-16, 1965.
- [9] W.Geissler, "Nonlinear unsteady potential flow calculations for three-dimensional oscillating wing", AIAA Journal, p.1168-1174, Vol.16, No.11, 1978.
- [10] J-P.Boin "Calcul des efforts hydrodynamiques sur un navire soumis à une houle régulière ; application d'une méthode de singularité de Kelvin", Thèse, Poitiers, 2001.
- [11] C.Maury, G.Delhommeau, M.Ba, J.-P.Boin and M.Guilbaud, "Comparison between numerical computations and experiments for seakeeping on ship's models with forward speed", Journal of Ship Research, Vol. 47,4, p.347-364, 2003.
- [12] J.-P.Boin, M.Ba and M.Guilbaud, "On the integration of the diffraction-radiation with forward speed Green function", Ship Technology Research, vol. 50, p.106-124, 2003.
- [13] J.Bougis et T.Coudray, "Méthodes rapides du calcul des fonctions de Green des problèmes de Neumann-Kelvin et de diffraction-radiation avec vitesse d'avance", Proc. of the 3^{èmes} Jour. Hydro., Grenoble (France), p.17-30, 1991.
- [14] H.Försching, H.Triebstein and J.Wagener, "Pressure measurements on a harmonically oscillating swept wing with two control surface in incompressible flow", Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsbericht DLR-FB 70-49,1970.

ANNEXE DERIVEE SECONDE LA FONCTION DE GREEN TERME G_2

La fonction G_2 est définie par:

$$G_2(M, M') = \frac{1}{\pi L_o} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_c'} -i \frac{Z_3 [g_2(Z_3 \xi) + g_2(Z_3 \xi')] - Z_4 [g_2(Z_4 \xi) + g_2(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} d\theta \\ & + \int_{\theta_c}^{\theta_c - \alpha_c} -i \frac{Z_3 [g_1(Z_3 \xi) + g_1(Z_3 \xi')] - Z_4 [g_3(Z_4 \xi) + g_3(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} d\theta \\ & + \frac{-2\pi K_c (1-i) (e^{K_c \xi_c} + e^{K_c \xi_c'})}{\sqrt{\tau \sin \theta_c}} \sqrt{\alpha_c} \\ & + \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} \frac{K_3 [g_3(K_3 \xi) + g_3(K_3 \xi')] - K_4 [g_1(K_4 \xi) + g_1(K_4 \xi')]}{\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}} d\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} Z_3 \\ Z_4 \end{matrix} \right\} = \frac{1 - 2\tau \cos \theta \mp i\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}}{2F^2 \cos^2 \theta}, \quad \left\{ \begin{matrix} K_3 \\ K_4 \end{matrix} \right\} = \frac{1 - 2\tau \cos \theta \mp \sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta}, \quad K_c = 4\varpi^2 \text{ est la limite}$$

de K_3 et K_4 au voisinage de $\theta = \theta_c$; les bornes d'intégration des intégrales sont données par

τ	θ_c	θ'_c	α_c
$\tau < 1/4$	0	0	0
$1/4 < \tau < 1/2$	$\text{Arccos}(1/4\tau)$	0	10^{-6}
$1/2 < \tau$	$\text{Arccos}(1/4\tau)$	$\text{Arccos}(1/2\tau)$	10^{-6}

De plus $\xi_c = \xi(\theta = \theta_c)$; $\xi'_c = \xi'(\theta = \theta_c)$. Les fonctions intégrales exponentielles complexes modifiées sont définies par:

$$g_2(\xi) = e^\xi E_1(\xi) \quad \text{si } -\pi < \arg(\xi) < \pi; \quad g_3(\xi) = e^\xi [\varepsilon_1(\xi) + 2i\pi] \quad \text{si } 0 < \arg(\xi) < 2\pi$$

Par dérivation, on obtient les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 G_2(M, M')}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\pi L o^3} \times \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_c} -iB_i B_j \frac{Z_3^3 [\ddot{g}_2(Z_3 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_2(Z_3 \xi')] - Z_4^3 [\ddot{g}_2(Z_4 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_2(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} d\theta \\ + \int_{\theta_c}^{\theta_c - \alpha_c} -iB_i B_j \frac{Z_3^3 [\ddot{g}_1(Z_3 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_1(Z_3 \xi')] - Z_4^3 [\ddot{g}_3(Z_4 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_3(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} d\theta \\ + B_{ci} B_{cj} \frac{-2\pi K_c^3 (1-i) (e^{K_c \xi_c} + (-1)^{i+j} e^{K_c \xi'_c})}{\sqrt{\tau \sin \theta_c}} \sqrt{\alpha_c} \\ + \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} B_i B_j \frac{K_3^3 [\ddot{g}_3(K_3 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_3(K_3 \xi')] - K_4^3 [\ddot{g}_1(K_4 \xi) + (-1)^{i+j} \ddot{g}_1(K_4 \xi')]}{\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}} d\theta \end{array} \right\}$$

et par intégration sur une facette:

$$\iint_S \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j} ds' = \frac{1}{\pi L o^2} \times \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_c} \frac{-iB_i B_j}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k [Z_3^2 \ddot{E}_{3k} - Z_4^2 \ddot{E}_{4k}] + (-1)^{i+j} C'_k [Z_3^2 \ddot{E}'_{3k} - Z_4^2 \ddot{E}'_{4k}] \right\} d\theta \\ + \int_{\theta_c}^{\theta_c - \alpha_c} \frac{-iB_i B_j}{\sqrt{4\tau \cos \theta - 1}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k [Z_3^2 \ddot{F}_{1k} - Z_4^2 \ddot{F}_{2k}] + (-1)^{i+j} C'_k [Z_3^2 \ddot{F}'_{1k} - Z_4^2 \ddot{F}'_{2k}] \right\} d\theta \\ + B_{ci} B_{cj} \frac{-2\pi(1-i) K_c^2 \sqrt{\alpha_c}}{\sqrt{\tau \sin \theta_c}} \sum_{k=1}^m \left(C_k \frac{e^{\chi_{c,k+1}} - e^{\chi_{c,k}}}{\chi_{c,k+1} - \chi_{c,k}} + (-1)^{i+j} C'_k \frac{e^{\chi_{c,k+1}} - e^{\chi_{c,k}}}{\chi_{c,k+1} - \chi_{c,k}} \right) \\ + \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} \frac{B_i B_j}{\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k [K_3^2 \ddot{H}_{1k} - K_4^2 \ddot{H}_{2k}] + (-1)^{i+j} C'_k [K_3^2 \ddot{H}'_{1k} - K_4^2 \ddot{H}'_{2k}] \right\} d\theta \end{array} \right\}$$

$$\dot{E}_{jk} = \frac{\left[\int g_2(\xi) d\xi \right]_{\chi_{j,k}}^{\chi_{j,k+1}}}{\chi_{j,k+1} - \chi_{j,k}}, \quad j=3,4; \quad \dot{F}_{1k} = \frac{\left[\int g_1(\xi) d\xi \right]_{\chi_{3,k}}^{\chi_{3,k+1}}}{\chi_{3,k+1} - \chi_{3,k}}; \quad \dot{F}_{2k} = \frac{\left[\int g_3(\xi) d\xi \right]_{\chi_{4,k}}^{\chi_{4,k+1}}}{\chi_{4,k+1} - \chi_{4,k}};$$

$$\dot{H}_{1k} = \frac{\left[\int g_3(\xi) d\xi \right]_{\chi_{5,k}}^{\chi_{5,k+1}}}{\chi_{5,k+1} - \chi_{5,k}}; \quad \dot{H}_{2k} = \frac{\left[\int g_1(\xi) d\xi \right]_{\chi_{6,k}}^{\chi_{6,k+1}}}{\chi_{6,k+1} - \chi_{6,k}}; \quad \ddot{E}_{jk} = \frac{g_2(\chi_{j,k+1}) - g_2(\chi_{j,k})}{\chi_{j,k+1} - \chi_{j,k}}, \quad j=3,4$$

$$\ddot{F}_{1k} = \frac{g_1(\chi_{3,k+1}) - g_1(\chi_{3,k})}{\chi_{3,k+1} - \chi_{3,k}}; \quad \ddot{F}_{2k} = \frac{g_3(\chi_{4,k+1}) - g_3(\chi_{4,k})}{\chi_{4,k+1} - \chi_{4,k}}; \quad \ddot{H}_{1k} = \frac{g_3(\chi_{5,k+1}) - g_3(\chi_{5,k})}{\chi_{5,k+1} - \chi_{5,k}}; \quad \ddot{H}_{2k} = \frac{g_1(\chi_{6,k+1}) - g_1(\chi_{6,k})}{\chi_{6,k+1} - \chi_{6,k}};$$

Ici aussi, les termes (') se déduisent des termes () en remplaçant χ par χ' .