PROFIL DE VITESSES DANS LES COUCHES LIMITES TURBULENTES.

H. BONAKDARI^{1, 2}, F. LARRARTE², C. JOANNIS²

¹ Département de Génie Civil, Université de Razi, Kermanshah, Iran,
² Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Division eau et environnement, Route de Bouaye, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex.
T : 02-40- 84-58-82, F : 02-40- 84-59-98, frederique.larrarte@lcpc.fr

Résumé

La détermination du profil vertical de vitesse dans les écoulement turbulents en canaux étroits est une tâche rendue délicate par la présence de courants secondaires de second type de Prandlt dans la section transversale sous l'effet desquels la vitesse maximale est située en dessous de la surface libre. De ce fait, si la loi logarithmique reste valide dans la zone interne de la couche limite, la loi de Coles s'avère inadaptée.

Après un rappel de l'état de l'art actuel, cet article présente une analyse des équations de Navier Stokes qui permet de proposer une nouvelle loi pour les profils de vitesses dans la région centrale des canaux aussi bien étroits que larges. Cette nouvelle loi est ensuite validée par la comparaison avec des résultats expérimentaux obtenus pour des canaux de diverses largeurs et de géométries variées.

Summary

The determination of velocity profiles in turbulent narrow open channels is a difficult task due to the significant effects of the anisotropic turbulence that drives the Prandtl's second kind of secondary flow in the cross section. Due to these currents the maximum velocity appears below the free surface. This is called the dip phenomenon. The classical log law describes the velocity distribution in the inner region of the turbulent boundary layer but it is not able to predict the velocity profile in the outer region of narrow channels.

This paper relies on an analysis of the Navier-Stokes equations and yields a new formulation of the vertical velocity profile in the center region of steady, fully developed turbulent flows in open channels. This formulation is able to predict time averaged primary velocity in the outer region of the turbulent boundary layer for both narrow and wide open channels. This new law is a modification of the classical logarithmic law, which involves an additional parameter C(A) that is a function of the position of the maximum velocity (ξ_{dip}) and roughness height (k_s). ξ_{dip} may be derived, either from measurements, or from an empirical equation proposed in this paper. A wide range of longitudinal velocity profile data for narrow open channel has been used for validating the model. The agreement between the measured and the computed velocities is rather good, despite the simplification used.

INTRODUCTION

La distribution des vitesses dans une section droite a fait l'objet de nombreuses études. (Nikuradse, 1933) a proposé une loi logarithmique pour décrire la distribution verticale des vitesses longitudinales puis (Coles, 1956) a introduit la fonction de sillage. Cette loi est communément utilisée pour déterminer les vitesses longitudinales dans les canaux (Graf et Altinakar, 1996), (Chassaing, 2000), (Chanson, 2004).

Suite au développement des techniques de vélocimétrie laser, (Sarma et al., 1983), (Steffler et al., 1985), (Nezu et Rodi, 1986), ont pu étudier les trois composantes du champ de vitesses et montrer le caractère tridimensionnel des écoulements dans les canaux étroits avec la présence de courants secondaires de second type de Prandlt qui se traduisent par des circulations de fluide entre le centre de l'écoulement et les parois. (Sarma et al., 1983) ont alors proposé une loi parabolique pour décrire les profils verticaux de vitesses, sachant que les canaux étroits sont définis par un coefficient d'aspect Ar = b/h inférieur à 5, où b est la largeur à la surface libre et h la hauteur d'eau. Plus récemment (Yang et al., 2004), (Maghrebi et Rahimpour, 2006) ont proposés de nouvelles lois dont l'application est limitée par la détermination de divers paramètres.

Le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées mène actuellement des recherches sur la représentativité des vitesses mesurées en collecteur (Larrarte et al., 2004). Suite à l'observation des champs expérimentaux de vitesses dans ce contexte de canaux étroits (Larrarte, 2006) au sein desquels se produisent des écoulements turbulents à surface libre, une analyse des équations de Navier Stokes en Moyenne de Reynolds a été faite. Cela permet de proposer une loi décrivant la distribution verticale des vitesses longitudinales dans la zone externe de la couche limite, quel que soit le coefficient d'aspect du canal concerné. Dans cette communication nous présentons l'analyse qui a permis de proposer notre loi dont nous montrons les possibilités par comparaisons avec diverses données expérimentales.

ETAT DE L'ART

Cette étude concerne des écoulement uniformes turbulents dont les nombres de Reynolds $\text{Re} = \frac{\text{UR}_{h}}{\nu}$ sont supérieurs à 10⁵, où U est la vitesse, R_h le rayon hydraulique et v la viscosité dynamique. Chaque paramètre \mathcal{F} est défini par $\mathcal{F} = \text{F} + \text{f}$ (1)

où F est la composante moyenne et f représente les fluctuations turbulentes de F.

Pour les écoulements développés, la couche limite turbulente se décompose en une région externe et une région interne. Cette dernière ne représente que 10 à 20% de l'épaisseur de couche limite totale (Cebecci, 2004). La zone interne est caractérisée par le fait que la création d'énergie cinétique turbulente est supérieure au taux de dissipation. Cela se traduit par un comportement qui dépend de la rugosité des parois et la loi logarithmique s'écrit :

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) - 2.5 \ln\left(\frac{z_o}{k_s}\right)$$
(2),

où u* est la vitesse de cisaillement, k_s la rugosité et z₀ est la hauteur des rugosités de surface. (Einstein et El-Samni, 1949) ont trouvé que cette hauteur de référence z₀, ou lit hypothétique, est définie par une vitesse de glissement nulle et située entre le sommet des rugosités et le lit du canal (figure 1). Cette hauteur est usuellement obtenue par lissage de données expérimentales (Raupach et al., 1991). (Nikurades, 1933) a proposé diverses relations qui dépendent du nombre de Reynolds de la rugosité $\text{Re}_* = \frac{u_*k_s}{v}$, où ks est l'épaisseur de rugosité. Pour des fonds rugueux définis par $\text{Re}_* \ge 70$, $z_0 = 0,033k_s$ (Jan *et al.*, 2006).



Figure 1: Couche limite turbulente sur une paroi rugueuse.

Dans la région externe, la distribution verticale des vitesses peut s'écrire :

$$\frac{U}{u*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) - 2.5 \ln\left(\frac{z_0}{k_s}\right) + w(\xi)$$
(3)

où $\xi = \frac{z}{h}$ est la distance relative au fond et w $(\xi) = \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$ est la fonction de sillage proposée par (Coles, 1956). Cette relation est valable tant pour des parois lisses que

ETUDE ANALYTIQUE

rugueuses.

Du fait de son caractère monotone croissant, la loi de Coles ne permet pas de représenter les profils verticaux de vitesses dans les canaux étroits pour lesquels, dès 1883, Stearns avait mis en évidence le fait que la vitesse maximale est située en dessous de la surface libre. Ce constat nous a amené à une nouvelle analyse des équations de Navier Stokes. Ces équations peuvent s'écrire en moyenne de Reynolds :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right)$$
(4)

où U_i est la vitesse moyenne dans les directions x (longitudinale), y (transversale), z (verticale), ρ la masse volumique et $\overline{u_i u_i}$ sont les composantes du tenseur de Reynolds.

Pour un écoulement turbulent, uniforme et complètement développé, l'équation (4) écrite dans la direction longitudinale devient :

$$\underbrace{V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z}}_{(A)} = \underbrace{gS_0}_{(B)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{uv}\right)}_{(C)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\overline{uw}\right)}_{(D)} + \underbrace{v\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{(E)} + \underbrace{v\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}_{(F)}$$
(5)

où g est l'accélération de la pesanteur, S_0 la pente ($S_0 = \sin \theta$). Dans cette équation (A) représente l'écoulement secondaire dans la section transverse, (B) les effets de la pesanteurs, (C) et (D) les contraintes de Reynolds respectivement verticales et horizontales, (E) et (F) la diffusion respectivement verticale et horizontale.

On peut diviser la section transversale en deux parties distinctes : une zone du bord et une zone centrale (figure 2). (Yang et McCorquodale, 2004) ont indiqué qu'au centre de l'écoulement, le gradient vertical $(\frac{\partial}{\partial z})$ est prépondérant face au gradient horizontal $(\frac{\partial}{\partial y})$ qui peut être négligé. On obtient alors :

$$W\frac{\partial U}{\partial z} = gS_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\overline{uw}\right) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$
(6)



Figure 2 : Schéma de partage de la section en différentes zones.

Dans la région externe de la couche limite, les effets visqueux sont négligeables donc le troisième terme dans la partie droite de l'équation (6) est négligée. A la surface libre, la composante moyenne (W), les fluctuations (w) de la vitesse verticale ainsi que la vitesse de cisaillement sont égales à zéro. L'équation (6) peut être intégrée dans la direction verticale entre la hauteur z et la surface à la hauteur h

$$UW_{(z)} = ghS_0(\xi - 1) - uW_{(z)}$$
(7)

ce qui peut être réécrit:

$$-\frac{uw}{u_*^2} + \frac{U}{u_*} \times \frac{-W}{u_*} = \alpha(1 - \xi)$$
(8)

où $\alpha = \frac{\text{ghS}}{u_*^2}$. Cette équation met en jeu la contrainte de Reynolds dans la direction verticale et

la distribution verticale des vitesses. Or les contraintes de Reynolds sont reliées au gradient de vitesses moyennes et à la viscosité turbulente (v_t) par la relation suivante, (Rodi, 1993) :

$$-\overline{\mathbf{u}_{i}\mathbf{u}_{j}} = \mathbf{v}_{t} \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}_{i}}{\partial \mathbf{x}_{j}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{U}}_{j}}{\partial \mathbf{x}_{i}} \right) - \frac{2}{3} \mathbf{k} \delta_{ij}$$
(9)

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ pour i = j et $\delta_{ij}=0$ pour $i \neq j$) et k l'énergie cinétique turbulente. La viscosité turbulente n'est pas une propriété intrinsèque du fluide et elle doit être estimée. (Graf, 1984) et (Tominaga *et al.*, 1989) ont proposé la relation suivante:

$$\mathbf{v}_{\star} = \kappa \mathbf{u}_{\star} \mathbf{h} \boldsymbol{\xi} (1 - \boldsymbol{\xi}) \tag{10}$$

En considérant les équations (9) et (10), nous obtenons :

$$\frac{-\overline{uw}}{u_*^2} = \kappa \xi (1-\xi) \frac{d\left(\frac{U}{u_*}\right)}{d\xi}$$
(11)

Puis en utilisant l'équation (11) dans l'équation (8) et en intégrant cette dernière nous pouvons écrire :

$$\frac{U}{u_*} = \exp\left(\int \frac{Wd\xi}{u_*\kappa\xi(1-\xi)}\right) \int \left(\exp\left(\int \frac{-Wd\xi}{u_*\kappa\xi(1-\xi)}\right) \frac{\alpha d\xi}{\kappa\xi}\right)$$
(12)

(Nezu et al., 1989) ont mis en évidence la structure des courants secondaires dans les canaux à surface libre : à proximité de la surface l'écoulement est transversal (V > 0) et dirigé des parois vers le milieu du canal où il devient alors vertical descendant (W > 0) de la surface vers le fond. Ceci signifie que, au centre du canal, seule la composante verticale de vitesse contribue à l'écoulement secondaire. Cette structure a été montrée par (Bonakdari, 2006). La composante verticale de la vitesse doit donc satisfaire à 3 conditions : W est égale à zéro au fond et à la surface libre, W est négative au centre du canal..

Différentes formulations de W ont été étudiées avec comme objectif que l'intégration de W dans le membre de droite de l'équation (12) produise une fonction logarithmique qui se simplifie avec la fonction exponentielle. Après une étude des travaux de Nezu et Nakagawa (1993) et de ceux de Yang (2005), la solution retenue est:

$$\frac{W}{u_{*}} = -P(A)\kappa \frac{\xi(1-\xi^{2})}{\frac{1}{2}\xi^{2} + \xi + C(A)}$$
(13)

où P(A) et C(A) sont deux paramètres issus de l'intégration qui dépendent de la surface mouillée. En tenant compte de l'équation (13) dans l'équation (12) on obtient :

$$\frac{U}{u_{*}} = \frac{\alpha}{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\xi^{2} + \xi + C(A)\right)^{P(A)}} \int \left(\frac{1}{2}\xi^{2} + \xi + C(A)\right)^{P(A)} \frac{d\xi}{\xi}$$
(14)

Afin de simplifier l'intégration, seul le cas P(A) = 1 a été développé. En utilisant la condition de non glissement en $\xi = \xi_0$ (avec $\xi_0 \ll 1$), la distribution verticale de la vitesse longitudinale peut être déterminée dans la région externe de la couche limite ($\xi > 0.2$) au centre du canal :

$$\frac{U}{u_{*}} = \frac{\alpha}{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\xi^{2} + \xi + C(A)\right)} \left(\frac{1}{4}\xi^{2} + \xi + C(A)\ln\frac{\xi}{\xi_{0}}\right)$$
(15)

Dans la région interne la loi logarithmique reste valable.

RESULTATS ET DISCUSSION

Signification du paramètre C(A)

Dans l'équation (15) les paramètres α , κ et ξ_0 ont une signification physique qui peut être reliée aux caractéristiques du canal et aux conditions hydrauliques. Cette équation introduit un nouveau paramètre C(A) dont il convient de discuter. Si on considère l'équation (13), la courbure de la distribution transversale de la vitesse verticale W est gouvernée par le terme C(A) puisque ξ est inférieur à 1. La figure 3a montre que plus C(A) est grand, plus la courbe est aplatie.

Nous appelons ξ_{dip} la position de la vitesse maximale dans un profil vertical de vitesses. La figure 3b illustre l'évolution du profil vertical et de la valeur de ξ_{dip} pour différentes valeurs de C(A) pour un cas pratique correspondant à une hauteur d'eau de 0,77 m, une vitesse de cisaillement de 0,032 m/s, une rugosité relative $\xi_0 = 1.6*10^{-3}$ et $\alpha = 1,95$ (Bonakdari, 2006). On constate que lorsque la valeur de C(A) augmente, ξ_{dip} tend vers 1 et le profil vertical est proche de celui obtenu avec la loi de Coles. Lorsque C(A) = 9, l'erreur relative entre les deux profils est inférieur à 2%.



Figure 3 : Effet de C(A) sur l'équation proposée pour W et sur la position de la vitesse maximale.

La dérivée de la vitesse longitudinale U par rapport à ξ est nulle en ξ_{dip} . Il est possible de trouver une solution analytique à la relation

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_{dip}} = 0 \tag{16}$$

Du fait de la forme complexe de l'équation développée, nous ne la présentons pas ici mais la figure 4 montre l'évolution de C(A) en fonction de la position de la vitesse maximale pour différente hauteurs de rugosité.

Il n'y a pas de lien physique entre Ar et ξ_{dip} . (Wang *et al.*, 2001) ont lissés des résultats expérimentaux de la littérature avec une relation empirique qui donne la position de ξ_{dip} en fonction du coefficient d'aspect au centre d'un canal étroit :

$$\xi_{\rm dip} = 0,44 + 0,106 \,{\rm Ar} + 0,05 \,{\rm sin} \left(\frac{2\pi}{2,6} \times \,{\rm Ar}\right) \qquad \text{avec } {\rm Ar} < 5.2 \tag{17}$$

(Yang *et al.*, 2004) ont effectués de nombreuses mesures dans un canal rectangulaire lisse et ils ont proposé, toujours au centre d'un canal étroit, la relation suivante:



Figure 4 : Evolution de C(A) en fonction de ξ_{dip} pour différentes hauteur de rugosité.

La figure 5 montre l'évolution de ξ_{dip} en fonction du coefficient d'aspect pour ces différentes relations. Dans les deux cas la vitesse maximale est située à $\xi=0,68$ quand Ar est égal à 2 alors que les résultats de (Nezu and Rodi, 1989) indiquent que la vitesse est maximale en $\xi=0,5$. Qui plus est ces relations (17) et (18) surestiment les résultats expérimentaux obtenus par (Larrarte, 2006) dans un collecteur ovoide à banquette. Afin de lisser les résultats expérimentaux, nous proposons un modèle sigmoide (figure 5) :

$$\xi_{\rm dip} = \frac{C_1 + C_2 * Ar^{C_3}}{C_4 + Ar^{C_3}} \tag{19}$$

où les constantes sont : $C_1 = 42, 4, C_2 = 1, 0, C_3 = 4, 2, C_4 = 94, 7.$

Il est en outre important de noter que l'équation (19) présente un caractère asymptotique pour Ar supérieur à 6 qui est en accord avec la réalité physique des écoulement dans les canaux larges. C'est à dire que ξ_{dip} tend vers 1 et la vitesse maximale est située à la surface libre.



Figure 5 : Position de la vitesse maximale en fonction du coefficient d'aspect.

La détermination expérimentale de la position de la vitesse maximale n'est pas aisée pour les canaux tels que les collecteurs d'égouts. C'est pourquoi il est important de quantifier la sensibilité de la loi proposée par l'équation (15) à la valeur de ξ_{dip} . Le tableau 1 montre qu'une erreur relative de 20% sur la position de la vitesse maximale entraîne une erreur relative de seulement 10% sur U alors que la loi de Coles induit une erreur relative de 21,2 % (figure 6).



Figure 6 : Position de la vitesse maximale en fonction du coefficient d'aspect

$\frac{\Delta \xi_{dip}}{\xi_{dip}} \text{ en \%}$	-20	-10	0	10	20
Erreur relative maximum sur U en %	-9,9	-5,0	0	3,7	6,8

Tableau 1 : Influence d'une erreur relative sur ξ_{dip} sur l'erreur relative sur la vitesse

Validation de la loi

La figure 7 compare les profils expérimentaux issus des travaux de (Larrarte, 2006) avec les profils obtenus à partir de l'équation (14), où le paramètre C(A) a été déterminé en utilisant la figure 4. Les différences relatives sont inférieures à 2 - 3% de la vitesse calculée à la même hauteur relative ξ par la nouvelle loi. La nouvelle loi est plus précise que celle de Coles. Ceci est particulièrement net près de la surface libre avec une différence de 13% entre la nouvelle loi et celle de Coles. Cela est dû au fait que la loi de Coles ne permet pas de situer la vitesse maximale sous la surface libre.



Figure 7 : Validation de la nouvelle loi par les résultats expérimentaux de (Larrarte, 2006).

Compte tenu des hypothèses, la nouvelle loi a été développée pour la zone externe de la couche limite turbulente au centre d'un canal. La figure 8 montre que l'erreur relative entre les vitesses calculées par cette loi et les vitesses expérimentales obtenues par (Larrarte, 2006) reste inférieure à 5% dans la grande majorité de la section transversale du chenal principal et ceci que ce soit pour une section simple ou composée. Il est bon de rappeler qu'au sens strict

le profil vertical calculé par l'équation (15) a été développé pour la zone centrale telle que définie par (Yang et McCorquodale, 2004). En pratique l'équation (15) nécessite la connaissance de la vitesse de cisaillement à l'endroit du profil vertical, de plus la segmentation de la section transversale en deux régions et la détermination de la vitesse s'avère délicate. (Bonakdari, 2006) a montré que, dans les canaux étroits, le cisaillement au fond ne varie de manière sensible qu'à proximité des parois latérales sous l'effet de l'anisotropie de la turbulence. Les figures 8 montrent la répartition de l'erreur relative $(U_{modèle}-U_{exp}) / U_{exp}*100$ entre les vitesses déterminées par la nouvelle loi avec une vitesse de cisaillement constante et égale à la valeur déterminée en y = 0,9 m à partir des profils expérimentaux et les données expérimentales. On voit nettement que l'erreur reste inférieure à 5% dans une part importante de la section mouillée (60 à 80%) qui peut être assimilée à la zone centrale.



Figure 8 : Erreur relative (U_{modèle}-U_{exp}) / U_{exp}*100 entre les vitesses déterminées par la nouvelle loi et les données expérimentales.

Application à d'autres cas tests

La figure 9 compare les profils expérimentaux obtenus par (Knight et Sterling, 2000) dans un collecteur canal circulaire avec les résultats de la loi de Coles et de la nouvelle loi. Le coefficient d'aspect est de 2 et ξ_{dip} est égal à 0,65. Les écarts entre les données expérimentales et la nouvelle loi restent inférieurs à 3% de la vitesse alors qu'il atteignent 10% à la surface lorsque l'on compare les résultats expérimentaux avec ceux de la loi de Coles.



Figure 9 : Validation de la nouvelle loi par les résultats de (Knight and Sterling, 2000) pour un canal circulaire.

La figure 10a compare les résultats tirés des courbes d'isovaleurs de vitesses de (Nezu et al., 1989) pour un canal rectangulaire avec les résultats de la loi de Coles et de la nouvelle loi. La vitesse moyenne est égale à 0,29 m/s, le coefficient d'aspect 2 et comme ξ_{dip} est évalué à 0,53 alors C(A) est égal à 3 pour une rugosité de 6,2 mm comme indiqué sur la figure 5. Les écarts entre les résultats expérimentaux et la nouvelle loi sont inférieurs à 1% alors qu'ils atteignent 22% avec la loi de Coles au niveau de la surface libre.

Tous les résultats précédents concernent les canaux étroits. Comme indiqués sur la figure 3b, la nouvelle loi permet de reproduire les résultats de la loi de Coles lorsque C(A) est égal à 9. Ces deux lois sont capables de reproduire les résultats expérimentaux de (Tominaga et al., 1989) pour un canal rectangulaire de coefficient d'aspect égal à 7,9 et une vitesse moyenne de 0,37 m/s (figure 8b).



Figure 10 : Validation de la nouvelle loi par les résultats expérimentaux dans des canaux rectangulaires : (a) canal étroit (Nezu *et al.*, 1989) (b) canal large (Tominaga *et al.*, 1989).

CONCLUSION

Une analyse des équations de Navier Stokes est présentée. Elle mène à une nouvelle formulation de la distribution verticale de la vitesse longitudinale dans la région centrale d'un écoulement turbulent, pleinement développé et à surface libre.

Cette analyse a permis de proposer une nouvelle équation pour la vitesse longitudinale dans la région externe d'une couche limite turbulente. Pour la région interne la loi logarithmique reste valable. Du fait des hypothèses faites, cette nouvelle loi donne accès à la distribution des vitesse sans qu'il soit nécessaire de connaître en détail la géométrie d'un canal.

La loi proposée dans ce papier a été validée dans un premier temps par comparaison des résultats qu'elle donne avec des vitesses expérimentales acquises dans un collecteur d'égout dont la géométrie décrit un ovale avec une banquette. La comparaison de données issues de la littérature avec les résultats de cette nouvelle loi a montré sa pertinence tant pour les canaux étroits que larges.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier le personnel technique de la direction de l'assainissement de Nantes Métropole et de la section Hydrologie et assainissement du LCPC pour leur contribution à la partie expérimentale de ce projet.

REFERENCES

- Bonakdari H., (2006), Modélisation des écoulements en collecteur d'assainissement Application à la conception de points de mesures, Ph. D thesis, University of Caen – Basse Normandie, France, 263 p.
- Cardoso A. H., Graf W. H., Gust G., (1989), Uniform flow in a smooth open channel, Journal of Hydraulic Research, Vol. 27, No. 5, pp 603-616.
- Cebeci T., (2004), Analysis of turbulent flows, Second Revised and Expanded Edition, Elsevier Ltd, Oxford, UK, 372 p.
- Einstein H. A., El-Samni E. A., (1949), Hydrodynamic forces on a rough wall, Reviews of Modern Phys., Vol. 31, No. 3, pp 520-524.Coles D., (1956), The low of the wake in the turbulent boundray layer, Journal of Fluid Mechanics., pp 191-226.
- Graf W. H., (1984), Hydraulic of sediment transport, Water Resources Publications, USA, 513 p.
- Hinze J. O., (1975), Turbulence, McGraw-Hill Book Company, second edition, 790 p.
- Jan C. D., Wang J. S., Chen T. H., (2006), Discussion of "Simulation of flow and mass dispersion in meandering channel", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 132, No. 3, pp 339-342.
- Jiménez J., (2004), Turbulent flow over rough walls, Annual Reviews Fluid Mechanics, pp 173-196.
- Kirkgöz S., (1989), Turbulent velocity profiles for smooth and rough open channel flow. Journal of Hydraulic Engineering Vol. 115, No. 11, pp 1543-1561.
- Knight D. W., Sterling M., (2000), Boundary Shear in Circular Pipes Running Partially Full, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 126, No. 4, pp 263-275.
- Larrarte F., (2006), Velocity fields in sewers : an experimental study, submitted to Flow Measurement and Instrumentation, Vol. 17, pp 282-290.

- Maghrebi M. F., Rahimpour M., (2006), Streamwise velocity distribution in irregular shaped channels having composite bed roughness, Flow Measurement and Instrumentation 17, pp 237-245.
- Nezu I., Rodi W., (1985), Experimental study on secondary currents in open channel flow, Proc. 21st congress of IAHR, Melbourne, Vol. 2, pp 115-119.
- Nezu I., Rodi W., (1986), Open channel flow measurements with a laser Doppler anemometer, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112, No. 5, pp 335-355.
- Nezu I., Nakagawa H., Rodi W., (1989), Significant difference between secondary currents in closed channels and narrow open channels, Proc., 23rd IAHR Congress, Vol. A, Delft, The Netherland, pp 125-132.
- Nikuradse J., (1933), Laws of flow in rough pipes, Translation in National Advisory Committee for aeronautics, technical memorandum 1292, NACA, Washington 1950, 62 p.
- Raupach M. R., Antonia R. A., Rajagopalan S., (1991), Rough wall turbulent boundary layers, Applied Mechanics Review, Vol. 44, pp 1-25.
- Rodi W., (1993), Turbulence models and their application in hydraulics, A state of the art review, Third edition, A. A. Balkema, Rotterdam, 104 p.
- Sarma K. V. N., Lakshminarayana P., Lakshmana Rao N. S., (1983), Velocity distribution in smooth rectangular open channel, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 109, No. 2, pp 270-289.
- Stearns E. P., (1883), A reason why the maximum velocity of water flowing in open channels is below the surface, Transactions of the American Society of Civil Engineers, No. 7, pp 331-338.
- Steffler, P. M., Rajaratnam N., Peterson A. W., (1985), LDA measurements in open channel flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 111, No. 1, pp 119-130.
- Tominaga A., Nezu I., Ezaki K., Nakagawa H., (1989), Three dimensional turbulent structure in straight open channel flows, Journal of Hydraulic Research, Vol. 27, No. 1, pp 149-173.
- Wang X., Qian N., (1989), Turbulence characteristics of sediment laden flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 115, No. 6, pp 781-800.
- Wang X., Wang Z. Y., Yu M., Li D., (2001), Velocity profile of sediment suspensions and comparison of log law and wake law, Journal of Hydraulic Research, Vol. 39, No. 2, pp 211-217.
- Yang S. Q., McCorquodale J. A., (2004), Determination of boundary shear stress and Reynolds shear stress in smooth rectangular channel flows, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, No. 5, pp 458-462.
- Yang S. Q., Tan S. K., Lim S. Y., (2004), Velocity distribution and dip phenomenon in smooth uniform open channel flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, No. 12, pp 1179-1186.
- Yang S. Q., (2005), Interactions of boundary shear stress, secondary currents and velocity, Fluid Dynamics Research, Vol. 36, pp 121-136.