

10^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Nantes, 7, 8 et 9 mars 2005

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DE VOILES STOCHASTIC MODELING OF THE FLOW AROUND SAILS

O. LE MAITRE ¹, V. BRION ², S. HUBERSON ³

¹ Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry,
40, rue du Pelvoux, CE 1455, 91 020 Evry cedex.

² Ecole Polytechnique, route de Saclay, 91128, Palaiseau.

³ Laboratoire d'Etude Aérodynamique, Université de Poitiers,
Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex.

Résumé

On s'intéresse à la modélisation numérique de l'écoulement autour d'une voilure en tenant compte de l'incertitude des conditions réelles de fonctionnement. Celle-ci peut être due aussi bien aux conditions de navigation - turbulence du vent, mouvements du bateau dans les vagues - qu'aux actions de l'équipage et en particulier du barreur. Le modèle de surface portante avec discrétisation particulière du sillage est intégré dans une méthode de résolution spectrale du problème stochastique correspondant. Celle-ci est ensuite appliquée à deux problèmes. L'écoulement autour d'une voile isolée permet de mettre en avant les particularités de la méthode et d'expliquer la signification des résultats obtenus. L'application à l'étude d'un ensemble de deux voiles dans différentes positions relatives montre que la méthode peut apporter un angle de vue nouveau sur ce problème classique.

Summary

The influence of the uncertainty of sailing conditions has been introduced in the numerical simulation of the flow around sails. This uncertainty can be due either to the wind turbulence and the waves-induced boat motion or that of the crew actions and particularly of the helmsman. A lifting surface model was used together with a particle discretisation of the wake. This model was imbedded in a spectral resolution of the resulting stochastic problem. This method was applied to two different problems. The case of one single sail was investigated first in order to detail the behaviour of the method and to explain how the output have to be interpreted. The method was then applied to study the advantages of the relative positions of two sails, bringing a new insight on this well-known problem.

1 Introduction

La simulation numérique de l'écoulement autour de voiles de bateau à faible incidence, c'est à dire aux allures de près, est maintenant assez développée pour apporter une aide réelle au maître voilier aussi bien qu'à l'architecte naval. Par contre, l'optimisation d'un plan de voilure par simulation numérique se heurte encore à de nombreuses difficultés dont les principales sont d'une part la nécessité, pour obtenir une solution réaliste, de tenir compte de l'ensemble de l'environnement du voilier, d'autre part la grande variabilité des conditions rencontrées au cours d'une même navigation, qu'il s'agisse de l'état du vent ou de la mer. Pour le premier point, il est nécessaire de développer des approches couplées unissant le calcul des mouvements du bateau et des efforts sur les voiles aux écoulements dûs au vent et aux vagues. Un début de réponse à ce problème a été proposé dans [1] par exemple. Pour le second point, il faut d'une part caractériser les fluctuations du vent ou des vagues par la définition d'un modèle stochastique, d'autre part développer des modèles permettant de prendre en compte ces conditions variables dans les calculs aéro ou hydro-dynamique. C'est ce dernier point qui est abordé ici, sur l'exemple académique de l'écoulement plan autour d'une ou d'un ensemble de voiles de géométrie donnée. L'incertitude sur les conditions de l'écoulement incident et les mouvements des voiles rend le problème stochastique ; on cherche alors à déterminer la distribution de probabilité de l'écoulement résultant, ainsi que celles des observables associés (par exemple les efforts aérodynamiques), compte tenu de la distribution de probabilité des conditions de navigation.

L'introduction de données stochastiques dans les modèles de la mécanique a fait des progrès importants à la suite de l'apparition de la méthode dite des éléments finis stochastiques ou des développements en polynômes de chaos [2]. Ces méthodes, initialement introduites pour les problèmes d'élasticité, ont ensuite été étendues aux méthodes intégrales de frontière, puis à la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes [4, 5]) et plus récemment à la modélisation particulière d'écoulements aérodynamiques [6]. Cette approche est paramétrique dans le sens où elle nécessite la représentation des conditions stochastiques par un ensemble fini de paramètres considérés comme des variables aléatoires ayant des distributions de probabilité connues. Une relation fonctionnelle entre ces variables aléatoires et la solution du modèle est alors recherchée sous la forme d'un développement en polynômes orthogonaux des variables stochastiques. Ces polynômes sont orthogonaux au sens de la moyenne définie par les mesures (densité de probabilité) des variables aléatoires. Le choix le plus usuel est celui de la mesure gaussienne (c'est le plus rationnel si seules la moyenne et la variance du paramètre sont connues) qui correspond aux polynômes d'Hermite. La difficulté du problème repose sur la détermination des coefficients du développement polynomial qui caractérisent l'ensemble de la statistique de la solution. Leur calcul nécessite d'une part la troncature du développement à un ordre fini et d'autre part la dérivation d'équations pour ces coefficients, appelés modes stochastiques. Ce dernier point est réalisé par une projection de Galerkin des équations initiales du problème.

L'essentiel de la représentation spectrale par développement en polynômes stochastiques est rappelé dans la section 2, son application et sa résolution numérique dans les sections 3 et 4. La section 5 présente des exemples de calculs de complexité croissante, et la section 6

l'étude d'une voilure type biplan.

2 Paramétrisation et représentation spectrale

Compte tenu de la complexité du problème, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été introduites. Il s'agit d'abord de la restriction au cas d'écoulements plans, c'est à dire qu'une seule tranche de la voilure sera prise en compte. Par ailleurs, les mouvements étudiés seront limités aux roulis induits par une houle régulière. Ils peuvent ainsi être correctement modélisés par l'addition d'une composante sinusoïdale, normale au champ de vitesse incident qui est, lui, certain. Les conditions effectives de navigation n'étant pas déterminables *a priori*, les caractéristiques de cette composante sinusoïdale ne sont connues qu'à travers une information statistique qui sera introduite sous cette forme dans le modèle. Pour simplifier la présentation, nous supposons que la perturbation du champ incident, représentant les mouvements de la voile dûs au roulis, ne fait intervenir qu'un seul paramètre incertain (par exemple son amplitude) que l'on écrit comme fonction d'une variable aléatoire ξ ayant une densité de probabilité donnée $p(\xi)$. Clairement, la solution du modèle, de même que tout observable, sont aussi incertains puisqu'ils dépendent du paramètre dont la valeur détermine une réalisation particulière. Pour ce problème, notre objectif est en premier lieu d'estimer les caractéristiques statistiques de la voilure, c'est à dire essentiellement les composantes de portance et de traînée de la force aérodynamique (ou de gîte et de propulsion). En faisant explicitement apparaître la dépendance fonctionnelle de ces efforts avec la variable aléatoire, on obtient les espérances mathématiques des efforts (moyenne sur le paramètre)

$$\langle F_{lift} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_{lift}(\xi) p(\xi) d\xi, \quad \langle F_{drag} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_{drag}(\xi) p(\xi) d\xi,$$

et les variances

$$\delta^2(F_{lift}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\langle F_{lift} \rangle - F_{lift}(\xi))^2 p(\xi) d\xi, \quad \delta^2(F_{drag}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\langle F_{drag} \rangle - F_{drag}(\xi))^2 p(\xi) d\xi.$$

Pour calculer ces grandeurs caractéristiques, les approches directes de type Monte-Carlo se basent sur un échantillonnage discret de ξ , suivant $p(\xi)$, pour obtenir un ensemble de réalisations des efforts permettant un traitement statistique. Par essence, ces méthodes ne cherchent pas à reconstruire la dépendance fonctionnelle de l'effort vis à vis de ξ , mais estiment la statistique à partir d'observations (les réalisations). Il en découle une convergence lente des statistiques avec le nombre d'échantillons analysés, ce qui rend ces approches prohibitives quand le modèle est coûteux à résoudre.

A l'inverse, les développements en polynômes de chaos visent explicitement à approcher la dépendance fonctionnelle sur un espace de polynômes orthogonaux. Ainsi on aura par exemple pour la force propulsive :

$$F_{lift}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\xi) (F_{lift})_n. \quad (1)$$

Dans cette expression, $\Psi_n(\xi)$ est un polynôme de degré n et les $(F_{lift})_n$ sont les coefficients du développement. La base polynomiale est orthogonale au sens moyen :

$$\langle \Psi_k \Psi_l \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(\xi) \Psi_l(\xi) p(\xi) d\xi = \delta_{kl} \langle \Psi_k^2 \rangle. \quad (2)$$

Les polynômes sont donc entièrement déterminés (à une constante multiplicative près) par la données de $p(\xi)$. Si ξ est une variable normale (moyenne nulle, variance unitaire) nous obtenons pour les Ψ_n les polynômes d'Hermite :

$$\Psi_0 = 1, \quad \Psi_1 = \xi, \quad \Psi_2 = \xi^2 - 1, \dots$$

On remarquera de plus que :

$$\langle F_{lift} \Psi_k \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\xi) (F_{lift})_n \Psi_k \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{lift})_n \langle \Psi_n(\xi) \Psi_k \rangle = (F_{lift})_k \langle \Psi_k(\xi)^2 \rangle. \quad (3)$$

Si on prend pour convention $\Psi_0 = 1$, on voit immédiatement que l'espérance mathématique de F_{lift} est donné par $(F_{lift})_0$, alors que la variance a pour expression :

$$\begin{aligned} \delta^2(F_{lift}) &\equiv \langle ((F_{lift}) - (F_{lift})_0)^2 \rangle = \langle ((F_{lift})_0 - F_{lift}(\xi))^2 \rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} (F_{lift})_n \Psi_n(\xi) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} (F_{lift})_n \Psi_n(\xi) \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} (F_{lift})_l \Psi_l(\xi) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (F_{lift})_n (F_{lift})_l \langle \Psi_n \Psi_l \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{lift})_n^2 \langle \Psi_n^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Cette dernière expression montre que le développement sera fini pour toute quantité aléatoire du second ordre (de variance finie). Dans la pratique, le développement est tronqué à un ordre polynomial choisi *a priori*, qui devra être assez grand pour retenir l'essentiel de la variance. Pour un ordre donné, la précision du développement est conditionnée par le choix de la base qui est prescrite par $p(\xi)$.

Dans le cas général, la paramétrisation des conditions de navigation fait intervenir N variables aléatoires indépendantes pouvant représenter plusieurs sources d'incertitudes de nature différente (par exemple les amplitudes de roulis dû à la houle superposé à un mouvement de lacet incertain dû au barreur). Ces paramètres sont regroupés dans le vecteur aléatoire $\underline{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ ayant une densité de probabilité $p(\underline{\xi}) = \prod_{i=1}^N p_i(\xi_i)$. La base polynomiale de projection $\{\Psi_0(\underline{\xi}), \Psi_1(\underline{\xi}), \dots\}$ est construite par produit tensoriel des N bases unidimensionnelles correspondant aux mesures $p_i(\xi_i)$. Pour une troncature à un ordre No , la base contient $P + 1 = (N + No)! / (N! No!)$ polynômes. Dans la suite, la dérivation du modèle est présentée dans le cas d'un unique paramètre $N = 1$, mais la méthodologie est facilement étendue au cas $N > 1$. Un exemple de simulation avec $N = 4$ est donné dans la section 5.

3 Formulation du problème

Pour simuler l'écoulement sur la voile, nous utilisons une modélisation combinant surface portante et sillage tourbillonnaire [3], [1]. Notant \mathcal{S} la surface de la voile, \mathcal{W} le domaine

occupé par le sillage, nous obtenons les équations :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} \sigma(\underline{\mathbf{x}}', t, \xi) \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'|^2} d\underline{\mathbf{x}}' + \int_{\mathcal{W}} \frac{\omega(\underline{\chi}, t; \xi)}{2\pi} \wedge \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\chi}(t; \xi)}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\chi}(t; \xi)|^2} d\underline{\chi} + \underline{\mathbf{u}}_{\infty}(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi)$$

où σ est solution de l'équation intégrale de frontière :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{S},$$

alors que la coordonnée lagrangienne du sillage $\underline{\chi}(t; \xi)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d\underline{\chi}}{dt} = \underline{\mathbf{u}}(\underline{\chi}, t; \xi) \quad \forall \underline{\chi} \in \mathcal{W}.$$

Dans ces équations, la dépendance avec la variable ξ des différentes quantités intervenant est explicitement écrite. Chacune de ces quantités admet donc un développement en polynômes de chaos que l'on tronque à l'ordre P . Par exemple, le champ de vitesse a pour développement :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi) = \sum_{n=0}^P \Psi_n(\xi) \underline{\mathbf{u}}_n(\underline{\mathbf{x}}, t).$$

Pour obtenir les équations sur les coefficients (ou modes stochastiques) des développements, on procède selon une projection de Galerkin. Dans un premier temps, les développements tronqués sont introduits dans les équations du problème. On demande alors que les résidus de ces équations soient orthogonaux à la base de projection. Cela revient à multiplier toutes les équations par Ψ_k , puis à évaluer les espérances. Par exemple, l'application de ce traitement à l'équation différentielle sur la coordonnée lagrangienne du sillage donne :

$$\frac{d\underline{\chi}(\xi)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^P \Psi_n(\xi) \underline{\chi}_n = \sum_{n=0}^P \Psi_n(\xi) \frac{d\underline{\chi}_n}{dt} = \underline{\mathbf{u}}(\underline{\chi}, t; \xi) = \sum_{l=0}^P \Psi_l(\xi) \underline{\mathbf{u}}_l(\underline{\chi}, t). \quad (5)$$

Après multiplication par Ψ_k et en prenant l'espérance mathématique on obtient finalement

$$\frac{d\underline{\chi}_k}{dt} = \underline{\mathbf{u}}_k(\underline{\chi}, t), \quad (6)$$

qui montre que le mode k des coordonnées lagrangiennes des particules du sillage évolue suivant les caractéristiques du k -ème mode du champ de vitesse. Un traitement identique pour la condition de glissement sur la voile donne

$$\underline{\mathbf{u}}_k(\underline{\mathbf{x}}, t) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}, \quad (7)$$

qui indique que chaque mode de vitesse satisfait indépendamment à la condition.

Comparativement au problème déterministe (cas de conditions certaines), la difficulté principale du problème vient de la relation intégrale définissant $\underline{\mathbf{u}}$, car elle fait intervenir des noyaux non-linéaires, qui à présent portent sur des positions stochastiques. Il faut donc dériver les nouvelles relations intégrales pour les modes stochastiques des vitesses,

puis proposer une technique numérique adaptée pour l'évaluation de ces modes $\underline{\mathbf{u}}_n(\underline{\mathbf{x}}, t)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n^2 \rangle \underline{\mathbf{u}}_n(\underline{\mathbf{x}}, t) &= \left\langle \frac{\Psi_n}{2\pi} \int_S \sigma(\underline{\mathbf{x}}', t, \xi) \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'|^2} d\underline{\mathbf{x}}' \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\Psi_n}{2\pi} \int_W \underline{\omega}(\underline{\chi}(t; \xi), t; \xi) \wedge \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\chi}(t; \xi)}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\chi}(t; \xi)|^2} d\underline{\chi} \right\rangle + \langle \underline{\mathbf{u}}_\infty(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi) \Psi_n \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Pour évaluer ces modes du champ de vitesse, nous suivons ici la méthode proposée dans Atzori [6]. Nous détaillons cette méthode qui distingue les trois contributions du champ total : le champ non perturbé $\underline{\mathbf{u}}_\infty$, la perturbation $\underline{\mathbf{u}}_\sigma$ induite par la voile et $\underline{\mathbf{u}}_\omega$ la perturbation du sillage.

Pour notre problème, le champ incident ne dépend pas de la solution et contient l'information statistique sur les conditions de l'écoulement. Son développement polynomial est donc explicitement donné par la paramétrisation choisie qui fixe implicitement $\underline{\mathbf{u}}_\infty(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi)$. Dans les exemples présentés, le champ incident est uniforme en espace et les coefficients $(\underline{\mathbf{u}}_\infty)_n(t)$ du développement sont calculés analytiquement en appliquant la définition de la projection :

$$(\underline{\mathbf{u}}_\infty)_n(t) \equiv \frac{1}{\langle \Psi_n^2 \rangle} \langle \underline{\mathbf{u}}_\infty(t; \xi) \Psi_n(\xi) \rangle.$$

On s'intéresse maintenant à la perturbation induite par la voile. La géométrie de la voile est certaine, ce qui implique que la variance de $\underline{\mathbf{x}}'$ est nulle et son développement ne contient que le terme d'ordre 0. Deux situations se présentent selon que cette contribution est évaluée en une position certaine (par exemple pour un point de la voile) ou pour un point dont la position est aussi fonction de ξ (par exemple en un point lagrangien du sillage). Dans le premier cas, seul σ est stochastique alors que le noyau $(\underline{\mathbf{x}}' - \underline{\mathbf{x}})/|\underline{\mathbf{x}}' - \underline{\mathbf{x}}|^2$ est, lui, déterministe. La contribution de la voile est donc donnée par la superposition des contributions pour chaque mode stochastique de σ :

$$(\underline{\mathbf{u}}_\sigma)_n(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_n(\underline{\mathbf{x}}', t) \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'|^2} d\underline{\mathbf{x}}' \quad (9)$$

A l'inverse, dans le cas où le point d'observation est stochastique, et donné par un développement en polynômes, le noyau n'est plus déterministe et il faut calculer ses modes. Nous remarquons que ce noyau a une forme très proche de celui de la contribution du sillage. La technique décrite pour cette dernière contribution est alors appliquée.

A un instant t donné, la contribution du sillage discrétisé en particules est de la forme

$$\underline{\mathbf{u}}_\omega(\underline{\mathbf{x}}, t; \xi) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_p \underline{\Omega}^p(\xi) \wedge \frac{\underline{\mathbf{x}}(\xi) - \underline{\chi}^p(\xi)}{|\underline{\mathbf{x}}(\xi) - \underline{\chi}^p(\xi)|^2} = \sum_{k=0}^P \Psi_k(\xi) (\underline{\mathbf{u}}_\omega)_k(\underline{\mathbf{x}}, t), \quad (10)$$

où $\underline{\chi}^p$ et $\underline{\Omega}^p$ sont les positions et circulations des particules approchant le sillage. Pour évaluer les contributions individuelles de chaque particule, on procède par étapes. Tout d'abord, on construit une représentation du terme carré que nous notons de façon générique : $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ où $\Delta \underline{\mathbf{x}} = (\Delta x, \Delta y)$ est un vecteur représentant indifféremment

$(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}')$ ou $(\underline{\mathbf{x}} - \chi^p(\xi))$ et dont il est facile de construire une représentation spectrale. Nous avons :

$$r_k^2 \langle \Psi_k^2 \rangle = \left\langle \left[\left(\sum_{l=0}^P \Delta x_l \Psi_l \right) \left(\sum_{m=0}^P \Delta x_m \Psi_m \right) + \left(\sum_{l=0}^P \Delta y_l \Psi_l \right) \left(\sum_{m=0}^P \Delta y_m \Psi_m \right) \right] \Psi_k \right\rangle,$$

$$r_k^2 = \sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^P (\Delta x_l \Delta x_m + \Delta y_l \Delta y_m) \frac{\langle \Psi_l \Psi_m \Psi_k \rangle}{\langle \Psi_k^2 \rangle} = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N (\Delta x_l \Delta x_m + \Delta y_l \Delta y_m) M_{klm}.$$

Nous voulons maintenant une représentation de l'inverse de $r^2(\xi) = \sum r_k^2 \Psi_k$. Par définition, le produit de r^2 avec son inverse est égale à 1 avec une probabilité unitaire. Il vient alors :

$$r^2 \frac{1}{r^2} = \sum_{k=0}^P \Psi_k \left[\sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^P M_{klm} \left(\frac{1}{r^2} \right)_l r_m^2 \right] = \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P \Psi_k A_{kl} \left(\frac{1}{r^2} \right)_l = 1 = \Psi_0$$

En identifiant terme à terme (pour chaque k), on obtient un système d'équations pour les modes $(1/r^2)_l$ de l'inverse de r^2 . En réunissant l'ensemble de ces éléments, nous pouvons enfin écrire le champ des vitesses sous la forme d'un produit triple. Il en résulte que le k -ème mode du champ de vitesse induite par le sillage a pour expression :

$$(\underline{\mathbf{u}}_\omega)_k(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_p \sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^P \sum_{n=0}^P T_{klmn} \underline{\Omega}_l^p \wedge \Delta \underline{\mathbf{x}}_m^p \left(\frac{1}{2\pi r^2} \right)_n, \quad T_{klmn} = \frac{\langle \Psi_k \Psi_l \Psi_m \Psi_n \rangle}{\langle \Psi_k^2 \rangle}.$$

On remarquera que ce calcul est en fait une méthode pseudo-spectrale du terme non-linéaire. Il introduit une erreur inhérente au fait que si les projections intermédiaires effectuées à chaque étape sont exactes, elles sont toutes tronquées à l'ordre P . La contribution des termes d'ordre supérieur est donc perdue au cours des différentes étapes. D'autre part, les tenseurs de produit double et triple, M_{klm} et T_{klmn} , ne dépendent pas de la solution et sont calculés une fois pour toute en début de simulation. Du fait de la structure de la base, beaucoup des éléments de ces tenseurs sont nuls ce qui conduit à un nombre d'opérations beaucoup plus faible que ne le suggère les sommations double et triple.

4 Résolution numérique

La technique de résolution en temps suit point à point l'algorithme utilisé dans [3], mais étendu au cas stochastique. Pour résoudre les équations du problème, nous utilisons une discrétisation de \mathcal{S} par un ensemble de segments \mathcal{S}_i et une représentation surfacique de doublet constante sur chacun de ces segments d'une part, un ensemble de particules tourbillonnaires discrétisant le sillage \mathcal{W} d'autre part. Ces deux représentations sont connectées par une condition de Joukovski discrète, écrite au bord de fuite du profil, et permettant de définir à chaque pas de temps les caractéristiques d'une nouvelle particule tourbillonnaire émise dans le sillage. Notons que cette construction recouvre en réalité un choix et une hypothèse restrictive sur le type d'écoulement représentable. En particulier,

nous supposons ainsi que l'écoulement sur la voile reste attaché ce qui suppose que sa forme a été adaptée aux conditions rencontrées. Cette hypothèse est évidemment plus difficile à vérifier dans le cas de conditions de navigation instationnaires et impose au moins une limitation de l'amplitude des mouvements du bateau et de la turbulence du vent incident. Pour fixer les idées, considérons le cas où le vent apparent sur la voile se compose du vent incident, de la vitesse d'avance du bateau et d'une composante orthogonale à celle-ci représentant l'effet du roulis. Pour simplifier, nous supposons que le vent apparent peut être représenté par la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}_{\infty}(t) = (u_{\infty}, A(\xi) \sin(2\pi ft))$$

où l'amplitude de la composante normale est une quantité incertaine. En notant A_0 l'espérance et $(A_1)^2$ la variance de l'amplitude, il est possible de paramétrer $A(\xi)$ selon :

$$A(\xi) = A_0 + A_1\xi = A_0\Psi_0(\xi) + A_1\Psi_1(\xi), \quad p(\xi) = \frac{\exp[-\xi^2/2]}{\sqrt{2\pi}}.$$

La mesure étant gaussienne, la base polynomiale est constituée des polynômes d'Hermite. Le champ incident a donc pour développement :

$$\underline{\mathbf{u}}_{\infty}(t, \xi) = (u_{\infty}, A_0 \sin(2\pi ft))\Psi_0(\xi) + (0, A_1 \sin(2\pi ft))\Psi_1(\xi).$$

Le traitement appliqué lors d'une itération en temps se décompose en une étape de calcul pour la distribution de singularité sur la voile σ , le sillage étant figé. Il faut alors trouver les modes σ_k tels que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} \sigma_n(\underline{\mathbf{x}}', t) \frac{\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}')}{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'|^2} d\underline{\mathbf{x}}' = -\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot (\underline{\mathbf{u}}_{\infty}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{u}}_{\omega}(\underline{\mathbf{x}}, t))_n, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}.$$

Il est à souligner que l'opérateur à résoudre (la matrice d'influence sur la voile) est identique pour tous les modes, il n'a donc à être inversé qu'une seule fois. La solution étant obtenue, ainsi que les caractéristiques de la particule émise (modes stochastiques de sa circulation et de sa position initiale), la convection des particules est réalisée selon un schéma R-K d'ordre 3 en temps, en approchant :

$$\frac{d(\underline{\chi}^p)_n}{dt} = \underline{\mathbf{u}}_n(\underline{\chi}^p, t), \quad n = 0, \dots, P, \quad p = 1, 2, \dots$$

Durant cette étape de convection, la distribution de singularités sur la voile reste figée. On voit immédiatement que le temps de calcul pour le modèle stochastique, relativement au cas déterministe ($P = 0$), sera donné par le coût de l'évaluation de la vitesse spectrale relativement à celui du noyau déterministe. Ce rapport augmente rapidement avec P , principalement en raison de l'augmentation du nombre d'opérations élémentaires dans les produits spectraux (double et triple) ainsi que pour l'opération d'inversion. Dans le cas multidimensionnel $N > 1$, P augmente très rapidement avec l'ordre du développement ce qui limite en pratique l'ordre du calcul. Heureusement, si les non-linéarités ne sont pas trop fortes, la convergence en ordre est spectrale et l'ordre 2 ou 3 est suffisant pour une estimation des premiers moments avec précision.

5 Exemple pour une voile isolée

La figure 1 présente un résultat de calcul, pour la loi précédente $\mathbf{u}_\infty(t, \xi)$ avec une période réduite de la perturbation $T = C/u_\infty f = 3$ (avec C la longueur de corde de la voile), et une amplitude gaussienne de moyenne $A_0/C = 0.2$ et d'écart type $0.1A_0$ (10% de la moyenne). La figure montre la voile ainsi que le sillage moyen en lignes continues ; des barres d'incertitude s'étendant sur trois écarts type, de part et d'autre de la position moyenne de chaque particule, illustrent la variabilité de la solution. Le calcul est ici effectué pour un développement polynomial d'ordre 4. Une fois l'écoulement résolu, il est facile d'évaluer différents observables demandés pour l'analyse de la performance. En particulier, les efforts aérodynamiques sont calculés en appliquant une approche pseudo-spectrale identique à celle utilisée pour le calcul des vitesses. A titre d'exemple, on présente sur la figure 2 les efforts de portance et de traînée normalisés, pour le cas de la figure 1. De nouveau, des barres d'incertitude sont utilisées pour représenter graphiquement la variabilité de l'effort autour des valeurs moyennes.

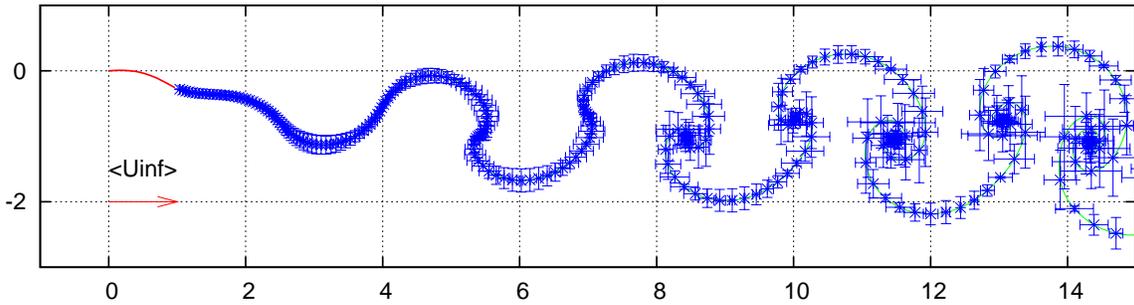


FIG. 1 – Exemple de solution pour une amplitude de perturbation stochastique. On a tracé la voile et le sillage moyen, ainsi que des barres d'incertitude sur la position des particules discrétisant le sillage.

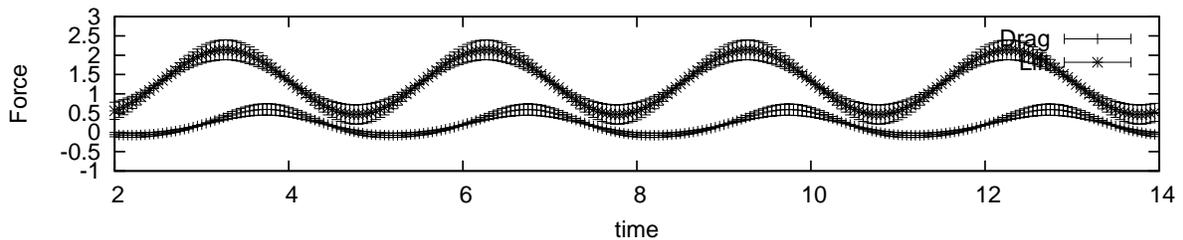


FIG. 2 – Exemple de calcul d'efforts pour une amplitude de perturbation stochastique. On a tracé la portance et la traînée normalisée, avec des barres d'incertitude contenant 95% des réalisations.

Cet exemple peut laisser à penser que la méthode ne fournit qu'une estimation des moyennes et des variances pour des distributions statistiques simples (gaussiennes), alors que l'information contenue dans le format spectral est en fait beaucoup plus riche. Par exemple, l'amplitude de la perturbation précédemment définie suit une distribution gaussienne, ce qui contredit le fait qu'une amplitude est une quantité positive. Si A_1/A_0 est grand, alors la probabilité $P(A(\xi) < 0)$ devient significative, et la paramétrisation gaus-

sienne est incorrecte. Dans ce cas, une distribution de type log-normale semble plus réaliste. Notons maintenant M_A la valeur médiane de $A(\xi)$ définie par $P(A(\xi) \leq M_A) = 0.5$, et $V \geq 1$ le coefficient de variabilité tel que $P(A(\xi) \in R = [M_A/V, M_A V]) = 0.95$ (95% des réalisations de $A(\xi)$ sont dans l'intervalle R). Il est alors possible de paramétrer $A(\xi)$ avec ξ suivant une distribution gaussienne selon :

$$A(\xi) = \exp(\mu_A + \sigma_A \xi) \approx \exp(\mu_A + \sigma_A^2/2) \sum_{n=0}^P \frac{\sigma_A^n \Psi_n(\xi)}{\langle \Psi_n \Psi_n \rangle}, \quad \mu_A = \log M_A, \quad \sigma_A = (\log V)/2.95.$$

Pour illustrer l'information statistique contenue dans la solution spectrale, on prend $M_A = 0.1$ et $V = 3$ et le calcul est réalisé pour un développement à l'ordre 4. On cherche alors la densité de probabilité de l'effort de portance lorsque la perturbation de vitesse passe par son maximum ou minimum. Comme le problème n'est pas symétrique, on obtient deux distributions selon que la vitesse est positive ou négative (mouvement de roulis vers tribord ou bâbord). Ces deux densités de probabilité sont tracées dans la figure 3. On observe un comportement des queues des distributions différents reflétant la dissymétrie de la loi log-normale. Ces densités peuvent être obtenues par échantillonnage (en tirant des valeurs de ξ selon une loi normale), ou même sous une forme analytique dans le cas d'un développement monotone. De façon identique d'autres types de distributions complexes peuvent être paramétrés, mais il est aussi possible de changer la mesure $p(\xi)$. Cependant la convergence spectrale n'est garantie que pour certaines mesures.

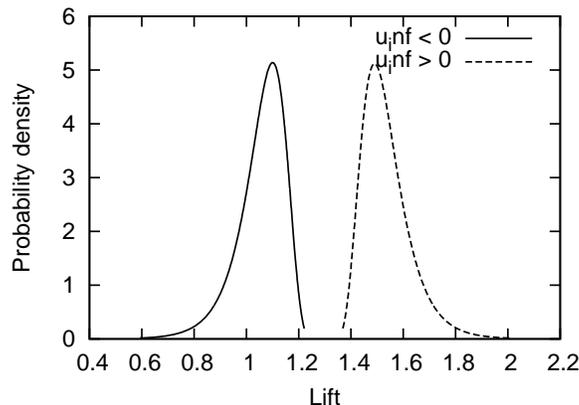


FIG. 3 – Exemple de densités de probabilité de l'effort de portance observées quand la valeur absolue de la perturbation de vitesse est maximale. L'incertitude sur l'amplitude $A(\xi)$ de la perturbation suit une distribution log-normale.

L'exemple suivant illustre la capacité de la méthode à traiter des situations complexes par un paramétrage avec N variables aléatoires. Supposons que l'on souhaite étudier les performances de la voile dans un vent oscillant (du fait de la turbulence atmosphérique) et de mouvements de lacet du bateau dû au barreur qui suit ces oscillations. Le problème n'est pas déterministe puisque ni les évolutions du vent, ni la réponse du barreur ne sont prévisibles. Cette situation peut être approchée dans le repère attaché au voilier, en considérant de nouveau un écoulement incident certain (angle de vent apparent moyen) et une perturbation normale stochastique (représentant la déviation à l'angle moyen). On considérera que cette perturbation normale est un processus stationnaire gaussien,

correspondant à un bruit blanc tronqué à la période minimale T_{min} (pas de variation de la vitesse normale à une fréquence $> 1/T_{min}$). Ce processus peut se paramétrer selon :

$$v_{\infty}(t; \underline{\xi}) = \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} v_n(t, T_{min}) \xi_n, \quad p_i(\xi_i) = \frac{\exp[-\xi_i^2/2]}{\sqrt{2\pi}}.$$

Les fonctions $v_n(t, T_{min})$ sont des fonctions analytiques connues pour ce type de bruits (spheroidal wave functions), et le développement est rapidement convergent si T_{min} est grand ou de l'ordre du temps à simuler. Pour le calcul présenté, on prend $T_{min} u_{\infty} / C = 10$ et l'on fait la simulation sur un temps réduit de 15 unités. Les 5 premiers termes du développement de $v(t; \underline{\xi})$ contiennent 98% de la variance théorique. Le développement est donc réalisé avec $N = 5$, pour un ordre $No = 2$ et donc $P + 1 = 21$ termes dans le développement en polynômes. Le calcul est effectué pour un écart type de la vitesse égale à 5% de u_{∞} : la déviation de l'angle de vent apparent est dans un intervalle de ± 9 degrés 95 % du temps. La figure 4 présente dans le repère relatif le sillage moyen et ces barres d'incertitudes (± 3 écarts type) -en haut-, ainsi que des reconstructions de $\chi(\xi)$ à partir de son développement polynomial pour 10 vecteurs aléatoires $\underline{\xi}$ choisis selon $p(\underline{\xi})$ -en bas-. Il faut souligner que le problème étant statistiquement stationnaire, si le développement spectral des efforts évolue dans le temps, son contenu statistique (moyenne, moments, densité de probabilité, ...) devient stationnaire après un court transitoire.

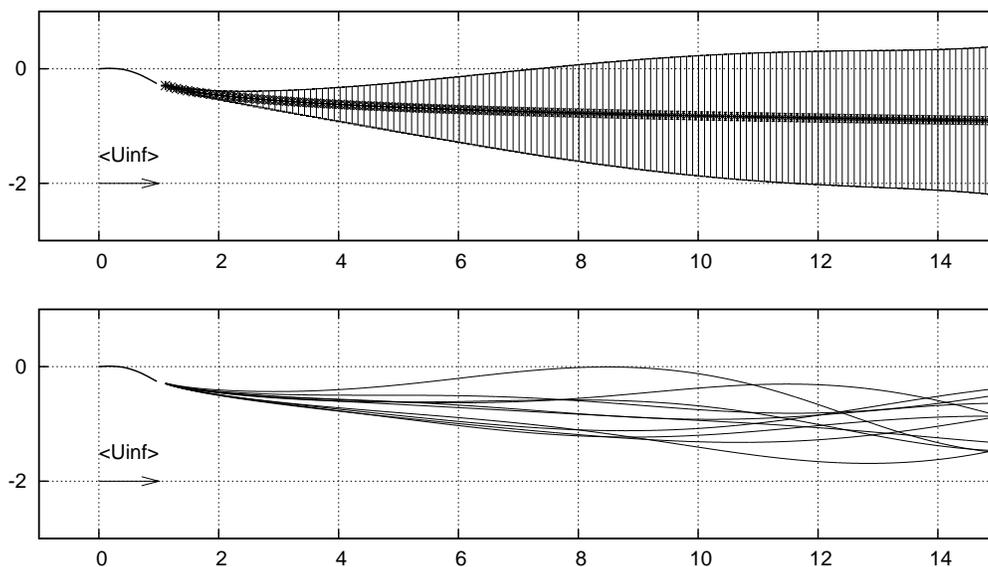


FIG. 4 – Représentation du sillage stochastique à l'aide de barres d'incertitude -en haut-, et reconstruction polynomiale pour 10 réalisations aléatoirement sélectionnées -en bas-.

6 Application à la comparaison de deux voilures

Le modèle stochastique a été utilisé pour étudier le comportement d'un plan de voileure original dû à R. d'Hervé et J.Y. Hermanges. Il s'agit de deux voiles parallèles montées sur un balestron déformable dont le cintre permet d'ajuster le creux de chacune des voiles et,

dans une certaine mesure, leurs positions relatives (voir figure 5). Ce dispositif présente deux défauts *a priori*. D'une part il ne permet pas de contrôler le vrillage de la voile et peut être même interdit tout vrillage, d'autre part il repose sur une disposition proche de la configuration "biplan" dont on sait qu'elle n'est pas très efficace aérodynamiquement. Nous avons mené une étude approfondie du comportement de cette voilure pour des conditions instationnaires. Nous présentons ici quelques unes des conclusions obtenues par comparaison avec les performances d'une voilure classique constituée d'un foc et d'une grand-voile. Nous avons quantifié les performances relatives des deux types de voilures dans le cas de conditions constantes et certaines. L'angle d'incidence est fixé à 7 degrés sur chaque voile pour le modèle biplan. Enfin, une troisième voilure avec un simple balestron a également été testée. Dans ce dernier cas, la ligne joignant les bord d'attaque des voiles n'est plus confondue avec l'axe du bateau et peut être ajustée de manière à optimiser les performances de la voilures. Ce type de gréement est connu pour ses performances légèrement inférieures à celles d'un gréement classique ce qui est confirmé ici par nos calculs. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 1 :

TAB 1 : Comparaison entre différentes configurations de voilures au près

	Classique		Balestron		Gréement innovant	
	génois	gv*	génois	gv*	voile 1	voile 2
Ouverture (deg)	11.5	5	10.9	6.8	0.0	0.0
Portance	1.17670	0.636549	0.960406	0.573616	0.411868	0.382940
Coef. portance	2.35293	1.29411	1.90544	1.15067	0.823735	0.765881

Les mauvaises performances du gréement "biplan" s'expliquent par la faible distance (de l'ordre de 20 % de corde) entre les deux voiles. La possibilité d'utiliser des formes différentes pour les deux voiles ne permet malheureusement pas d'améliorer significativement cette situation.

Nous avons ensuite comparé les voilures classique et biplan dans des conditions variables en utilisant le modèle stochastique que nous venons de présenter. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 6. La variation moyenne de la composante normale de vitesse est également reporté en référence pour indiquer la phase dans ces graphiques. Il s'agit en fait, pour le problème plan de profil correspondant, d'un mouvement de pilonnement. On remarquera que la voilure classique continue à fournir une portance moyenne (d'amplitude) plus élevée que la voilure biplan, mais avec des variations temporelle beaucoup plus élevées (voir la courbe de gauche).

Ce résultat est particulièrement intéressant car la force de portance présentée ici contient la contribution la plus importante à la composante propulsive, mais également à la composante de gîte. Or, c'est le maximum de cette composante de gîte qui fixe la valeur de la surface de voilure que le bateau peut porter.

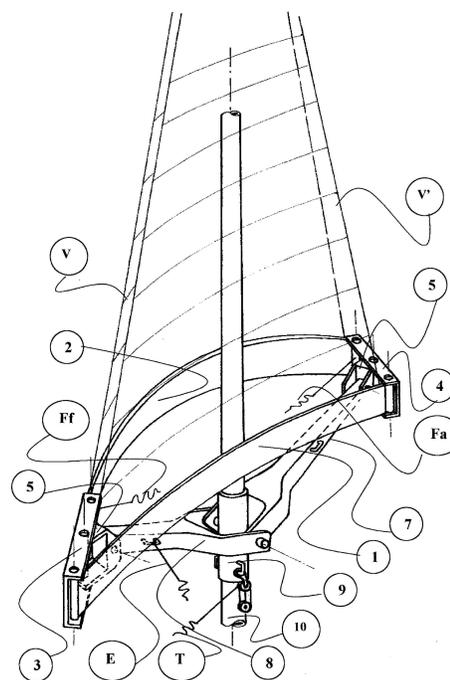


FIG. 5 : Configuration des voiles en "biplan". On remarquera le dispositif de réglage permettant de contrôler la cambrure et, dans une certaine mesure, d'obtenir pour chaque voile un profil différent.

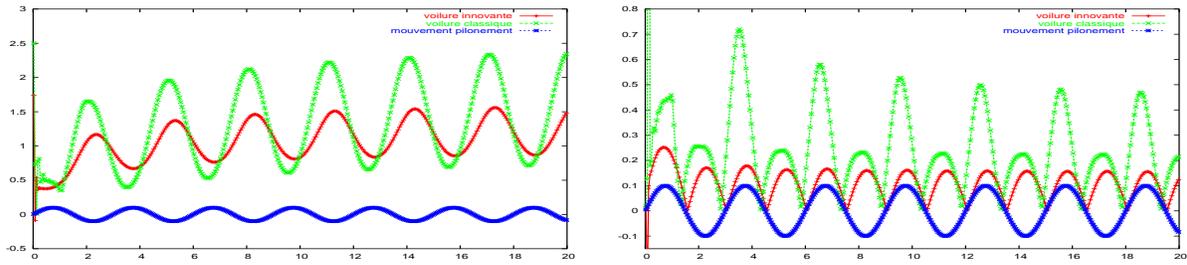


FIG. 6 – Comparaison des caractéristiques de portance au cours du temps : moyenne (à gauche) et écart type/moyenne -sensibilité- (à droite), pour la voilure biplan (rouge) et celle de la voilure classique (vert). La courbe bleue donne la phase de la perturbation.

Il en résulte que la voilure biplan pourrait, dans certaines situations, fournir une force propulsive plus importante, tout simplement parce que sa plus grande régularité de fonctionnement permet de porter une surface de voilure supérieure. Un dernier avantage de la voilure biplan pourrait être un minimum de force propulsive plus élevée, permettant de conserver au voilier une meilleure manœuvrabilité dans le creux des vagues. Les observations précédentes se retrouvent dans l'analyse des courbes de variance sur la portance (courbes de droite dans la figure 6). On observe que la voilure classique est beaucoup plus sensible aux incertitudes que la voilure biplan. Dans un vent fortement perturbé, la voilure "biplan" apporterait une poussée beaucoup plus régulière. L'origine de ce comportement peut être attribuée à l'interaction forte du sillage de la voile amont et de la voile aval dans le cas de la voilure classique. Ceci n'est évidemment pas le cas pour la voilure "biplan" dans laquelle les effets d'interactions sont réciproques, mais peu sensibles aux perturbations des sillages qui sont rapidement convectées en aval.

7 Conclusion

L'aide apportée par la modélisation numérique à la conception de voilier reste encore très limitée. En ce qui concerne la définition des voiles, l'une des principales difficultés est la trop grande simplification du problème généralement nécessaire à l'application des modèles numériques dont on dispose. La modélisation stochastique peut apporter une réponse à une partie du problème en permettant la prise en compte de la grande variabilité des conditions de fonctionnement d'une voilure de bateau. Dans le modèle que nous venons de présenter, nous nous sommes restreint à une composante normale stochastique de la vitesse incidente. Il faut toutefois remarquer que la formulation utilisée peut inclure d'autres types d'incertitudes. Bien qu'il en résulte une complexité grandissante des calculs, le coût en temps de calcul, pour peu que P reste modéré (jusqu'à une centaine de modes), reste très inférieur à celui d'une méthode d'analyse type Monte Carlo pour une précision donnée. Par ailleurs, l'application de notre modèle stochastique à l'étude d'une voilure "biplan" dans des conditions instationnaires et incertaines a permis de quantifier des effets qu'il aurait été difficile d'estimer *a priori*.

Références

- [1] Y. Roux, S. Huberson, F. Hauville, J.P. Boin, M. Guilbaud, M.Ba "Yacht performance prediction : Toward a numerical VPP" , High Performance Yacht Design Conference, Auckland, New Zeland, Dec 2002
- [2] R.G. Ghanem & P.D. Spanos : "Stochastic Finite Element : A Spectral Approach", Springer Verlag, 1991.
- [3] O.P. Le Maître, S.G. Huberson and E.J. Souza de Cursi "Unsteady model of sail and flow interaction", J. Fluids and Structures, 1998.
- [4] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm & R.G. Ghanem : "A stochastic projection method for fluid flow. I. Basic formulation." J. Comp Phys. **173**, pp 481-511, 2001.
- [5] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm & R.G. Ghanem : "A stochastic projection method for fluid flow. II. Random process." J. Comp Phys. **181**, pp 9-44, 2002.
- [6] J. Atzori : "Experimentation d'une méthode spectrale pour la quantification des efforts aérodynamiques sur un profil en oscillations incertaines" Rapport de Stage de Maîtrise, Université d'Orsay, LIMSI, 2003.