

10^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Nantes, 7, 8 et 9 mars 2005

DÉCOMPOSITION EN MODES RÉSONANTS POUR LE
PROBLEME TRANSITOIRE DE TENUE À LA MER

| Partie Numérique |

RESONANT STATES EXPANSION FOR THE TRANSIENT SEA-
KEEPING PROBLEM

| Numerical Part |

Christophe HAZARD*, **François LORET***

*Laboratoire POEMS. Unité Mixte de Recherche CNRS/ENSTA/INRIA 2706. Adresse : Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, UMA/POEMS, 32 Boulevard Victor, 75015 Paris, France (Christophe.Hazard@ensta.fr, Francois.Loret@ensta.fr).

Résumé

Cette communication constitue le second volet d'une étude présentée lors des 9^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique Navale. On aborde ici le traitement numérique de la simulation de la réponse transitoire du problème bidimensionnel de tenue à la mer d'une plaque élastique mince, à l'aide d'une méthode connue sous le nom Singularity Expansion Method. Cette méthode basée sur la notion de résonances consiste à calculer le comportement asymptotique en temps longs de la réponse, obtenu au moyen de la transformée de Laplace en considérant le prolongement analytique de la résolvante du système. Nous proposons une série de résultats numériques illustrant l'efficacité de la prédiction de la réponse par cette méthode.

Summary

This paper is constitute the second part of a study presented at 9^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique Navale. We discuss here the numerical implementation of an original approach for the simulation of the time-dependent response of a two-dimensional floating elastic plate using the so-called Singularity Expansion Method. This method based on the notion of resonances consists in computing an asymptotic behavior for large time obtained by means of Laplace transform using the analytic continuation of the resolvent of the problem. We illustrate the efficiency of this method with some numerical results.

1 Introduction

La présente communication constitue le volet numérique d'un précédent article [4] que nous avons présenté lors des 9^{ièmes} Journées de l'Hydrodynamique Navale. Notre étude porte sur une méthode originale de simulation numérique baptisée *Singularity Expansion Method (SEM)* qui offre une voie non exploitée jusqu'à maintenant de simulation de la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'application de cette méthode pour la simulation des mouvements bidimensionnels d'une plaque élastique mince (banquise, piste d'atterrissage flottante,...) flottant librement à la surface d'un fluide parfait incompressible dont les mouvements sont supposés irrotationnels. Nous notons $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y < 0\}$ le demi-plan occupé par le fluide au repos. Sa frontière est constituée de la surface libre F et de la plaque P telles que $F \cup P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 0\}$. Le problème de tenue à la mer linéarisé s'écrit alors quand les déflexions de la plaque sont décrites par le modèle de KIRCHHOFF-LOVE :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Phi + \eta = 0 \quad \text{sur } F, \\ -\Phi + \eta + \beta\partial_x^4\eta - \gamma\partial_y\Phi = 0 \quad \text{sur } P, \\ \partial_t^2\eta + \partial_y\Phi = 0 \quad \text{sur } F \cup P, \\ \\ \partial_x^2\eta = 0 = \partial_x^3\eta \quad \text{sur } \partial P, \\ + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

où Φ désigne le potentiel des accélérations (en fait son opposé), η l'élévation de la surface libre F et de la plaque P . Les constantes β et γ désignent respectivement la flexibilité et la masse linéique de la plaque.

La méthode que nous proposons repose sur la notion de résonances. Les premiers travaux sur le plan mathématique remontent à 1969 avec P. LAX et D. PHILIPPS [9] pour l'équation des ondes scalaire à l'extérieur d'un obstacle borné (d'autres auteurs ont par la suite poursuivi l'effort tel A. RAMM [12] et B. VAINBERG [14]). Citons également M. MEYLAN [11] qui a récemment mis en œuvre la SEM pour simuler les mouvements transitoires d'une plaque mince en eau peu profonde (modèle 1D). Sur le plan numérique, nous référons aux travaux de C. BAUM [2] en électromagnétisme.

Nous nous proposons dans ce papier de rappeler une approche abstraite générale de la méthode que nous appliquerons à notre problème de tenue à la mer. Notre objectif est d'étudier sur le plan numérique son efficacité (l'obtention d'estimations d'erreurs étant très délicate).

Tous les détails du mode d'application de la SEM ne figurent pas dans cet article. Le lecteur intéressé pourra consulter la précédente communication [4]. Un complément à ces deux articles se trouve dans la thèse de F. LORET [10] qui traite également de l'analyse 3D.

2 Le principe de la méthode

Nous reprenons la présentation faite par C. HAZARD [5] de la SEM sur le problème abstrait qui consiste à chercher $u(t)$, une distribution en temps causale ($u(t) = 0 \forall t < 0$) à valeurs dans un espace de HILBERT complexe \mathcal{H} , telle que

$$(2) \quad d_t^2 u + \mathcal{A}u = f \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où le second membre f prend en compte les conditions initiales comme suit $u(0) \otimes d_t \delta(t) + d_t u(0) \otimes \delta(t)$ avec δ la mesure de DIRAC. L'opérateur \mathcal{A} est supposé positif et auto-adjoint dans \mathcal{H} . Notre problème comme bien d'autres rentre dans ce cadre abstrait. Considérons la transformée de LAPLACE de $u(t)$ formellement définie par

$$u(t) \mapsto \hat{u}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt \quad \text{avec } s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 0.$$

En appliquant la transformée de LAPLACE à (2) nous obtenons

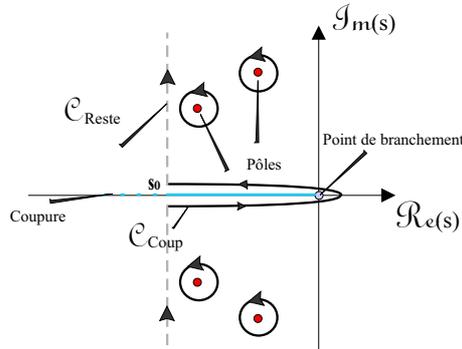
$$(s^2 + \mathcal{A})\hat{u} = \hat{f} \iff \hat{u}(s) = (\mathcal{A} + s^2)^{-1} \hat{f} =: \mathcal{R}(-s^2) \hat{f}.$$

La résolvante $\mathcal{R}(\zeta)$ est définie partout dans \mathbb{C} sauf sur le spectre de \mathcal{A} (contenu dans \mathbb{R}^+ ; et $-s^2 \notin \mathbb{R}^+$). La transformée de LAPLACE inverse nous donne alors la solution transitoire :

$$(3) \quad u(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{s_0 + i\mathbb{R}} e^{st} \mathcal{R}(-s^2) \hat{f} ds \quad \text{avec } s_0 > 0.$$

L'indépendance de cette expression vis-à-vis de $s_0 > 0$ est une conséquence de l'analyticité de $\mathcal{R}(\zeta)$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Déformons maintenant le chemin d'intégration $s_0 + i\mathbb{R}$ vers le demi-plan complexe de gauche ($s_0 < 0$), ce qui présuppose que savons exhiber le prolongement analytique de la résolvante au travers du spectre de \mathcal{A} . Dans notre situation, la résolvante se prolonge partout sauf en des points isolés : pôles du prolongement ou résonances et un point de branchement en $s = 0$ (auquel on associe une coupure : \mathbb{R}^-). Le théorème des résidus nous donne, en supposant que la déformation du chemin de BROMWICH n'a pas de contribution pour $|s| = \infty$:

$$(4) \quad u(t) = u_{\text{pôles}}(t) + u_{\text{coup}}(t) + u_{\text{reste}}(t)$$



$$\begin{aligned}
u_{\text{pôles}}(t) &:= \sum_{s_k \in \{\Re(s) > s_0\}} c_k(t) e^{s_k t}, \\
u_{\text{coup}}(t) &:= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_{\text{coup}}} e^{st} \mathcal{R}(-s^2) \hat{f}(s) ds, \\
u_{\text{reste}}(t) &:= \frac{1}{2i\pi} \int_{s_0 + i\mathbb{R}} e^{st} \mathcal{R}(-s^2) \hat{f}(s) ds = O(e^{s_0 t}) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

où $c_k(t) e^{s_k t}$ désigne le résidu de $e^{st} \mathcal{R}(-s^2) \hat{f}(s)$ associé au pôle s_k . Le terme $u_{\text{pôles}}$ représente une superposition discrète de modes oscillants exponentiellement amortis. Le terme u_{coup} est la contribution lentement décroissante. Le reste u_{reste} plus décroissant que chacun des termes de $u_{\text{pôles}}$ est négligé par la SEM.

3 La résolvante et son prolongement analytique

Nous avons vu que l'application de la SEM nécessite de savoir calculer la résolvante de notre problème, *i.e.* l'opérateur qui décrit la résolution des équations (5) obtenues en appliquant la transformée de LAPLACE à (1), et d'en exhiber le prolongement analytique :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{\Phi} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\hat{\Phi} + \hat{\eta} = 0 \quad \text{sur } F, \\ -\hat{\Phi} + \hat{\eta} + \beta \partial_x^4 \hat{\eta} - \gamma \partial_y \hat{\Phi} = 0 \quad \text{sur } P, \\ s^2 \hat{\eta} + \partial_y \hat{\Phi} = \hat{f} \quad \text{sur } F \cup P, \\ \partial_x^2 \hat{\eta} = 0 = \partial_x^3 \hat{\eta} \quad \text{sur } \partial P \end{array} \right.$$

où $\hat{f} := s\eta(0) + \partial_t \eta(0)$. Le prolongement analytique va découler de l'écriture d'une équation variationnelle de FREDHOLM équivalente à (5) et définie sur le domaine occupé par la plaque. Cette formulation sera également bien adaptée au traitement numérique.

Le procédé de reformulation du problème (5) posée en domaine borné repose sur la représentation intégrale de la transformée de LAPLACE de Φ :

$$\hat{\Phi} = s^2 G_s * (\hat{\Phi}|_{\tilde{F}} - \hat{\eta}) + G_s * \hat{f}$$

où $*$ note le produit de convolution sur $\tilde{F} := F \cup P$. La fonction de GREEN $G_s(X, X')$ du problème sans plaque, avec $X = (x, y)$ et $X' = (x', y') \in \Omega$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$, est définie par

$$\begin{aligned}
\Delta_X G_s(X, X') &= \delta(X - X') \quad \forall X \in \Omega, \\
\partial_y G_s(X, X') + s^2 G_s(X, X') &= 0 \quad \forall X \in \tilde{F}.
\end{aligned}$$

Cette fonction bien connue, voir [7], est donnée par

$$(6) \quad G_s(X, X') = ie^{-s^2 w} + \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{z - \bar{z}'}{z - z'} \right| + e^{-s^2 w} E_1(-s^2 w) + e^{-s^2 \bar{w}} E_1(-s^2 \bar{w}) \right]$$

où $z := x + iy$, $z' := x' + iy'$, $w := y + y' + i|x - x'|$ et E_1 note la fonction exponentielle intégrale (voir [1]). En considérant la condition dynamique sur la plaque et du fait que $\hat{\Phi}$ et $\hat{\eta}$ coïncident sur F , nous obtenons la formulation variationnelle suivante

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} = (\hat{\eta}, \hat{\psi}) \in H^2(P) \times L^2(P) =: \mathcal{H} \text{ tel que } \forall \mathbf{u}' = (\eta', \psi') \in \mathcal{H} \\ \int_P (\hat{\psi} + \hat{\eta} - s^2 G_s * \hat{\psi}) \bar{\psi}' + \int_P ((\gamma s^2 + 1)\hat{\eta} - \hat{\psi}) \bar{\eta}' + \beta \int_P \partial_x^2 \hat{\eta} \partial_x^2 \bar{\eta}' \\ = \int_P G_s * \hat{f} \bar{\psi}' + \gamma \int_P \hat{f} \bar{\eta}' \end{array} \right.$$

où $\hat{\psi} := \hat{\Phi}|_P - \hat{\eta}|_P$. Cette dernière diffère quelque peu de celle contenue dans le papier [4] mais est équivalente. Désormais, nous omettrons le symbole $\hat{}$ sur nos fonctions.

Le prolongement analytique de la résolvante est alors déduit de celui de la fonction de GREEN à l'aide du théorème de S. STEINBERG [13] : la résolvante se prolonge à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec un point de branchement à l'origine lié à la singularité logarithmique de la fonction de GREEN.

4 Mise en œuvre

La mise en œuvre de cette méthode repose sur le calcul d'une approximation numérique de la résolvante du système et sur le calcul d'une approximation des résonances que nous supposons d'ordre 1, des modes associés et des résidus. L'hypothèse simplificatrice de simplicité des résonances conduit notamment à ce que les coefficients c_k dans la définition de $u_{\text{pôles}}$ soient indépendants du temps. Après discrétisation de (7) par des éléments finis de LAGRANGE d'ordre 1 (fonctions chapeau) pour ψ et les modes de vibration libre $\{w_\nu\}$ de la plaque pour η (obtenus analytiquement après résolution d'une équation de dispersion), nous obtenons le système matriciel suivant en notant (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(P)$:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^h = (\eta^h, \psi^h) \text{ tel que} \\ \mathbb{M}(s)\mathbf{u}^h = \mathbb{L}(s) \\ \text{où } s \text{ est le paramètre de LAPLACE.} \end{array} \right.$$

avec $\mathbb{M}(s) = \mathbb{J} + \mathbb{K}(s)$

$$\mathbb{J} := \begin{bmatrix} \beta \left(\partial_x^2 w_\nu, \partial_x^2 w_\mu \right) + \left(w_\nu, w_\mu \right) & 0 \\ 0 & \left(w_j, w_i \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{L}(s) := \begin{bmatrix} \gamma(w_j, w_\mu) & 0 \\ 0 & (G_s * w_j, w_i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^h \\ \mathbf{f}^h \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{K}(s) := \begin{bmatrix} (\gamma s^2 - 1)(w_\nu, w_\mu) & -(w_j, w_\mu) \\ (w_\nu, w_i) & -s^2(G_s * w_j, w_i) \end{bmatrix}.$$

Tous les termes se calculent classiquement à l'aide d'une formule de quadrature numérique hormis les termes impliquant le noyau de GREEN qui s'avère singulier. Nous avons établi pour ces derniers une formule analytique d'extraction de la singularité inspirée de travaux de Marc LENOIR, voir [10]. La matrice \mathbb{J} est symétrique et définie positive et le vecteur \mathbf{f}^h note les coordonnées de f dans la base éléments finis.

Calcul des résonances Le calcul des résonances s'effectue en deux temps. Dans un premier temps, nous effectuons un pré-calcul des résonances. Pour cela, nous recherchons les zéros du déterminant $\det(\mathbb{M}(s))$. Cette recherche de zéros s'effectue à l'aide d'une méthode basée sur le théorème de ROUCHÉ qui permet dans une région donnée du plan complexe de frontière fermée \mathcal{C} d'avoir une estimation à la fois du nombre et de la position des résonances en évaluant les quantités

$$(8) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} s^k \frac{\det(\mathbb{M}(s))}{d_s \det(\mathbb{M}(s))} ds = \sum_{j=1}^n s_j^k =: \sigma_k.$$

Les s_j sont les zéros de $\det(\mathbb{M}(s))$ à l'intérieur de \mathcal{C} . Le calcul de σ_0 nous donne une estimation du nombre de résonances. L'identité de NEWTON (voir [3]) nous permet, de la connaissance des σ_k , de construire un polynôme dont les zéros sont les s_j . La recherche des zéros de ce polynôme est en général très mal conditionnée et nécessite de subdiviser la région initiale afin de considérer un nombre "suffisamment petit" de résonances. Cette méthode nécessite comme l'indique (8) de savoir calculer la dérivée logarithmique de $\det(\mathbb{M}(s))$. Nous utilisons dans ce but une technique basée sur la différentiation analytique de l'algorithme de factorisation LU (voir [8]) qui permet, de la connaissance des matrices $\mathbb{M}(s)$ et $d_s \mathbb{K}(s)$ (connue analytiquement), de calculer cette dérivée logarithmique sans jamais calculer ni $\det(\mathbb{M}(s))$, ni sa dérivée.

Dans un second temps, nous affinons nos pré-calculs de résonances en résolvant

le problème aux valeurs propres non linéaire

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0, \text{ telle que} \\ \lambda(s) = 0 \\ \text{soit une valeur propre de } \mathbb{M}(s). \end{array} \right.$$

Nous retenons pour cela, la méthode itérative de NEWTON-RAPHSON couplée à la méthode de la puissance inverse. La méthode de NEWTON-RAPHSON nous fournit la position des résonances avec une meilleure précision en cherchant le point fixe de $s - \lambda(s)/d_s\lambda(s)$. La méthode de la puissance inverse nous donne les modes résonants associés. La mise en œuvre de la méthode de NEWTON-RAPHSON nécessite en particulier de savoir calculer la dérivée $d_s\lambda$ de λ (que nous supposons simple). Le calcul de cette dérivée repose en fait sur celui de la dérivée de la fonction de GREEN que l'on connaît analytiquement. En effet, soit les vecteurs ϕ_d et ϕ_g tels que

$$\mathbb{K}(s)\phi_d = (-1 + \lambda(s))\mathbb{J}\phi_d \quad \text{et} \quad \mathbb{K}^*(s)\phi_g = (-1 + \bar{\lambda}(s))\mathbb{J}\phi_g.$$

Alors

$$d_s\lambda(s) = \frac{(d_s\mathbb{K}(s)\phi_d, \phi_g)_{\mathbb{C}}}{(\mathbb{J}\phi_d, \phi_g)_{\mathbb{C}}}$$

où $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ note le produit scalaire hermitien.

Calcul des résidus Le calcul des résidus repose sur l'application de la théorie de perturbation décrite dans le livre de KATO [6] qui nous permet d'obtenir une expression explicite de ces derniers que nous rappelons. Supposons que s_o est une fréquence de résonance. Le résidu de (η^h, ψ^h) associé à s_o s'écrit

$$\frac{(\mathbb{L}(s_o), \Upsilon)_{\mathbb{C}}}{(d_s\mathbb{K}(s_o)\Xi, \Upsilon)_{\mathbb{C}}} \Xi$$

où les vecteurs Ξ et Υ satisfont

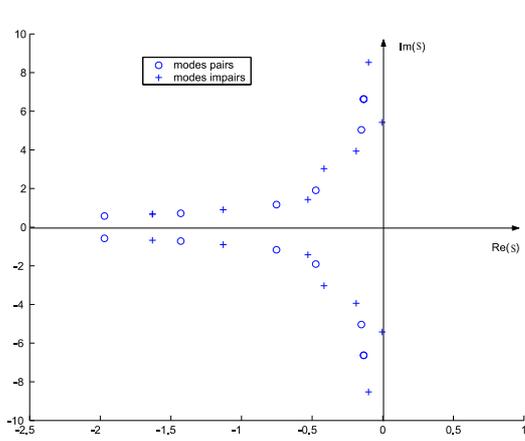
$$\mathbb{K}(s_o)\Xi = -\mathbb{J}\Xi \quad \text{et} \quad \mathbb{K}^*(s_o)\Upsilon = -\mathbb{J}\Upsilon \quad \text{tel que} \quad (\mathbb{J}\Xi, \Upsilon)_{\mathbb{C}} = 1.$$

4.1 Résultats numériques

Nous proposons quelques résultats des tests numériques que nous a fournis la mise en œuvre de la méthode de décomposition en modes résonants. Nous imposons pour cela un type de structure élastique en fixant les constantes de flexibilité, $\beta = 0.0032$, et de masse linéique, $\gamma = 0.02$. Ces valeurs numériques correspondent à des valeurs typiques pour les pistes d'atterrissage flottantes. Enfin, la plaque occupe l'intervalle $[-1, +1]$. Nous avons choisi d'imposer dans un premier temps (premier test) une déformation initiale de la surface libre, $\exp(-3(x - 2.5)^2)$, et une vitesse initiale

nulle. Dans un second temps (deuxième test) nous considérons une déformation initiale de la surface libre, $\cos(\omega x) \exp(-3(x - 2.5)^2)$ avec $\omega = 0.71939$ (il s'agit de la partie imaginaire d'une des résonances), et une vitesse initiale nulle. Nous avons ici choisi des données basse fréquence pour le premier test et moyenne fréquence pour le second (voir [10]).

Préliminaires Nous représentons à la figure 1 la répartition dans le plan complexe des résonances numériques que nous avons obtenues, accompagnée d'un tableau de valeurs. Notre méthode de pré-calcul des résonances s'est avérée délicate à mettre en œuvre pour obtenir des résonances plus hautes fréquences à cause notamment de contraintes numériques imposant une discrétisation éléments finis suffisamment fine. Cette contrainte impose la manipulation de matrices complexes quasi-pleines de taille importante.



Partie réelle	Partie imaginaire
-1.97013	± 0.57661
-1.63017	± 0.67725
-1.42960	± 0.71939
-1.12970	± 0.90598
-0.75226	± 1.17063
-0.52950	± 1.42717
-0.47359	± 1.90782
-0.41570	± 3.02755
-0.18777	± 3.93866
-0.15117	± 5.03931
-0.00361	± 5.42444
-0.13497	± 6.62686
-0.10006	± 8.52498

Figure 1: Répartition des pôles.

Nous présentons sur les figures 2 à 4, à la fois les parties réelle et imaginaire de l'élévation de la plaque en trait gras et le potentiel des accélérations (en fait son opposé) en trait fin. Nous rappelons qu'à l'extérieur de la plaque, le potentiel des accélérations coïncide avec l'élévation de la surface libre.

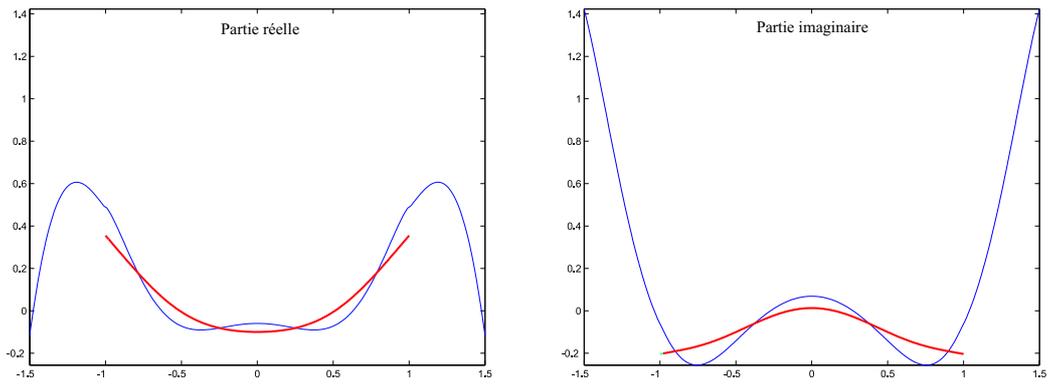


Figure 2: Mode résonant associé à $-1.97013 + 0.57661i$.

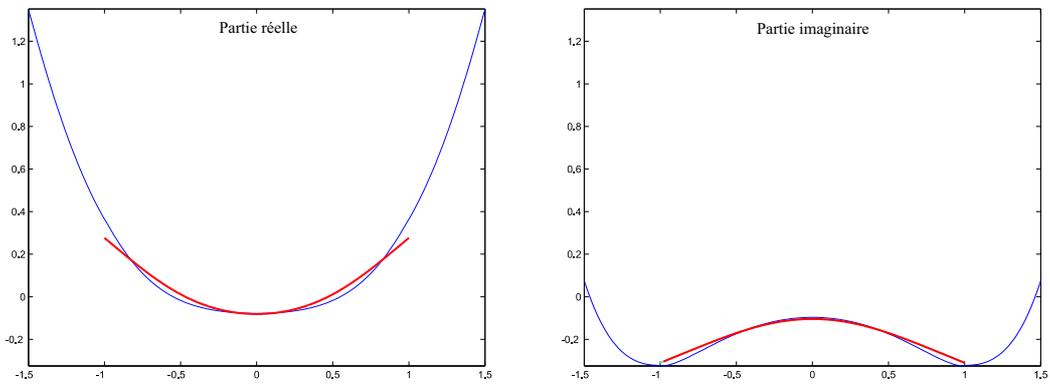


Figure 3: Mode résonant associé à $-1.42960 + 0.71939i$.

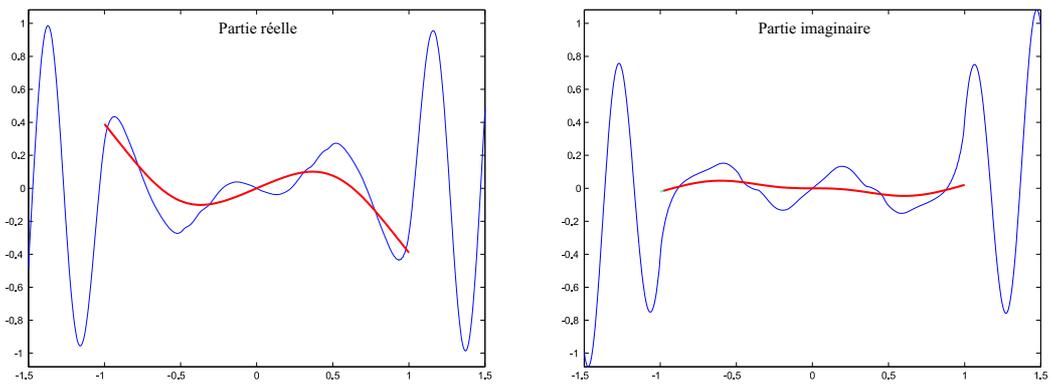


Figure 4: Mode résonant associé à $-0.18777 + 3.93866i$.

Premier test Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode nous représentons, figure 5, l'erreur relative :

$$\text{Err}(t) := \frac{\|\eta_{\text{ref}}^h(t) - \eta_{\text{pôles}}^h(t) - \eta_{\text{coup}}^h(t)\|_{P,h}}{\|\eta_{\text{ref}}^h(t)\|_{P,h}} \quad \text{où} \quad \|v\|_{P,h}^2 := \sum_{\nu} \lambda_{\nu} (v, w_{\nu})^2,$$

λ_{ν} note la valeur propre associée à w_{ν} , les termes $\eta_{\text{pôles}}^h$ and η_{coup}^h désignent respectivement les approximations numériques de $\eta_{\text{pôles}}$ and η_{coup} . Le terme η_{ref}^h est une approximation numérique de la solution obtenue par transformée de LAPLACE, en utilisant la formule (3) avec $s_0 = 0.2$, que nous considérons comme solution de référence. La figure 5 montre que le terme η_{reste}^h est négligeable et que la *SEM* fournit un bon résultat, autour de 4% d'erreur, après le temps T_o nécessaire au front d'onde de l'onde incidente pour traverser toute la plaque.

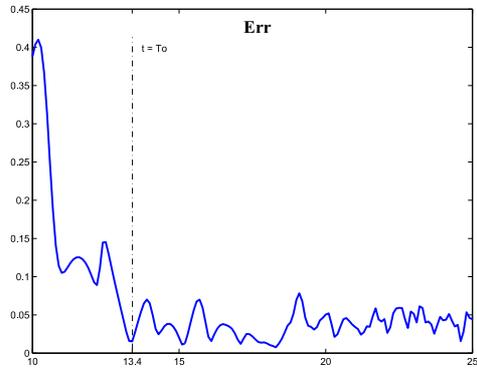


Figure 5: Courbe erreur relative.

La figure 7 représente sur un même graphique en trait continu la solution de référence, $\eta_{\text{ref}}^h(x, t)$, au point d'espace $x = 0.5$, comparée à l'approximation calculée par la méthode de décomposition en modes résonants en pointillés. La figure 7 nous confirme que la méthode de décomposition en modes résonants nous permet de récupérer efficacement le comportement en temps long de la solution transitoire. Enfin, puisque le terme η_{coup}^h reste (coûteux) celui qui nécessite un recalcul systématique, il est utile d'évaluer sa proportion dans la procédure d'approximation par la *SEM* via

$$Q_{\text{coup}}(t) := \frac{\|\eta_{\text{coup}}^h(t)\|_{P,h}}{\|\eta_{\text{pôles}}^h + \eta_{\text{coup}}^h(t)\|_{P,h}}.$$

La figure 8 nous indique que le terme lié à la coupure dans le plan complexe joue un rôle non négligeable dans le processus de reconstruction de la réponse transitoire.

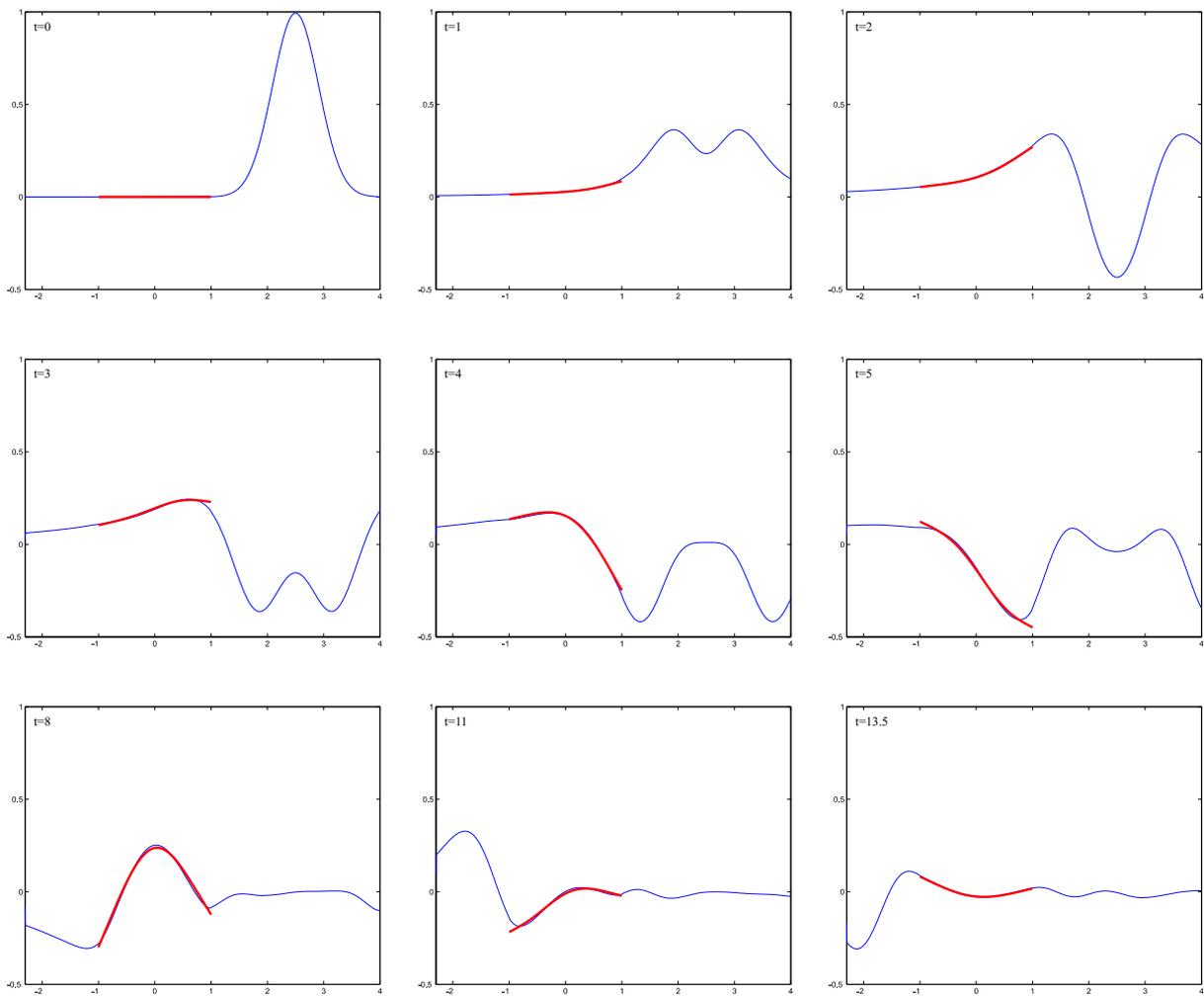


Figure 6: Des instantanés de la solution par la méthode de la transformée de LAPLACE.

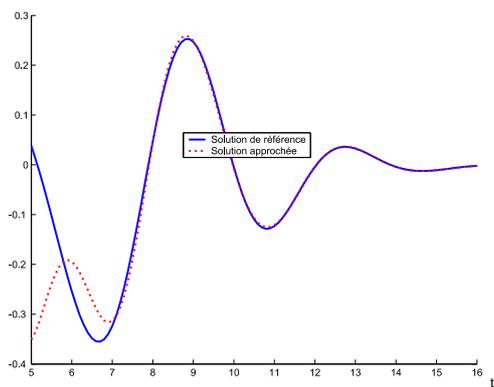


Figure 7: Solutions transitoires comparées.

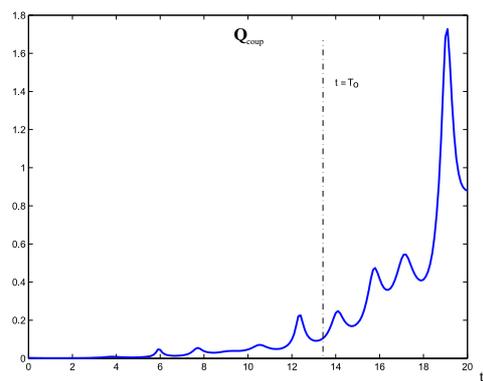


Figure 8: Influence de la coupure.

Deuxième test La courbe d'erreur relative, sur la figure 9, nous indique pour le second test qu'à partir de $T_0 \simeq 13$, l'erreur chute pour osciller entre 2 et 8%. La comparaison des solutions transitoires de référence et approchée par la SEM, sur la figure 10, nous donne les mêmes indications que dans le test précédent.

La nouveauté nous vient de la figure 11. Celle-ci nous montre que comparativement à la figure 8, le fait d'avoir considéré une excitation moyenne fréquence conduit à ce que le terme η_{coup}^h occupe cette fois-ci une place proportionnellement moins importante dans le processus de reconstruction de la réponse.

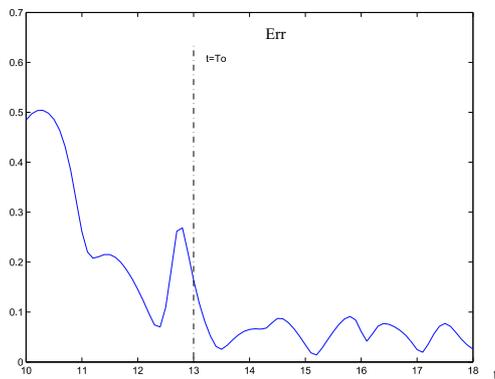


Figure 9: Erreur relative.

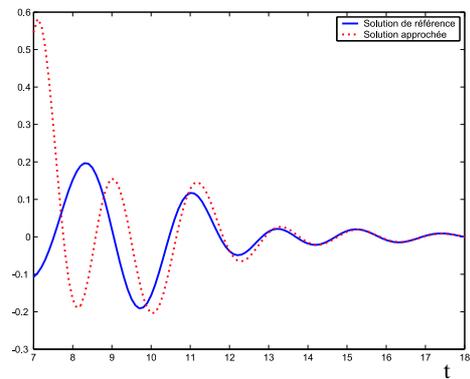


Figure 10: Solutions transitoires comparées.

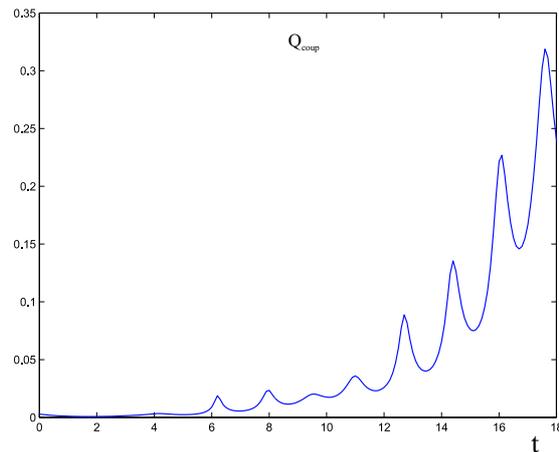


Figure 11: Influence de la coupure.

Remarque 1 *Nous avons effectué divers tests qui laissent à penser que lorsque nous excitons préférentiellement des résonances dont la partie imaginaire est “suffisamment” éloignée de l’origine, le terme η_{coup}^h devient négligeable.*

5 Conclusion

Nous avons mis en œuvre pour la première fois semble-t-il, en dimension deux d’espace, la méthode SEM pour simuler la réponse transitoire d’un problème de couplage entre un fluide (de profondeur infini) et un corps élastique. Les tests numériques que nous avons effectués montrent que cette méthode permet de reconstruire efficacement la réponse transitoire de notre problème de diffraction dès lors que le front d’onde de l’onde incidente a entièrement traversé la plaque. Avant ce délai nécessaire pour pouvoir parler véritablement d’ondes diffractées, la SEM est inefficace : elle ne renseigne que sur le comportement en temps long de la réponse.

Notons pour les futures investigations que les techniques que nous avons utilisées et présentées dans cette communication et la précédente, sont aisément généralisables au cas tridimensionnel pour des situations plus réalistes.

References

- [1] M. ABRAMOWITZ ET I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 9th ed., 1970.
- [2] C. E. BAUM, *The Singularity Expansion Method*, dans *Transient Electromagnetic Fields*, Ed. L. B. Felsen, Springer-Verlag, New-York, 2001.
- [3] M. P. CARPENTIER ET A. F. DOS SANTOS, *Solution of equations involving analytic functions*, *J. Comput. Phys.*, 45 (1982), pp. 210–220.
- [4] C. HAZARD ET F. LORET, *Décomposition en modes résonants pour le problème transitoire de tenue à la mer*, 9^{ième} Journées de l’Hydrodynamiques, Poitiers, mars 2003.
- [5] C. HAZARD, *The Singularity Expansion Method*, in *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave propagation*, SIAM, pp. 494–498, 2000.
- [6] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [7] N. KUZNETSOV, V. MAZ’YA ET B. VAINBERG, *Linear Water Waves, a Mathematical Approach*, Cambridge University Press, 2002.

- [8] C. LABREUCHE, *Problèmes inverses en diffraction d'ondes basés sur la notion de résonances*, Thèse de doctorat de l'Université Paris IX, 1997.
- [9] P. D. LAX ET R. S. PHILLIPS, *Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 22 (1969), pp. 737–787.
- [10] F. LORET, *Décomposition sur les mouvements périodiques ou sur les modes résonants pour la simulation de la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer*, Thèse de doctorat de l'École Centrale Paris, 2004.
- [11] M. H. MEYLAN, *Spectral solution of time dependent shallow water hydroelasticity*, *J. of Fluid Mech.*, 454 (2002), pp. 387–402.
- [12] A. G. RAMM, *Mathematical foundations of the Singularity and Eigenmodes Expansion Methods*, *J. Math. Anal. Appl.*, 86 (1982), pp. 562–591.
- [13] S. STEINBERG, *Meromorphic families of compact operators*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31 (1968), pp. 372–380.
- [14] B. R. VAINBERG, *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.