

10^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Nantes, 7, 8 et 9 mars 2005

**FOCALISATION D'ENERGIE
DANS UN BASSIN A HOULE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNEL
*WAVE ENERGY FOCUSING IN A THREE-DIMENSIONAL
NUMERICAL WAVE TANK***

C. FOCESATO *, F. DIAS **, S. GRILLI ***

* Mathématiques Appliquées de Bordeaux, Université de Bordeaux 1,
351, Cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

** Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

*** Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA

Résumé

Des vagues extrêmes sont obtenues à partir du mouvement d'un batteur serpent dans un bassin à houle numérique. La focalisation spatiale est un des mécanismes susceptibles d'expliquer en partie la génération d'une vague scélérate. En particulier, la focalisation directionnelle est un phénomène uniquement tridimensionnel que nous cherchons à isoler dans cette étude. Le modèle numérique résout les équations d'Euler incompressibles avec surface libre pour un écoulement potentiel, grâce à une méthode d'éléments aux frontières et une mise à jour en temps mixte Eulérienne-Lagrangienne. Sa plus récente amélioration a consisté en l'incorporation de l'algorithme des multipôles rapides pour réduire la complexité de résolution du solveur spatial. L'obtention d'une vague extrême déferlante est présentée. Une description de la géométrie particulière d'une telle vague est discutée, ainsi que la cinématique à la surface.

Summary

Extreme waves are obtained from the motion of a snake wavemaker in a numerical wave tank. Spatial focusing is one of the mechanisms which may take part in the generation of a rogue wave. In particular, directional focusing is only a three-dimensional phenomenon, that we want to isolate in this study. The numerical model solves incompressible Euler equations with a free surface for a potential flow, thanks to a Boundary Element Method and a mixed Eulerian-Lagrangian time updating. Its more recent improvement has consisted in the insertion of the fast multipole algorithm in order to reduce the computational complexity of the spatial solver. We present a typical case of a near breaking rogue wave. A description of the particular geometry of such a wave is discussed, as well as the kinematics at the surface.

I-INTRODUCTION

Le contexte général est l'étude du phénomène rare mais important que sont les vagues scélérates. En effet, malgré leur faible probabilité, ces vagues peuvent causer de gros dégâts et les communautés offshore et navales se doivent donc de prendre en compte ce type d'évènement pour leurs règles de construction. Outre leur faible probabilité, les vagues scélérates sont caractérisées par le fait qu'elles sont très localisées à la fois en temps et dans l'espace. Elles se produisent à cause d'une focalisation d'énergie, elle-même due à de multiples raisons. La focalisation spatiale est un des mécanismes communément proposés pour expliquer l'apparition des vagues scélérates. Plus généralement, la théorie linéaire suggère que différentes composantes d'ondes peuvent avoir des phases et directions telles qu'elles se superposent en une petite région de l'espace et du temps. En fait, la focalisation d'énergie peut se produire pour d'autres raisons. Elle peut résulter de la topographie du fond en eau peu profonde ou d'interactions onde-courant [21]. En eau profonde et en l'absence de courant, un mécanisme plus récemment proposé pour expliquer l'occurrence des vagues scélérates est l'instabilité modulationnelle (instabilité de Benjamin-Feir). Enfin, d'autres interactions onde-onde ou des interactions avec les conditions atmosphériques sont susceptibles de jouer un rôle dans ce phénomène. Ces mécanismes sont résumés dans le récent article de revue sur le sujet par Kharif et Pelinovsky [18].

Si la plupart des travaux sur les vagues scélérates se placent dans le contexte de grande profondeur, il a été remarqué que le phénomène peut se produire quelle que soit la profondeur [18]. Dans la présente étude, nous nous plaçons en profondeur finie, mais en spécifiant un fond plat pour se concentrer sur un seul mécanisme de focalisation. En outre, ces vagues extrêmes ont été observées comme étant essentiellement tridimensionnelles, caractérisées par une forme de fronts incurvés, menant éventuellement au déferlement dont la cinématique diffère des cas 2D [19, 20, 17]. La modélisation numérique de vagues scélérates 3D a été principalement axée sur l'étude des instabilités d'un groupe d'ondes. En particulier, avec l'amélioration des outils informatiques et numériques, le phénomène a pu être étudié à l'aide de formulations qui considèrent toute la nonlinéarité du problème [1, 7].

La focalisation spatiale est le mécanisme naturel pour générer des vagues extrêmes en laboratoire. C'est un contexte contrôlé qui représente la superposition de plusieurs composantes d'ondes sinusoidales différentes. La première possibilité est la focalisation fréquentielle qui se produit lorsque des ondes plus rapides rattrapent des ondes plus lentes générées plus tôt. C'est par ce biais que des études bidimensionnelles ont été conduites pour produire une superposition locale en espace et en temps [6, 10]. La focalisation directionnelle est uniquement un phénomène tridimensionnel. Pour la créer, un batteur serpent peut être utilisé pour générer plusieurs houles qui se croisent en un point du bassin. She *et al.* [20] ont effectué de telles expériences en laboratoire et étudié la cinématique de vagues déferlantes à l'aide de la technique PIV. Brandini et Grilli [5, 3] ont adapté le code d'éléments aux frontières de [14] en y insérant un batteur serpent, et ont entamé une étude numérique sur la focalisation spatiale. Plus récemment, Bonnefoy *et al.* [2] ont développé un outil numérique basé sur une résolution spectrale des équations d'Euler avec surface libre et entrepris d'effectuer des comparaisons avec des expériences en bassin de ce phénomène de focalisation directionnelle. Leur méthode permet d'observer un plus grand nombre de composantes d'ondes se superposant dans un champ de houle ayant un caractère aléatoire et dont les composantes convergentes se propagent sous la forme de paquets d'ondes. Ainsi, ils sont capables de reproduire un champ de vagues conduisant à un évènement de focalisation, proche de celui résultant d'un état de mer. Cependant, du

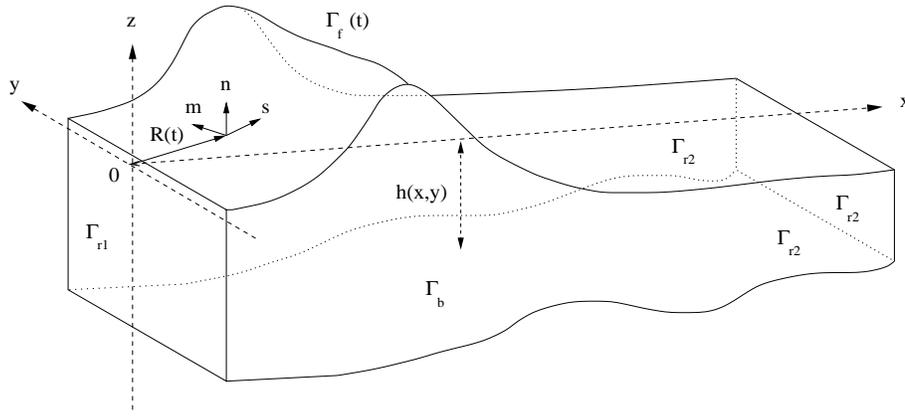


FIG. 1 – Domaine de calcul. La surface libre $\Gamma_f(t)$ est définie à chaque pas de temps par le vecteur position $\mathbf{R}(t)$. Les frontières latérales sont notées Γ_{r1} et Γ_{r2} . Le fond Γ_b est défini par $z = h(x, y)$. On utilise le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et le système de coordonnées curvilinéaire local (s, m, n) , défini au point $\mathbf{R}(t)$ de la frontière.

point de vue de la simulation, leurs calculs sont limités par la nature de la méthode utilisée, et ils ne peuvent pas être poursuivis jusqu'aux premières phases du déferlement.

La présente étude se situe dans un contexte légèrement différent. En effet, l'objectif est d'isoler le phénomène de focalisation directionnelle qui mène à une vague déferlante afin d'en étudier les caractéristiques, en particulier la cinématique. Il s'agit de la continuité des travaux de Grilli et Brandini [5], concernant l'utilisation d'une méthode des éléments aux frontières pour résoudre les équations d'Euler, qui permet a priori d'accéder à la phase de renversement. L'inconvénient de ce type de discrétisation est le coût en mémoire et en temps de calcul qui évoluent de façon quadratique avec le nombre de nœuds utilisé pour mailler la frontière du domaine. Cet obstacle a été franchi avec l'introduction de l'algorithme des multipôles rapides pour accélérer tous les produits matrice-vecteur dans le solveur itératif des systèmes linéaires issus de la discrétisation [12]. La section suivante présente la méthode numérique et sa plus récente évolution, à savoir l'insertion de l'algorithme des multipôles rapides. La configuration du bassin est ensuite décrite. Enfin, les résultats obtenus sont discutés en section 4.

II-MODELE NUMERIQUE

Nous considérons donc les équations pour l'écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible avec surface libre. A l'intérieur du domaine, elles se résument à l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0$$

pour le potentiel des vitesses ϕ défini à partir de la vitesse $\mathbf{u} = \nabla\phi$. La seconde identité de Green transforme cette équation de Laplace en une équation intégrale sur la frontière

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma, \quad (1)$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = 1/4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ est la fonction de Green pour tout l'espace, \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface (sortant) et $\alpha(\mathbf{x}_l)$ est proportionnel à l'angle solide extérieur fait par la frontière au

point de collocation \mathbf{x}_l . Les conditions cinématique et dynamique sur la surface libre s'écrivent

$$\frac{D \mathbf{R}}{D t} = \nabla \phi, \quad (2)$$

$$\frac{D \phi}{D t} = -gz + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi, \quad (3)$$

où \mathbf{R} est le vecteur position d'une particule de fluide, g est la constante de gravité et D/Dt la dérivée matérielle. Aux autres frontières du domaine, la dérivée normale du potentiel des vitesses est spécifiée. Si la paroi est fixe, une condition de flux nul est imposée. Si la paroi est mobile, la géométrie et le flux sont imposés par le mouvement prescrit de la paroi

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_p \text{ et } \overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}$$

où la barre désigne des valeurs spécifiées. Sur les parties fixes de la frontière, une condition de flux nul est imposée :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}} = 0.$$

La solution à l'intérieur du domaine peut être facilement évaluée à partir des valeurs aux frontières. Par exemple, les vitesse et accélération internes sont données par

$$\nabla \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma$$

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}) \frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma$$

respectivement, où

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r^3} \mathbf{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r^3} \{ \mathbf{n} - 3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_r \},$$

avec $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$.

Le domaine considéré représente donc un bassin fermé de type canal à houle, dont le fond peut être défini de forme quelconque. Le modèle numérique est présenté en détail dans l'article de Grilli *et al.* [14]. Le schéma en temps consiste à mettre à jour le vecteur position et le potentiel des vitesses à la surface libre grâce à des développements de Taylor au second ordre. A chaque pas de temps, il faut résoudre l'équation intégrale, ce qui est réalisé par la Méthode des Eléments aux Frontières. La frontière est découpée en éléments pour lesquels une interpolation locale est définie à la fois pour la géométrie de la frontière et les variables de champ. Des fonctions de forme polynômiales sont introduites pour cela. Elles définissent également un changement de variables qui ramène les intégrations sur un élément de référence cartésien. Le calcul numérique de ces intégrales par une quadrature de Gauss-Legendre et des techniques appropriées pour tenir compte des singularités de la fonction de Green constituent la phase d'assemblage de la matrice de discrétisation. Celle-ci est modifiée par la prise en compte de la technique du mode rigide qui permet de calculer indirectement les angles solides et d'éviter les intégrations singulières de la dérivée normale de la fonction de Green. L'introduction de la technique des double nœuds pour traiter les intersections entre les frontières résulte également

en une modification de la matrice. Finalement, le potentiel des vitesses, ou sa dérivée normale selon la frontière, est obtenue en résolvant le système linéaire issu de cette discrétisation de l'équation intégrale. Puisque la matrice est dense, la méthode a une complexité computationnelle en N^2 où N est le nombre de nœuds, en utilisant l'algorithme itératif GMRES pour ramener la phase de résolution au même niveau de complexité que la phase d'assemblage de la matrice. Afin de réduire cette complexité, l'Algorithme des Multipôles Rapides est introduit. L'idée est de remplacer tous les produits matrice-vecteur provenant de la discrétisation de l'équation intégrale par un appel à cet algorithme.

Celui-ci utilise une propriété de la fonction de Green qui peut être développée en variables séparées lorsque le point source et le point d'évaluation sont suffisamment éloignés. Elle peut ainsi s'écrire pour un point O , origine du développement, proche de \mathbf{x} et loin de \mathbf{x}_l

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}, \quad (4)$$

où $O\mathbf{x} = (\rho, \alpha, \beta)$ et $O\mathbf{x}_l = (r, \theta, \varphi)$ en coordonnées sphériques, et les fonctions $Y_k^{\pm m}$ sont les harmoniques sphériques définies à partir des polynômes de Legendre. Pour déterminer dans quels cas cette nouvelle approximation peut être utilisée, une subdivision hiérarchique de l'espace est définie, dont le partitionnement régulier donne automatiquement des critères de distance. Ainsi, les interactions proches sont obtenues par un calcul direct avec les fonctions de Green originales, alors que les interactions lointaines peuvent être approchées par une succession d'opérations locales basées sur la subdivision en cellules et des développements de la fonction de Green en fonction des harmoniques sphériques. La théorie sous-jacente à cette approximation a été bien établie dans le cas de l'équation de Laplace. En particulier, les analyses d'erreur et de complexité sont données dans le livre de Greengard [13].

Dans notre cas, l'équation de Laplace a été transformée en une équation intégrale et une discrétisation spécifique a été employée. L'algorithme rapide doit être adapté pour s'insérer au sein du modèle d'ondes de surface, mais les développements de la fonction de Green sont les mêmes. L'équation intégrale s'écrit

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k M_k^m(O) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}, \quad (5)$$

où $M_k^m(O)$ est le moment à l'origine O :

$$M_k^m(O) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) \right\} d\Gamma. \quad (6)$$

Au lieu de considérer les interactions mutuelles entre deux points, il faut regarder la contribution d'un élément de la discrétisation en un point de collocation. Le calcul local des contributions de plusieurs éléments regroupés en multipôles fait appel à une analyse en éléments aux frontières avec les harmoniques sphériques à la place de la fonction de Green. L'intégration de la dérivée normale des harmoniques sphériques est effectuée en faisant attention d'éviter une singularité apparente qui pourrait générer des erreurs numériques. La discrétisation en éléments aux frontières n'intervient que dans le calcul des moments. Ainsi, le reste de l'Algorithme des Multipôles Rapides est inchangé, notamment les formules de translation et de conversion qui permettent de propager l'information à travers la subdivision hiérarchique, depuis le calcul

des contributions jusqu'à l'évaluation aux points de collocation. Du point de vue du modèle d'ondes de surface, il faut adapter tous les aspects qui dépendaient de l'existence de la matrice de discrétisation. Le stockage des coefficients qu'on veut réutiliser plusieurs fois à chaque pas de temps se fait désormais au sein des cellules de la subdivision hiérarchique. Les techniques du mode rigide et des double nœuds modifiaient la matrice *a priori* avant le calcul des produits matrice-vecteur. Elles sont maintenant traitées comme des termes de correction du résultat de ces produits, de sorte que la résolution du système linéaire garde les mêmes propriétés.

Le modèle accéléré que nous obtenons est donc inchangé, il bénéficie simplement d'un solveur plus rapide de l'équation de Laplace à chaque pas de temps. Il est testé en le comparant avec l'ancien modèle sur une application tridimensionnelle qui requiert beaucoup de précision. Il s'agit d'une onde solitaire se propageant sur un fond en pente ayant une modulation transversale qui mène à un jet plongeant. Avant tout, la consistance de la nouvelle approximation introduite est vérifiée. Mais, ce qui est important, c'est que la précision et la stabilité globales ne soient pas altérées. En ajustant les paramètres du nouvel algorithme, il est possible d'obtenir le même résultat qu'avec l'ancienne méthode. Dans ce cas, les temps de calcul relevés montrent que le modèle accéléré évolue quasiment linéairement en fonction du nombre de nœuds à partir d'environ 4000 nœuds.

III-CONFIGURATION DU BASSIN

Un bassin rectangulaire à fond plat est défini. Il est limité par des parois fixes et des parois mobiles. A une extrémité du bassin, un batteur serpent a été implémenté [5]. C'est un batteur rotatif dont l'axe de rotation est situé au fond du bassin à la profondeur h_0 . Il est composé de plusieurs tranches verticales qui peuvent bouger indépendamment. La position $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$ de chaque tranche verticale est définie par

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_o - \rho \mathbf{m} \quad , \text{ avec } \quad \mathbf{x}_o = y_p \dot{\mathbf{j}} - h_0 \mathbf{k} \quad (7)$$

les coordonnées de l'axe de rotation, où la vitesse angulaire $\dot{\Omega} \dot{\mathbf{j}}$ est appliquée. On note ρ la distance depuis l'axe de rotation, mesurée sur le batteur dans des plans verticaux. Donc,

$$\rho = \sqrt{x_p^2 + (h_0 + z_p)^2} \quad , \text{ et } \quad \Omega = \arctan \frac{S_o}{h_0} \quad (8)$$

où $S_o(y, t)$ correspond à la course du piston selon l'horizontale $z = 0$. A partir de ces définitions, nous trouvons la vitesse et l'accélération

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p &= -\dot{\rho} \mathbf{m} - \rho \dot{\Omega} \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} &= (\rho \dot{\Omega}^2 - \ddot{\rho}) \mathbf{m} - (2\dot{\rho} \dot{\Omega} + \rho \ddot{\Omega}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (9)$$

En suivant Dalrymple [9], nous spécifions l'amplitude du battement S_o comme la superposition linéaire de N_θ composantes sinusoidales d'amplitude a_n et de direction θ_n , de la manière suivante

$$S_o(y, t) = \sum_{n=1}^{N_\theta} a_n \cos \{k_n (y \sin \theta_n - x_f \cos \theta_n) - \omega_n t\} \quad (10)$$

où k_n et ω_n sont le nombre d'onde et la fréquence des composantes, reliés par la relation de dispersion linéaire

$$\omega_n^2 = g k_n \tanh(k_n h_0) \quad (11)$$

et x_f est la distance de focalisation des vagues devant le batteur. Les angles θ_n sont uniformément distribués dans l'intervalle $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$. Seule la focalisation directionnelle est étudiée ici, d'où $\omega_n = \omega$. La focalisation fréquentielle pourrait être ajoutée en ajustant la fréquence comme une fonction de l'angle θ_n . De plus, nous nous restreignons au cas où les amplitudes des différentes composantes sont identiques, mais des valeurs différentes pourront être choisies.

En regardant les solutions analytiques au second ordre, Brandini et Grilli ont montré que la vague focalisée était plus haute et plus cambrée que prévue par la théorie linéaire [4, 3]. Ils ont alors entrepris l'étude de la focalisation spatiale à l'aide de modèles numériques qui prennent en compte toute la nonlinéarité du problème. Après avoir inséré un batteur serpent dans le code d'éléments aux frontières de Grilli *et al.* [14], ils ont présenté deux cas. Le premier est un cas contenant peu de composantes de petite amplitude qui leur a permis de mettre en évidence l'apparition de fronts incurvés. Ceux-ci se produisent périodiquement tant que la réflexion ne perturbe pas la solution, et la plus haute vague est obtenue près du point de focalisation prescrit. Le second cas confirme la possibilité d'obtenir une vague déferlante lorsqu'une forte amplitude d'oscillation du batteur est choisie. Mais pour l'obtenir, une trop grande amplitude avait été utilisée pour toutes les composantes d'ondes, de sorte que la première vague générée était déferlante sur la seule poussée du batteur.

L'objectif du présent travail consiste donc déjà à établir une configuration intermédiaire où le raidissement d'une vague focalisée au centre du bassin soit plus nettement séparé de la poussée du batteur. Pour cela, un outil plus rapide s'est avéré très utile. En effet, si l'on utilise davantage la variabilité transversale pour fournir la superposition d'un nombre plus grand de composantes, il faut augmenter la résolution dans cette direction. Nous considérons donc la superposition de huit composantes ayant des caractéristiques identiques mais de directions comprises entre -45 et 45 degrés. Cette forte directionnalité accentue les effets tridimensionnels et augmente l'amplitude de la vague focalisée. Cela permet de produire la focalisation plus rapidement et à une distance plus proche du batteur. Les variables ayant été adimensionnées (les longueurs par la profondeur du bassin h_0 , et les temps par $\sqrt{h_0/g}$), toutes les composantes sont déterminées par une fréquence 1.2816 qui donne une longueur d'onde de 3.725 d'après la relation de dispersion et une vitesse linéaire $c = 0.7599$. L'amplitude commune à toutes les composantes individuelles est fixée à 0.04 impliquant une cambrure de 0.0675. Enfin, la focalisation est spécifiée à une distance 7.5 du batteur.

Une fois définies les caractéristiques du champ de vagues, les dimensions du bassin sont adaptées. La longueur est choisie à 10 et la largeur à 20. La discrétisation utilise 50 éléments dans le sens longitudinal, ce qui correspond à un peu moins de 20 nœuds par longueur d'onde. La largeur du domaine est divisée en 70 éléments, et la profondeur en 4. Notons que toutes les frontières sont discrétisées. En effet, la version du code bénéficiant de l'accélération par l'Algorithme des Multipôles Rapides n'a pas encore été adaptée pour prendre en compte la symétrie de la solution, ainsi que la méthode des images pour éliminer le fond, comme l'ont fait Brandini et Grilli [5]. L'association des différentes techniques devrait nous apporter un complément d'efficacité qui nous permettra d'effectuer une étude systématique des résultats en fonction des paramètres. Pour la simulation présentée, le temps de calcul est d'environ 4min 30s par pas de temps avec un processeur Intel Pentium 4, pour plus de 300 pas de temps.

Pour illustration, la Figure 2 présente le type de mouvement effectué par le batteur. A l'autre bout du domaine, un piston absorbant est utilisé [8, 15]. Bien qu'il ne soit pas adapté à ce type de houle tridimensionnelle, il permet de retarder le moment où la réflexion n'est plus

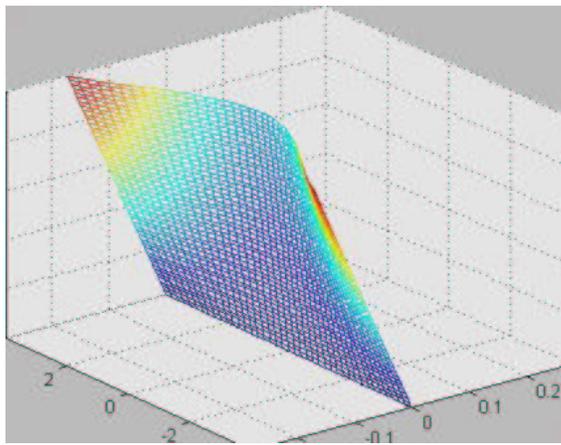


FIG. 2 – Illustration du mouvement du batteur serpent implémenté à une extrémité du bassin.

négligeable. L'implémentation d'un piston ayant le même type de mouvement que le batteur serpent permettrait d'améliorer cette fonctionnalité.

IV-RESULTATS

Les Figures 5 et 6 présentent l'évolution du champ de vagues au cours du temps. Notons que seule la surface libre est représentée. Le batteur se met en route progressivement afin de réduire les singularités qui se produisent à l'interface entre la surface libre et la paroi mobile [5]. Nous observons la surface plate se mettre en mouvement près du bassin et générer une première vague focalisée d'amplitude modérée (Figure 5). Puis, l'amplitude de cette vague diminue avant de disparaître à l'échelle de la visualisation (Figure 6). Le mécanisme étudié produit effectivement une focalisation locale en temps et en espace. Derrière cette première vague, nous voyons se former une seconde vague qui résulte clairement de la superposition des composantes d'ondes de directions différentes (Figure 6(b),(c)). L'amplitude des oscillations du batteur augmente et la somme des composantes donne naissance alors à une vague extrême au centre du bassin (Figure 6(d),(e)). Celle-ci se cambre avant d'atteindre le point de focalisation maximal prévu en $x = 7.5$. Au temps final de cette simulation, la crête est située en $x = 4.4$ (Figure 6(f)). Derrière, nous observons que le phénomène commençait à se répéter avec l'apparition d'une nouvelle ligne de crête courbe convergeant vers le centre du bassin.

L'observation de la forme de la surface libre sur cette application tridimensionnelle mène aux commentaires suivants. Tout d'abord, nous voyons un creux circulaire situé juste devant la vague. Derrière elle, un creux plus profond encore s'est formé la séparant de la ligne de crête courbe qui la suit. Ce creux a la forme d'un croissant. Il existe une forte asymétrie entre les faces avant et arrière de la vague. Son amplitude est significativement plus grande que les ondes qui la suivent et n'ont pas encore convergé. Cette asymétrie qui s'accroît au fil du temps est un élément qui montre que la vague est sur le point de déferler. La vague elle-même se présente sous la forme d'un front incurvé. Dans cet exemple où la directionnalité est importante, le front n'est pas large et la tridimensionnalité est mise en valeur (sans oublier que les axes ne sont pas à l'échelle). L'observation de cette vague extrême présente les caractéristiques géométriques observées pour les vagues scélérates. En particulier, une coupe de la solution en $y = 0$ permet de faire ressortir la forme caractéristique repérée dans les spectres observés ainsi que dans les études 2D, notamment celles concernant l'instabilité modulationnelle d'un groupe d'ondes

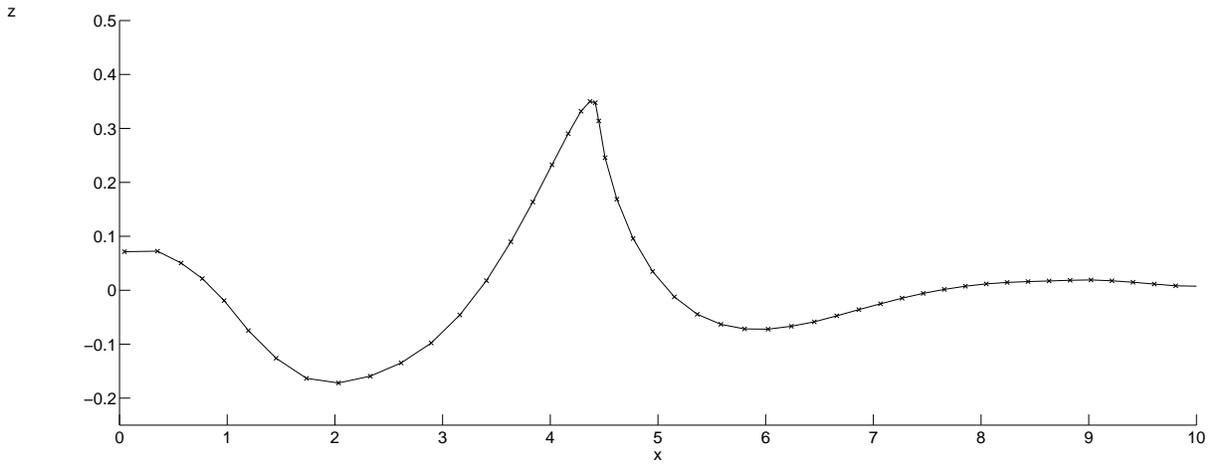


FIG. 3 – Coupe verticale de la surface en $y = 0$ à $t = 18.308$.

[18]. L'amplitude de la crête est sensiblement plus grande que l'amplitude des creux, le creux de derrière étant plus profond (Figure 3). La crête est mesurée à 0.35, et les creux de derrière et devant sont mesurés respectivement à 0.17 et 0.07. Il est remarquable de noter que nous obtenons cette forme 2D caractéristique alors que le mécanisme en jeu dans notre application est exclusivement lié à la tridimensionnalité. Cela suggère donc une certaine indépendance de la forme d'une telle vague extrême par rapport aux causes qui l'ont générée.

En fait, la vague obtenue devrait ensuite déferler. Cependant, il n'y a pas assez de nœuds dans la discrétisation au voisinage de la crête pour pouvoir continuer les calculs. Le mouvement d'aller et retour du batteur et le rapide changement dans la cambrure de la vague compliquent la question du maillage. C'est la raison pour laquelle la simulation s'arrête à cet instant, alors que la formulation autorise le renversement de la vague. Pour illustrer ce mouvement des nœuds du maillage, la Figure 4 montre la solution de dessus. Nous voyons que les nœuds s'éloignent peu à peu du batteur (qui est situé en haut de la figure), en raison du suivi lagrangien utilisé pour la mise à jour de la surface libre à chaque pas de temps. Afin d'éviter cela, il faudrait par exemple remailler régulièrement sur une grille uniforme comme cela a été fait en 2D par Grilli *et al.* [16]. En plus de ce flux, les déformations tridimensionnelles dues à la focalisation sont visibles. Cet effet de focalisation des nœuds dans les zones de forts gradients est ce qui permet d'observer le déferlement d'une onde solitaire sur une bosse [14]. Mais dans le cas présent, le premier effet empêche le second, de sorte qu'il n'y a pas assez de précision spatiale pour la description correcte du renversement de la vague. Il est donc nécessaire de travailler sur ce problème pour espérer obtenir le renversement. Une alternative serait d'augmenter encore le nombre de points de discrétisation de sorte qu'il y ait assez de nœuds au niveau de la vague focalisée. L'utilisation de la symétrie et de la méthode des images permettrait par exemple de compenser le surcoût en tant de calcul que cela entraînerait.

L'observation des champs de vitesse et d'accélération à la surface révèle deux étapes principales dans l'évolution de cet évènement focalisé. La première étape est une phase d'approche où les différentes composantes forment une ligne de crête convergeant vers un point. La cinématique présente simplement les caractéristiques de la propagation de cette ligne de crête. La seconde phase correspond à l'apparition d'une vague unique, résultat de la superposition. La valeur maximale de la composante longitudinale du champ de vitesse augmente et les fortes valeurs se concentrent de plus en plus à la crête. Celle-ci tend donc à aller plus

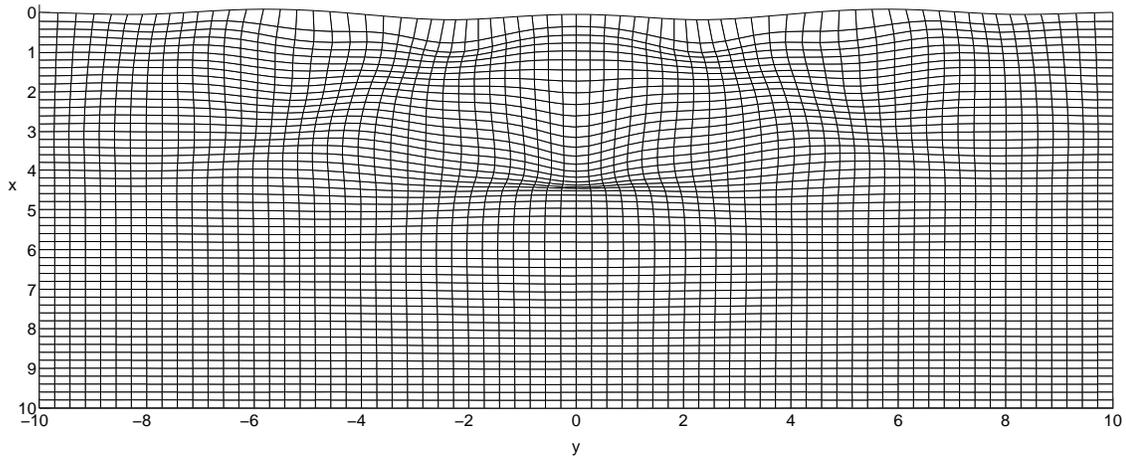


FIG. 4 – Maillage de la solution vue de dessus à $t = 18.308$.

rapidement vers l’avant que la base de la vague, ce qui va mener au déferlement. En même temps, les composantes transversales des champs de vitesse et d’accélération montrent que les effets tridimensionnels se réduisent sur la face avant de la vague. Ainsi, la dynamique du déferlement imminent s’approche d’une configuration quasiment bidimensionnelle. Ceci s’accorde bien avec la description de “mur d’eau” qui revient dans les récits d’évènements extrêmes en mer.

V-CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cet article résume tout d’abord la méthode numérique utilisée pour étudier le phénomène de focalisation directionnelle dans un bassin à houle numérique. Il s’agit d’une résolution des équations d’Euler incompressibles avec surface libre pour un écoulement potentiel, basée sur la méthode des éléments aux frontières [14]. Sa plus récente amélioration est présentée brièvement. Celle-ci consiste à utiliser l’algorithme des multipôles rapides pour effectuer plus rapidement les produits matrice-vecteur issus de la discrétisation [12]. Cela permet de surmonter le principal inconvénient qui peut être associé à ce type de discrétisation, à savoir sa complexité computationnelle en $O(N^2)$ en la ramenant à une complexité quasiment linéaire. L’application consiste à observer une vague extrême générée par un batteur de type serpent. La focalisation directionnelle est un des mécanismes physiques susceptibles de participer à l’apparition d’une vague scélérate. Ce mécanisme est uniquement tridimensionnel. Poursuivant l’étude de Brandini et Grilli [5], nous définissons les conditions du bassin numérique qui mène à une vague extrême déferlante. La description d’une vague focalisée au centre du bassin est effectuée, mais la phase de retournement n’a pas pu être poursuivie. Nous observons qu’une coupe 2D de la solution ressemble tout à fait à la forme caractéristique observée pour les vagues scélérates. Son aspect tridimensionnel est celui d’un front incurvé devancé par un creux circulaire et suivi par un creux plus profond en forme de croissant. La cinématique fait apparaître deux phases. Dans un premier temps, nous observons la propagation d’une ligne de crête courbe qui converge en un point. Lorsque la vague focalisée est obtenue, elle se cambre et les vecteurs vitesses et accélérations sur la face avant de la vague ont une faible composante transversale. Par conséquent, après la phase de focalisation, l’occurrence du déferlement s’approche d’une dynamique essentiellement bidimensionnelle. Cela correspond à l’aspect de “mur

d'eau" qui revient dans les récits des cas de vagues géantes en mer. La valeur maximale de la vitesse sur la crête juste avant de déferler est mesurée à $0.73\sqrt{gh_0}$, où g est la constante de gravité et h_0 la profondeur du bassin.

Le renversement est difficile à obtenir numériquement. Il faut en effet une grande précision dans la région de formation du jet. Le suivi lagrangien des particules à la surface permet de les faire converger naturellement dans les zones de forts gradients. C'est ce qui permet d'obtenir le déferlement pour certains cas de focalisation sur récif. Cependant, cela peut ne pas suffire, notamment lorsque la complexité du phénomène augmente. Cette dépendance de la précision en fonction du maillage est ce qui a limité la poursuite des simulations. Pour y remédier, il y a deux possibilités. D'un côté, il est possible de travailler sur le maillage pour que la distribution des points soit bien adaptée à l'application. En particulier, nous devons adapter la technique de remaillage existante [16] au cas des frontières mobiles 3D. D'un autre côté, il suffit d'augmenter la résolution tant que nécessaire. Cela est désormais envisageable puisque la complexité computationnelle est quasi-linéaire. Le surcoût pourrait même être en partie compensé par la prise en compte des symétries du problème lorsque c'est possible.

Les résultats attendus sont alors de deux types. D'une part, des informations sur la cinématique interne pourront être détaillées pour ce cas de vague extrême déferlante. L'objectif est alors d'obtenir par exemple des diagrammes de vitesse et d'accélération selon une verticale sous la crête au point de déferlement, ainsi que des données quantitatives des maxima dans le jet déferlant. D'autre part, une étude systématique pourra être effectuée pour observer les variations des données sur la géométrie et la cinématique en fonction des paramètres d'entrée que sont la directionnalité maximale, l'amplitude des composantes, le nombre de ces composantes, ou encore la profondeur du bassin.

Références

- [1] Bateman W.J.D., Swan C., Taylor P.H., On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves, *J. Comp. Phys.* **174**, 277–305 (2001).
- [2] Bonnefoy F., Le Touze D., Ferrant P., Generation of fully-nonlinear prescribed wave fields using a high-order spectral method, Proc. 14th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE 2004), Toulon, France, vol. III, 257–263 (2004).
- [3] Brandini C., Nonlinear interaction processes in extreme wave dynamics, Ph.D. Dissertation, University of Firenze (2001).
- [4] Brandini C., S.T. Grilli., On the Numerical Modeling of extreme Highly Nonlinear Deep Water Waves, Proc. IABEM 2000 Symposium, Brescia, Italy, 54–58 (2000).
- [5] Brandini C., Grilli S., Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT, Proc. 11th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE 2001), Stavanger, Norway, Vol III, 124–131 (2001).
- [6] Chaplin J.R., On frequency-focusing unidirectional waves, *Intl. J. Offshore and Polar Engng.* **6**, 131–137 (1996).
- [7] Clamond D., Grue J., A fast method for fully nonlinear water-wave computations, *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355 (2001).
- [8] Clément A., Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves, *J. Comp. Phys.* **26**, 139–151 (1996).

- [9] Dalrymple R.A., Directional wavemaker theory with sidewall reflection, *J. Hydraulic Res.* **27** (1), 23–34 (1989).
- [10] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., A high-order spectral method for the study of non-linear gravity waves, *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288 (1987).
- [11] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M., Rapp R.J., Chan E.S., Melville W.K., Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech.* **189**, 423–442 (1998).
- [12] Fochesato C., Dias F., Numerical model using the Fast Multipole Algorithm for nonlinear three-dimensional free-surface waves, prépublication CMLA, 2004.
- [13] Greengard L., *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [14] Grilli S., Guyenne P., Dias F., A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **35**, 829–867 (2001).
- [15] Grilli S.T., Horrillo J, Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves, *J. Engng. Mech.* **123** (10), 1060–1069 (1997).
- [16] Grilli S.T., Horrillo J, Shoaling of periodic waves over barred-beaches in a fully nonlinear numerical wave tank, *Intl. J. Offshore and Polar Engng.* **9** (4), 257–263 (1999).
- [17] Johannessen T.B., Swan C., A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves, *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* **457**, 971–1006 (2001).
- [18] Kharif C., Pelinovsky E., Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B-Fluids* **22** (6), 603–634 (2003).
- [19] Nepf H.M., Wu C.H., Chan E.S., Comparison of two- and three-dimensional wave breaking, *J. Physical Ocean.* **28**, 1496–1510 (1998).
- [20] She K., Greated C.A., Easson W.J., Experimental study of three-dimensional wave breaking, *J. of Am. Soc. C. E.* **120**, 20–36 (1994).
- [21] White B.S., Fornberg B., On the chance of freak waves at sea, *J. Fluid. Mech.* **355**, 113–138 (1998).

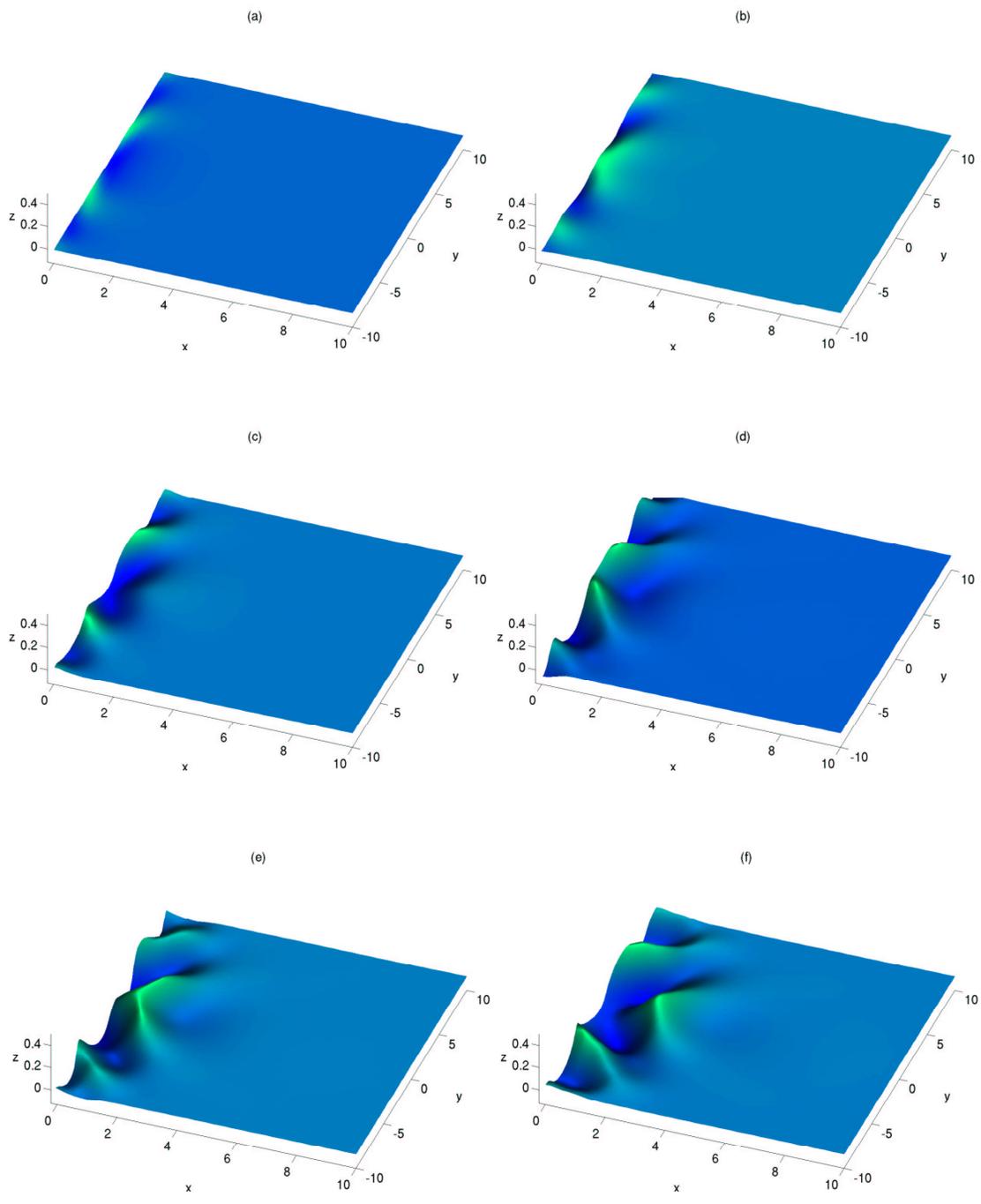


FIG. 5 – Evolution de la surface libre : (a) à $t = 2.143$, (b) à $t = 4.243$, (c) à $t = 6.231$, (d) à $t = 8.025$, (e) à $t = 9.465$, (f) à $t = 10.974$.

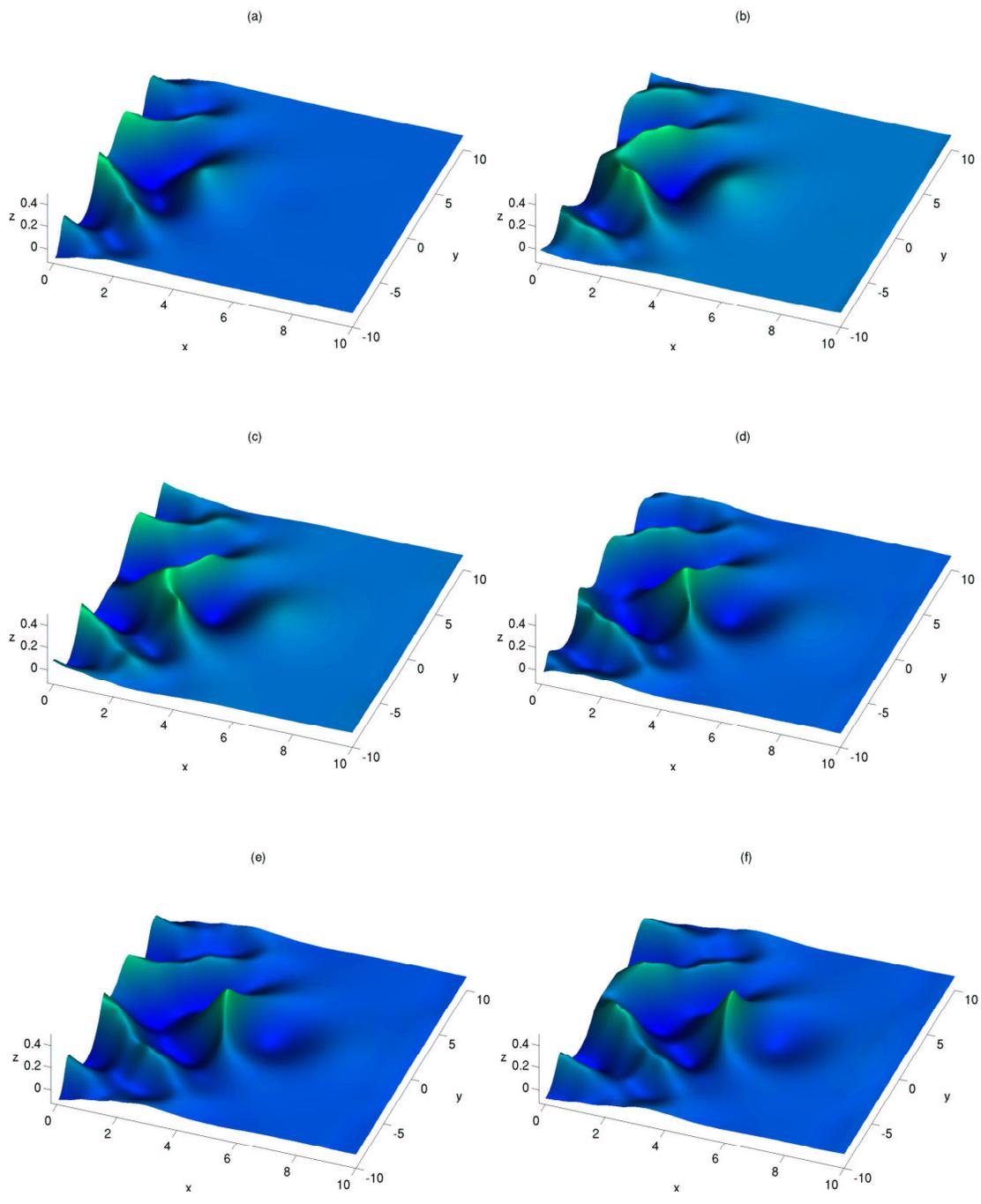


FIG. 6 – Suite de l'évolution de la surface libre : (a) à $t = 12.639$, (b) à $t = 14.077$, (c) à $t = 15.431$, (d) à $t = 16.640$, (e) à $t = 17.650$, (f) à $t = 18.308$.