

10<sup>èmes</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Nantes, 7, 8 et 9 mars 2005

**Interaction hydrodynamique  
d'un ensemble de flotteurs sur la surface libre  
- une nouvelle méthode de singularités -**

**X.B. Chen & S. Malenica**

Bureau Veritas, DR, 17bis, Place des Reflets, 92000 Courbevoie, France

Fax: 01-4291.3395, Email: xiao-bo.chen@bureauveritas.com

**Résumé**

Nous présentons ici nos nouveaux développements pour la résolution du problème de diffraction et radiation. Des nouvelles équations intégrales sont établies suivant la modification de la condition aux limites sur la surface libre par l'introduction d'un terme dissipatif à l'écoulement irrotationnel dans un fluide presque parfait et isovolume, d'une part. L'application des nouvelles formulations des efforts du second-ordre aux cas d'un ensemble de structures flottantes est réalisée, d'autre part. La présence de force dissipative amortit le mouvement de fluide, en particulier, dans une zone où la cinématique de l'écoulement est violente due au confinement du mouvement de fluide produisant des interactions résonantes. La nouvelle méthode donne ainsi de meilleurs résultats en comparant avec des mesures expérimentales. La nouvelle formulation de champ intermédiaire des efforts du second-ordre développée dans Chen (2004) à partir de la formulation d'intégration des pressions (de champ proche), est appliquée aux cas de l'interaction multi-corps. Il est démontré qu'elle est très avantageuse par rapport à la formulation de champ proche pour une meilleure convergence numérique, par rapport à la formulation de champ lointain pour l'accès aux efforts sur chaque corps individuel.

**Abstract**

We present here our new developments in the solution of wave diffraction and radiation. On the one hand, new integral equations are established following the modification of the boundary condition over the free surface by introducing a dissipative term within the hypothesis of irrotational flow in a fairly perfect and isovolum fluid. On the other hand, applications of the new formulations of second-order wave loads to the case of multi-body interaction are realized. The presence of dissipative force puts a damping to fluid motions, in particular, in the zone where fluid kinematics is violent due to the confinement inducing resonant interactions. The developed method provides much better results comparing to the experimental measurements. The new middle-field formulations of the second-order loads developed in Chen (2004) is applied to the multi-body case. It is shown that the new formulation gives an excellent convergence comparing to the near-field formulation and the access to the second-order loads on each individual body which is not possible by the classical far-field formulation based on the momentum theorem.

# 1 Introduction

Dans l'industrie offshore d'aujourd'hui, on développe des concepts de FPSOs comprenant des terminaux de stockage et de production de GNL dans des zones géographiques où la profondeur d'eau peut être faible. L'étude du comportement hydrodynamique d'un flotteur en présence du fond ainsi qu'en présence d'un ou des autres flotteurs est primordiale pour déterminer le système d'amarrage et pour assurer la sécurité de l'opération de déchargement.

Contrairement au cas d'un seul flotteur, l'interaction hydrodynamique entre les flotteurs rend le phénomène plus complexe. En particulier, la cinématique du fluide sur les plans d'eau entre les flotteurs présente une résonance à certaines fréquences de houle et les efforts du premier et du second-ordre s'exerçant sur les flotteurs deviennent singuliers dans les calculs fondés sur la théorie potentielle linéaire. Les résultats numériques montrent une cinématique de fluide irréaliste avec une cambrure qui dépasse largement celle observée dans la pratique. Dans la réalité, les mouvements violents de fluide sont fortement réduits par des effets amortisseurs d'origine diverse comme la viscosité (dissipation sur la surface et dans le fluide, frottement et traînée sur les parois) et la non-linéarité (plus sensible aux mouvements importants). Afin de contenir la cinématique de fluide dans les zones sensibles dans une plage de valeurs réaliste, des analyses et développements fondés sur l'hypothèse de fluide *presque parfait* (une notion de fluide constamment utilisée par Professeur Guével) sont effectuées.

On commence par la présentation des équations fondamentales décrivant l'écoulement potentiel de diffraction et radiation autour d'un ou plusieurs corps flottants. Dans l'équation d'Euler, une force fictive dépendant de la vitesse de l'écoulement du fluide est introduite de la même manière que Guével (1982). Cette force dont l'amplitude est proportionnelle à celle de la vitesse agissant dans la direction opposée de l'écoulement, joue bien un rôle d'amortissement afin d'assimiler la dissipation d'énergie sans modifier les propriétés de fluide non-visqueux et d'écoulement irrotationnel. Dans ce fluide presque parfait, la condition aux limites sur la surface libre est modifiée par l'introduction d'un terme dissipatif. Sous l'hypothèse de faible cambrure de surface libre et de petits mouvements du corps, le problème est développé en série associée au paramètre proportionnel à la cambrure de la houle. Les systèmes d'équations des problèmes du premier ordre et du second ordre sont donnés d'une façon sommaire.

Au premier ordre, le problème est linéaire. En appliquant le théorème de Green dans le domaine fluide et dans le domaine à l'intérieur de la carène, le potentiel de vitesse de l'écoulement dans tout demi-espace comprenant la surface libre et au-dessous de celle-ci est représenté, en faisant intervenir la fonction de Green, par une intégrale surfacique sur les surfaces de carène, flottaison à l'intérieur de la carène, et surface libre. Cette représentation générale du potentiel de vitesse est la clé essentielle pour élaborer une méthode de singularités.

A partir de la représentation intégrale, des nouvelles équations intégrales sont ensuite établies dans le but d'obtenir le potentiel de vitesse de l'écoulement. Tout d'abord, une condition aux limites sur la surface de flottaison est imposée de telle sorte que la solution dans le domaine intérieur de la carène soit unique ainsi que la solution dans le domaine physique sur la carène et à l'extérieur de celle-ci. Ensuite, on comprend que le terme dissipatif présent dans la condition aux limites sur la surface libre est important seulement là où la cinématique de fluide est susceptible d'être violente. L'intégrale sur la surface libre n'est pas significative ailleurs. Enfin, pour prendre en compte les effets de dissipation autour de la carène, une modification de la condition de glissement est aussi envisagée. Elle consiste à ajouter un terme simulant la réflexion partielle des parois équivalent à une dissipation. En écrivant l'ensemble des équations intégrales sur les surfaces de carène, flottaison et là où la surface libre est agitée, on construit un nouveau système d'équations dont la résolution a toutes les chances d'approcher au mieux la réalité.

Cette nouvelle méthode de singularités fondée sur les nouvelles équations intégrales pour modéliser un écoulement du fluide presque parfait est appliquée aux deux cas de multi-corps pour lesquels des mesures expérimentales ont été effectuées. Il est montré que l'introduction du paramètre de dissipation donne une meilleure comparaison avec les résultats d'essais.

Les nouvelles formulations des efforts du second-ordre ont été développées par Chen (2004) à partir de la formulation d'intégration des pressions sur la carène (de champ proche). La nouvelle formulation appliquée sur une surface de contrôle à une certaine distance du corps est appelée formulation de *champ intermédiaire*. Le développement de cette formulation permet de trouver le lien entre la formulation de champ proche et celle dérivée du théorème de quantités de mouvements (de champ lointain). En appliquant cette formulation de champ intermédiaire aux cas de multi-corps, nous obtenons une meilleure convergence numérique par rapport à la formulation de champ proche, et nous pouvons calculer les efforts sur chaque corps individuel, ce qui n'était pas possible avec la formulation de champ lointain.

## 2 Problème aux limites et représentation intégrale du potentiel

Nous définissons le système d'axes fixes  $(o, x, y, z)$  dont le plan  $(x, y)$  coïncide avec le plan d'eau au repos et l'axe  $oz$  est une verticale ascendante. L'élévation de la surface libre est décrit par :

$$z - \mathcal{E}(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

Le fluide est supposé non-visqueux et incompressible et l'écoulement irrotationnel. Avec ces hypothèses, la vitesse de l'écoulement du fluide  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$  peut être exprimée comme le gradient d'une fonction scalaire  $\Phi(P, t)$  définie au point  $P(x, y, z)$  à l'instant  $t$  :

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi$$

La fonction  $\Phi$  est donc appelée le potentiel de vitesse. La conservation de masse donne l'équation de continuité :

$$\nabla\mathbf{V} = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla^2\Phi = 0 \quad (2)$$

montrant que l'équation de Laplace est satisfaite par le potentiel de vitesse. En plus de l'action de la pesanteur, nous supposons que le fluide est soumis à une force d'amortissement interne qui, par unité de masse, a pour l'expression :

$$\mathbf{f} = -\mu\mathbf{V}$$

avec un paramètre  $\mu$  positif et petit. Cette force est proportionnelle à l'amplitude de la vitesse du fluide et agit dans la direction opposée. Bien qu'elle joue le rôle de dissipation d'énergie comme celui de la viscosité dans le fluide réel, elle n'introduit pas de tourbillons et l'écoulement reste irrotationnel. L'existence du potentiel de vitesse est garantie. Un fluide non-visqueux et irrotationnel avec cette force dissipative est appelé par Guével (1982) un fluide *presque parfait*. L'équation d'Euler s'écrit :

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla(P_r/\rho + gz) - \mu\mathbf{V}$$

dans laquelle  $P_r$  est la pression et  $g$  l'accélération gravitaire. Introduisant  $\mathbf{V} = \nabla\Phi$  dans l'équation ci-dessus, nous obtenons l'équation de Bernoulli-Lagrange modifiée :

$$P_r/\rho + gz + \Phi_t + \nabla\Phi\nabla\Phi/2 + \mu\Phi = C(t) \quad (3)$$

avec  $C(t)$  une fonction arbitraire de  $t$  souvent ignorée car nous pouvons redéfinir le potentiel  $\Phi$  incluant une fonction temporelle sans affecter le champs de vitesse (gradient du potentiel).

Sur la surface libre, la condition dynamique exige l'égalité de la pression donnée par (3) et celle atmosphérique. La condition cinématique assure qu'un point matériel situé sur la surface libre à l'instant  $t$  est encore situé sur cette surface frontière à tout autre instant. Cette condition cinématique est exprimée par la nullité de la dérivée totale de (1) par rapport au temps. La combinaison de ces deux conditions donne la condition aux limites sur la surface libre sous une forme composée :

$$g\Phi_z + \Phi_{tt} + \mu\Phi_t + 2\nabla\Phi\nabla\Phi_t + \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi\nabla\Phi)/2 = 0 \quad (4)$$

appliquée sur la surface libre instantanée donnée par :

$$\mathcal{E}(P, t) = -(\Phi_t + \nabla\Phi\nabla\Phi/2 + \mu\Phi)/g \quad (5)$$

La dernière supposition concerne la cambrure faible de la houle ainsi que des petits mouvements d'un corps autour de sa position moyenne. Un développement en série de la solution en fonction d'un petit paramètre comme la cambrure de la houle est possible par la méthode de perturbation. Par exemple, le potentiel de vitesse est développé sous la forme :

$$\Phi(P, t) = \Phi^{(1)}(P, t) + \Phi^{(2)}(P, t) + \dots \quad (6)$$

De même pour les autres grandeurs physiques comme la pression dynamique, l'élévation de surface libre, les efforts de houle et les mouvements du corps. Introduisant l'expression (6) dans (2) et (4) en plus du développement de  $\Phi(z=\mathcal{E})$  sur la position de la surface libre moyenne ( $z=0$ ) et du développement de  $\Phi[P(t)]$  sur la position moyenne du corps  $P = P_0$ , nous obtenons plusieurs problèmes aux limites d'ordres différents.

## 2.1 Problèmes aux limites du premier ordre

Au premier ordre, le problème linéaire de diffraction et radiation est défini par le système d'équations :

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0 \quad P \subset D \quad (7a)$$

$$g\Phi_z^{(1)} + \Phi_{tt}^{(1)} + \mu\Phi_t^{(1)} = 0 \quad P \subset F(z=0) \quad (7b)$$

$$\Phi_n^{(1)} = \mathbf{X}_t^{(1)} \mathbf{n} \quad P \subset H \quad (7c)$$

$$\Phi_z^{(1)} = 0 \quad P \subset B(z=-h) \quad (7d)$$

Dans les équations ci-dessus,  $D$  représente le domaine fluide limité par la surface libre moyenne  $F$ , la surface de la carène du corps  $H$ , la surface du fond marin  $B$  et une surface cylindrique  $S_\infty$  à l'infini. La condition de radiation exigeant que  $\Phi$  disparaisse sur  $S_\infty$  est satisfaite automatiquement dans le fluide presque parfait.  $\mathbf{X}_t$  au second membre de (7c) est la vitesse d'entraînement sur la carène  $H$ . L'élévation de la surface libre est donnée par

$$\mathcal{E}^{(1)} = -[\Phi_t^{(1)} + \mu\Phi^{(1)}]/g \quad (8a)$$

évaluée à la surface libre moyenne  $z=0$ , et la pression sur la carène :

$$P_r^{(1)} = -\rho[gX_3^{(1)} + \Phi_t^{(1)} + \mu\Phi^{(1)}] \quad (8b)$$

avec  $X_3^{(1)}$  le déplacement vertical du point considéré.

## 2.2 Problèmes aux limites du second ordre

Le problème aux limites de diffraction et radiation au second ordre est défini par :

$$\nabla^2 \Phi^{(2)} = 0 \quad P \subset D \quad (9a)$$

$$g\Phi_z^{(2)} + \Phi_{tt}^{(2)} + \mu\Phi_t^{(2)} = N_F^{(2)} \quad P \subset F(z=0) \quad (9b)$$

$$\Phi_n^{(2)} = \mathbf{X}_t^{(2)} \mathbf{n} + N_H^{(2)} \quad P \subset H \quad (9c)$$

$$\Phi_z^{(2)} = 0 \quad P \subset B(z=-h) \quad (9d)$$

Ici,  $N_F^{(2)}$  représente le terme non-homogène dans la condition aux limites sur la surface libre.  $N_H^{(2)}$  est le terme supplémentaire au second membre de la condition aux limites sur la carène. Tous les deux termes  $N_F^{(2)}$  et  $N_H^{(2)}$  sont fonction des solutions du premier ordre et sont donnés par :

$$N_F^{(2)} = -2\nabla\Phi_t^{(1)}\nabla\Phi^{(1)} - \mathcal{E}^{(1)}[g\Phi_{zz}^{(1)} + \Phi_{ztt}^{(1)} + \mu\Phi_{zt}^{(1)}] \quad (10a)$$

$$N_H^{(2)} = [\mathbf{X}_t^{(1)} - \nabla\Phi^{(1)}](\mathbf{R}^{(1)} \wedge \mathbf{n}) - [(\mathbf{X}^{(1)}\nabla)\nabla\Phi^{(1)}]\mathbf{n} \quad (10b)$$

avec  $\mathbf{R}^{(1)} = (a_4, a_5, a_6)$  le vecteur de rotations du corps (roulis  $a_4$ , tangage  $a_5$  et lacet  $a_6$ ) par rapport au point de référence  $O(x_0, y_0, z_0)$  et  $\mathbf{n}$  la normale orientée vers le fluide.

L'élévation du second-ordre de la surface libre est donnée par :

$$\mathcal{E}^{(2)} = -\{\Phi_t^{(2)} + \mu\Phi^{(2)} + \nabla\Phi^{(1)}\nabla\Phi^{(1)}/2 + \mathcal{E}^{(1)}[\Phi_{zt}^{(1)} + \mu\Phi_z^{(1)}]\}/g \quad (11a)$$

évaluée à  $z=0$ , et la pression sur la carène :

$$P_r^{(2)} = -\rho[gX_3^{(2)} + \Phi_t^{(2)} + \mu\Phi^{(2)} + \nabla\Phi^{(1)}\nabla\Phi^{(1)}/2] \quad (11b)$$

avec  $X_3^{(2)}$  le déplacement vertical du second-ordre.

Dans la suite, les quantités du premier ordre ( $\mathcal{E}^{(1)}, \Phi^{(1)}, \dots$ ) seront écrites comme ( $\mathcal{E}, \Phi, \dots$ ) pour simplifier l'écriture. Par contre, le potentiel du second-ordre  $\Phi^{(2)}$  garde sa forme pour distinguer avec celui du premier ordre.

## 2.3 Représentation intégrale du potentiel de vitesse

Afin de résoudre le problème aux limites du premier ordre (7), nous considérons une solution fondamentale qui satisfait le système d'équations suivant :

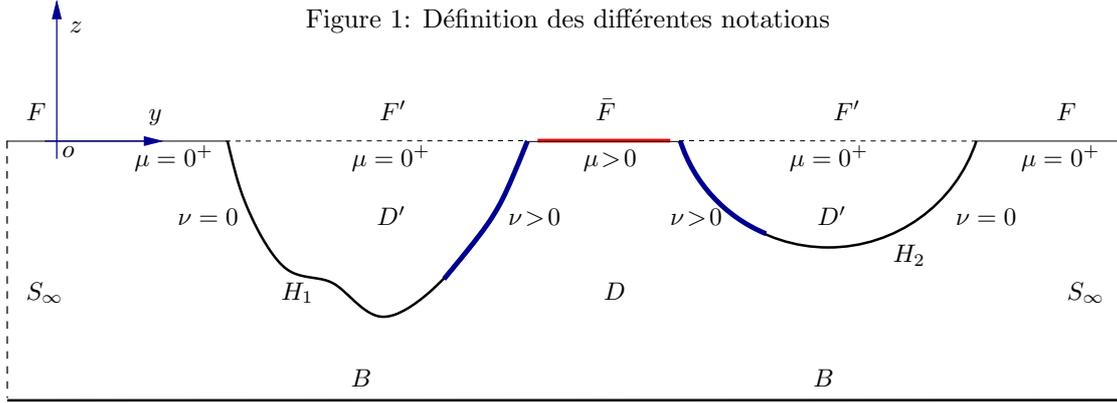
$$\nabla^2 \mathcal{G}(P, Q, t) = 4\pi \delta(P-Q) \quad P \subset D \quad (12a)$$

$$g\mathcal{G}_z + \mathcal{G}_{tt} + \mu'\mathcal{G}_t = 0 \quad P \subset F(z=0) \quad (12b)$$

$$\mathcal{G}_z = 0 \quad P \subset B(z=-h) \quad (12c)$$

dans lequel  $(P, Q)$  sont respectivement le point influencé  $P(x, y, z)$  et le point influençant  $Q(x', y', z')$ , et  $\delta(P - Q) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$  est la fonction Dirac. En principe, le paramètre  $\mu'$  dans la condition aux limites sur la surface libre (12b) prend la même valeur que  $\mu$  dans (7b). Il peut légitimement prendre une valeur différente, en particulier, la valeur limite  $\mu' \rightarrow 0+$  est prise afin de simplifier le développement des formulations pour  $\mathcal{G}(P, Q, t)$ .

La solution du système (12) s'appelle la fonction de Green représentant le champ potentiel de vitesse en  $P(x, y, z)$  créé par une source de densité unitaire au point  $Q(x', y', z')$ . Les analyses et les développements réalisés dans les travaux de Chen (1993) ont été très fructueux en fournissant des algorithmes extrêmement efficaces pour l'évaluation numérique des fonctions de Green associées aux problèmes de diffraction et radiation en profondeur d'eau finie ou infinie.



En appliquant la deuxième formule de Green au couple de fonctions harmoniques  $(\Phi, \mathcal{G})$ , nous obtenons la représentation classique du potentiel de vitesse :

$$4\pi\Phi(P) = \iint_{S(Q)} \left[ \frac{\partial\Phi(Q)}{\partial n(Q)} \mathcal{G}(P, Q) - \Phi(Q) \frac{\partial\mathcal{G}(P, Q)}{\partial n(Q)} \right] ds(Q) \quad (13)$$

La normale  $\mathbf{n}$  dans (13) est orientée positivement vers le fluide. Le membre gauche de l'équation ci-dessus est le résultat de l'intégrale volumique du produit du potentiel et du Laplacien de la fonction de Green (12a), tandis que le membre droit est la transformation de l'intégrale volumique en celle de surface d'après la formule d'Ostrogradsky. La surface  $S(Q)$  comprend celle de la carène ( $H$ ), la surface libre ( $F$ ), le fond marin ( $B$ ) et une surface à l'infini ( $S_\infty$ ). L'intégrale sur la surface à l'infini est nulle à cause de la disparition de l'écoulement due aux effets de dissipation. L'intégrale sur le fond marin l'est également en raison de la condition de glissement pour  $(\Phi, \mathcal{G})$ . Finalement, l'équation (14a) se réduit à :

$$4\pi\Phi(P) = \iint_H ds (\Phi_n \mathcal{G} - \Phi \mathcal{G}_n) + I_F(\Phi) \quad \text{for } P \subset D \quad (14a)$$

dans laquelle l'intégrale sur la surface libre  $I_F(\Phi)$  est évaluée en utilisant (7b) et (12b) :

$$I_F(\Phi) = \iint_F ds (\Phi_n \mathcal{G} - \Phi \mathcal{G}_n) = (1/g) \iint_F ds (\mathcal{G} \Phi_{tt} - \Phi \mathcal{G}_{tt} + \mu \mathcal{G} \Phi_t - \mu' \Phi \mathcal{G}_t) \quad (14b)$$

Cette intégrale de surface libre  $I_F(\Phi)$  est simplifiée ou égale à zéro, si nous prenons  $\mu = \mu' \rightarrow 0+$ , dans la plupart des cas des problèmes de radiation et diffraction sans vitesse d'avance, peut aussi être transformée en une intégrale de ligne le long de la flottaison dans les problèmes de radiation et diffraction avec vitesse d'avance.

Cette représentation intégrale du potentiel de vitesse (14a) peut être directement appliquée pour établir les équations intégrales sur la carène  $H$  et sur la surface libre  $F$ . La valeur de  $\Phi_n$  étant connue sur  $H$  ainsi que celle sur  $F$  pouvant être exprimée par  $\Phi$ , la solution des équations intégrales donne donc la distribution de  $\Phi$  sur  $H$  et  $F$ .

Une alternative à (14a) peut être obtenue en considérant le domaine complémentaire  $D'$  à l'intérieur du corps limité par la surface de la carène  $H$  et la surface de flottaison intérieure  $F'$ . Dans ce domaine intérieur,  $\Phi(P, t) = \Phi'$  pour  $P \subset D'$  satisfait l'équation de Laplace. L'application de la deuxième formule de Green au couple de fonctions harmoniques  $(\Phi', \mathcal{G})$  dans ce domaine, nous conduit à :

$$4\pi\Phi(P) = \iint_H ds [(\Phi_n - \Phi'_n) \mathcal{G} - (\Phi - \Phi') \mathcal{G}_n] + I_F(\Phi) + I_{F'}(\Phi') \quad \text{for } P \subset D \cup D' \quad (14c)$$

qui est valable dans tout demi-espace  $D \cup D'$ . L'intégrale  $I_{F'}(\Phi')$  avec  $\Phi'$  le potentiel du vitesse dans  $D'$ , est définie de la même manière que  $I_F(\Phi)$  :

$$I_{F'}(\Phi) = \iint_{F'} ds (\Phi'_n \mathcal{G} - \Phi' \mathcal{G}_n) \quad (15)$$

Si la condition aux limites sur  $F'$  est la même que (7b), l'expression pour  $I_{F'}(\Phi')$  est exactement la même que (14b) dans laquelle  $\Phi$  est simplement remplacé par  $\Phi'$ .

Les conditions aux limites sur la carène et sur la surface de flottaison satisfaites par le potentiel  $\Phi'$  ne sont pas définies, à priori. En particulier,  $I_{F'}(\Phi')$  disparaît si la condition sur la flottaison par  $\Phi'$  est la même que  $\Phi$  sur la surface libre, tout comme  $I_F(\Phi)$  en choisissant  $\mu = \mu' = 0^+$ . C'est le cas de la plupart des solutions classiques. Par contre, le choix de la condition aux limites sur la carène  $H$  du domaine  $D'$  conduit à des méthodes de résolution différentes : la méthode classique de sources seules est associée à la condition  $\Phi' = \Phi$  sur  $H$ , tandis que la méthode de singularités mixtes est associée à la condition  $\Phi' = 0$  sur  $H$  ainsi que

$$\iint_H ds \Phi'_n \mathcal{G} = 0 \quad \text{pour } P \subset D$$

sauf pour certaines fréquences auxquelles la solution du problème dans  $D'$  de type Dirichlet n'est pas unique. Ces fréquences irrégulières associées aux solutions propres du problème dans  $D'$  se présentent aussi dans la méthode de sources seules que nous allons traiter dans la suite.

### 3 Nouvelle méthode de singularités

Nous considérons le problème de radiation et diffraction autour d'un ou plusieurs corps sans vitesse d'avance soumis à l'action de la houle incidente. L'écoulement du fluide est supposé harmonique en temps avec une fréquence circulaire  $\omega$ , de telle manière que le potentiel de vitesse  $\Phi$  et la fonction de Green  $\mathcal{G}$  peuvent s'exprimer ainsi :

$$\Phi(P, t) = \Re_e \{ \phi(P) e^{-i\omega t} \} \quad \text{and} \quad \mathcal{G}(P, Q, t) = \Re_e \{ G(P, Q) e^{-i\omega t} \} \quad (16)$$

où  $\Re_e \{ \cdot \}$  signifie que nous prenons la partie réelle d'une fonction complexe. Le potentiel de vitesse harmonique est la somme des potentiels élémentaires :

$$\phi = -i\omega \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^6 a_j^m \phi_j^m + a_0(\phi_0 + \phi_D) \quad (17)$$

où  $M$  est le nombre de corps,  $\phi_j^m$  est le potentiel de radiation du corps  $m$  pour une vitesses unitaires d'entraînement dans la direction  $j$ , et  $a_j^m$  est l'amplitude de mouvement du corps  $m$  dans la direction  $j$ .  $\phi_0$  est le potentiel de la houle incidente donné par :

$$\phi_0 = -\frac{g}{\omega} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (18a)$$

tandis que  $\phi_D$  est le potentiel de diffraction des corps (maintenus fixes) soumis à la houle incidente. Dans (18a),  $\beta$  est l'incidence de houle et le nombre d'onde  $k_0$  déterminé par la relation de dispersion :

$$k_0 \tanh k_0 h = K_0 = \omega^2/g \quad (18b)$$

avec  $h$  la profondeur d'eau.

#### 3.1 Problèmes aux limites pour les potentiels élémentaires

Les potentiels élémentaires (représentés par le potentiel générique  $\varphi$ ) satisfont l'équation de Laplace, la condition de glissement sur le fond marin et les conditions aux limites sur la surface libre et sur la carène qui sont spécifiées ici :

$$\varphi_z - K_0 \varphi - i\epsilon K_0 \varphi = 0 \quad P \subset F \quad (19a)$$

$$\varphi_n = V_n - i\nu k_0 \varphi \quad P \subset H \quad (19b)$$

avec  $K_0 = \omega^2/g$ ,  $\epsilon = \mu/\omega$  déduit de l'équation (7b), et  $V_n$  la composante de la vitesse d'entraînement dans la direction normale à la carène. Le second terme dans le membre droit de (19b) contient un petit paramètre  $\nu$ . Cette technique est utilisée dans l'ingénierie littorale pour simuler la reflection partielle des parois.

A noter que la surface totale des carènes  $H$  est l'union des surfaces des carènes  $H_m$  avec  $m = 1, 2, \dots, M$  sur lesquelles les composantes de la normale sont définies par

$$(n_1^m, n_2^m, n_3^m) = \mathbf{n}^m \quad \text{and} \quad (n_4^m, n_5^m, n_6^m) = \mathbf{r}^m \wedge \mathbf{n}^m$$

où  $\mathbf{r}^m = (x-x_0^m, y-y_0^m, z-z_0^m)$  avec  $O(x_0^m, y_0^m, z_0^m)$  comme le point de référence de rotation du corps  $m$ . Nous pouvons définir les vitesse d'entraînement unitaires par :

$$V_n = N_j^m = \begin{cases} n_j^m & P \subset H_m \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (20a)$$

pour les potentiels de radiation  $\varphi = \phi_j^m$  et

$$V_n = -\partial\phi_0/\partial n \quad (20b)$$

pour le potentiel de diffraction  $\varphi = \phi_D$ .

### 3.2 Nouvelles équations intégrales de résolution

Tout d'abord, en introduisant les expressions (16) pour  $\Phi(P, t)$ ,  $\mathcal{G}(P, Q, t)$  et  $\Phi'(P, t)$  qui porte la même expression que  $\Phi(P, t)$  dans la représentation intégrale (14c) du potentiel de vitesse, nous avons :

$$4\pi\varphi = \iint_H ds [(\varphi_n - \varphi'_n) G - (\varphi - \varphi') G_n] + I_F + I_{F'} \quad (21a)$$

avec

$$I_F = -iK_0 \iint_F ds (\epsilon - \epsilon') \varphi G \quad \text{et} \quad I_{F'} = K_0 \iint_{F'} ds (\varphi'_n G - \varphi' G_n) \quad (21b)$$

où  $\epsilon' = \mu'/\omega$  est nulle comme  $\mu' \rightarrow 0^+$  est utilisé dans la condition sur la surface libre de la fonction de Green. Maintenant, nous écrivons que la surface libre  $F$  est l'union d'une zone  $\bar{F}$  et du reste  $F \cap \bar{F}$ . Dans la zone  $\bar{F}$ , une valeur finie de  $\epsilon$  est appliquée tandis que  $\epsilon = 0^+ = \epsilon'$  sur le reste  $F \cap \bar{F}$  de la surface libre. L'intégrale sur la surface libre se réduit à :

$$I_F = -i\epsilon K_0 \iint_{\bar{F}} ds \varphi G \quad (21c)$$

Dans le domaine intérieur  $D'$ , nous choisissons  $\varphi' = \varphi$  sur la surface intérieure de la carène. Si  $\varphi'$  satisfait la même condition sur la surface libre que celle de  $G$  comme dans les méthodes classiques, l'intégrale sur la surface de flottaison  $I_{F'}$  est nulle. Or, le problème dans  $D'$  ainsi défini est de type Dirichlet. Avec une telle condition sur  $F'$ , la solution n'est pas unique à certaines fréquences. Ces fréquences irrégulières correspondent aux fréquences propres du problème de Dirichlet dans  $D'$  d'après Malenica & Chen (1998). Afin d'avoir une solution unique dans  $D'$ , nous pouvons imposer une condition sur  $F'$  telle que  $\partial\varphi'/\partial n = 0$ . Le problème aux limites dans  $D'$  est composé d'une condition sur  $H$  de type Dirichlet et une sur  $F'$  de type Neumann. Il est connu, d'après Kellogg (1929), que le problème avec ces deux conditions appliquées à des parties différentes de la frontière du demaine a une solution unique.

Introduisant (21c) pour  $I_F$  et (21b) pour  $I_{F'}$  dans laquelle  $\varphi'_n = 0$ , nous avons une nouvelle représentation du potentiel de vitesse :

$$4\pi\varphi = \iint_H ds (\varphi_n - \varphi'_n) G - i\epsilon K_0 \iint_{\bar{F}} ds \varphi G - K_0 \iint_{F'} ds \varphi' G \quad (22a)$$

qui peut s'écrire sous une forme compacte :

$$\varphi(P) = \iint_S ds \sigma(Q) G(P, Q) \quad \text{avec} \quad S = H \cup F' \cup \bar{F} \quad (22b)$$

dans laquelle  $\sigma$  représente la distribution de sources :

$$4\pi\sigma(Q) = \begin{cases} \varphi_n(Q) - \varphi'_n(Q) & Q \subset H \\ -K_0\varphi'(Q) & Q \subset F' \\ -i\epsilon K_0\varphi(Q) & Q \subset \bar{F} \end{cases} \quad (23)$$

obtenue par comparaison entre (22b) et (22a).

Pour déterminer la distribution de sources sur la surface de la carène, la surface de flottaison et la zone de la surface libre, nous considérons d'abord la condition de glissement sur la carène (19b). La dérivée dans la direction de la normale de (22b) s'écrit :

$$\varphi_n(P) = \iint_S ds \sigma(Q) G_n(P, Q) = 2\pi\sigma(P) + \iint_{\bar{S}} ds \sigma(Q) G_n(P, Q) = V_n - i\nu k_0 \iint_S ds \sigma(Q) G(P, Q)$$

et se réduit à

$$2\pi\sigma(P) + \iint_{\bar{S}} ds \sigma(Q) [G_n(P, Q) + i\nu k_0 G(P, Q)] = V_n \quad \text{pour } P \subset H \quad (24a)$$

Dans (24a), la surface  $\bar{S} = S \cap (Q=P)$  est la surface  $S = H \cup F' \cup \bar{F}$  excluant le point  $Q=P$ .

De la même façon, la condition  $\varphi'_n = 0$  sur la surface de flottaison  $F'$  donne l'équation intégrale suivante :

$$4\pi\sigma(P) + \iint_{\bar{S}} ds \sigma(Q) G_n(P, Q) = 0 \quad \text{pour } P \subset F' \quad (24b)$$

Le facteur  $4\pi$  dans le premier membre de (24b) est dû au fait que la contribution de  $G_n(P, Q)$  associée au terme  $1/|PQ'|$  de  $G(P, Q)$  avec  $Q'$  le point symétrique de  $Q$  par rapport à  $z=0$  double celle associée au terme  $1/|PQ|$  dans la zone surfacique autour du point  $P \subset F'$  lorsque  $Q \rightarrow P$ . En effet, la multiplication de  $K_0/(4\pi)$  aux deux membres de l'équation (22b) donne directement (24b) si on effectue le remplacement  $-K_0 G(P, Q)$  par  $G_n(P, Q)$  légitime pour  $P \subset F'$  d'après la condition sur la surface  $z=0$  ( $F \cup F'$ ) de la fonction de Green (12b).

Enfin, nous multiplions par  $-i\epsilon K_0$  les deux membres de (22b) et nous obtenons :

$$4\pi\sigma(P) + i\epsilon K_0 \iint_S ds \sigma(Q) G(P, Q) = 0 \quad \text{pour } P \subset \bar{F} \quad (24c)$$

ce qui complète le système des équations intégrales. Les équations intégrales (24) s'écrivent sur la surface de la carène (24a), la surface de flottaison (24b) et la zone de la surface libre (24c) où le paramètre de dissipation  $\epsilon$  est appliqué, construisent un nouveau système d'équations intégrales qui détermine la distribution de sources.

### 3.3 Résolution complète du problème du premier ordre

Après avoir obtenu la distribution de sources sur la carène  $H$ , sur la surface de flottaison  $F'$  et sur la zone de surface libre  $\bar{F}$  en résolvant le système des équations intégrales (24), nous pouvons évaluer les potentiels de vitesse élémentaires sur la carène et dans le fluide par :

$$\phi_j^m = \iint_S ds \sigma_j^m G \quad \text{et} \quad \phi_D = \iint_S ds \sigma_D G \quad (25)$$

avec  $S = H \cup F' \cup \bar{F}$ . Les coefficients hydrodynamiques de masse d'eau ajoutée et d'amortissement, et les efforts d'excitation sont évalués par

$$\omega^2 A_{kj}^{nm} + i\omega B_{kj}^{nm} = \omega^2 (1+i\epsilon) \rho \iint_H ds \phi_j^m N_k^n \quad \text{and} \quad F_k^n = -i\omega (1+i\epsilon) \rho a_0 \iint_H ds (\phi_0 + \phi_7) N_k^n \quad (26)$$

où  $N_k^n$  sont données par (20a). Les mouvements des corps sont calculés par l'équation de mécanique :

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^6 \left[ -\omega^2 (\delta_{nm} M_{kj}^{nm} + A_{kj}^{nm}) - i\omega B_{kj}^{nm} + \delta_{nm} C_{kj}^{nm} + C_{kj}^{\prime nm} \right] a_j^m = F_k^n \quad (27)$$

pour  $n=1, 2, \dots, M$  et  $k=1, 2, \dots, 6$ . Dans (27),  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker tandis que  $M_{kj}^{mm}$  et  $C_{kj}^{mm}$  sont les matrices d'inerties et de raideurs hydrostatiques du corps  $m$ . Le terme  $C_{kj}^{\prime mm}$  est la raideur d'ancrage du corps  $m$  si  $n=m$  ou celle entre le corps  $m$  et le corps  $n$  si  $n \neq m$ . D'autres types de liaison mécanique entre les corps comme rotule ou charnière sont discutées dans Jaunet et al. (1984).

Après avoir résolu l'équation de mouvements (27), nous pouvons définir la distribution totale de sources par :

$$\sigma_P = -i\omega \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^6 a_j^m \sigma_j^m + a_0 \sigma_D \quad (28a)$$

ce qui permet d'évaluer la somme des potentiels de radiation et celui de diffraction nommée le potentiel de perturbation  $\phi_P$  ainsi que son gradient  $\nabla\phi_P$  par :

$$\phi_P = \iint_S ds \sigma_P G \quad \text{et} \quad \nabla\phi_P = \iint_S ds \sigma_P \nabla G \quad (28b)$$

en un point quelconque du demi-espace  $P \subset D \cup D'$ . Le gradient du potentiel de perturbation  $\nabla\phi_P$  et celui du potentiel de houle incidente  $a_0\nabla\phi_0$  sont nécessaires pour le calcul des efforts du second ordre.

## 4 Nouvelles formulations des efforts de dérive

De nombreuses études ont été consacrées à l'évaluation des efforts du second ordre qui contiennent une composante en haute fréquence d'une part, et une en basse fréquence d'autre part. En particulier, les efforts de basse fréquence ont été soigneusement étudiés parce qu'ils sont la source principale d'excitation à la plupart des systèmes d'ancrages dont les périodes naturelles en cavalement, embarquée et lacet sont de l'ordre de 100 secondes.

De nouvelles analyses à partir de la formulation d'intégration des pressions ont été réalisées par Chen (2004) en utilisant les deux variantes du théorème de Stokes données dans Dai (1998). Ces analyses montrent que la formulation d'intégration de pressions (formulation de champ proche) et la formulation fondée sur le théorème de quantités de mouvement (formulation de champ lointain) sont effectivement équivalentes pour les efforts de dérive - la limite des efforts de basse fréquence dans une houle régulière. Aussi des nouvelles formulations ont été développées. En particulier, la formulation de champ intermédiaire est très intéressante pour évaluer les efforts du second ordre sur chaque corps dans un système d'interaction de multi-corps où la formulation de champ lointain n'est pas applicable.

Faute d'espace, nous nous limitons ici à donner un résumé des analyses de Chen (2004) concernant les efforts de dérive qui ne font intervenir que les quantités du premier ordre.

### 4.1 Formulations de champ proche et de champ lointain

La formulation de champ proche est obtenue par l'intégration des pressions du second ordre sur la carène en position moyenne, et des variations de pressions du premier ordre dues aux mouvements du premier ordre et aux élévations de surface libre du premier ordre le long de la ligne de flottaison. Une forme générale des efforts de dérive  $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$  avec  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  pour les forces et  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  pour les moments s'écrit :

$$\mathbf{F} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} dl (2X_3 - \mathcal{E}) \mathcal{E} \mathbf{n} + \rho \iint_H ds \left[ \nabla\Phi \nabla\Phi / 2 + \mathbf{X} \nabla\Phi_t + \mathbf{R} \wedge \Phi_t \right] \mathbf{n} \quad (29a)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} dl (2X_3 - \mathcal{E}) \mathcal{E} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) + \rho \iint_H ds \left\{ \left[ \nabla\Phi \nabla\Phi / 2 + \mathbf{X} \nabla\Phi_t + \mathbf{R} \wedge \Phi_t \right] (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) + \Phi_t \mathbf{T} \wedge \mathbf{n} \right\} \quad (29b)$$

où nous prenons la partie réelle (constant) du membre droit. Dans (29), toutes les quantités sont du premier ordre comme  $\mathcal{E}$  pour l'élévation de la surface libre,  $\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{r} = (X_1, X_2, X_3)$  pour le vecteur de déplacement dû à la translation  $\mathbf{T} = (a_1, a_2, a_3)$  et à la rotation  $\mathbf{R} = (a_4, a_5, a_6)$  avec  $\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  pour le vecteur du point  $(x, y, z)$  par rapport au point de référence  $(x_0, y_0, z_0)$  de rotation. Dans (29),  $\Gamma$  représente la ligne de flottaison.

L'intégrale de ligne dans (29) est le résultat d'intégration des pressions du premier ordre dans une zone intermittente autour de la ligne de flottaison. Le premier terme dans l'intégrale sur la carène (29) vient directement du terme de convection dans (11b) tandis que le second terme est la correction de pressions dynamiques par rapport aux déplacements. Le terme associé à la rotation  $\mathbf{R}$  prend en compte la variation de la normale sur la carène. Enfin, le dernier terme dans (29b) est le moment correctif induit par les forces dynamiques du premier ordre appliquées au point en mouvement de translation.

L'évaluation des effort de dérive par (29) est bien délicate car la précision numérique des champs de vitesse sur la carène est moins bonne que celle du potentiel. Les résultats obtenus par la formulation de champ proche convergent difficilement si la surface de la carène n'est pas lisse ou en présence de coins vifs.

La formulation de champ lointain est obtenue en appliquant le théorème de quantités de mouvements dans le volume fluide limité par la carène et une surface de contrôle à l'infini  $S_{\infty}$ . Seules les composantes  $(F_x, F_y, M_z)$  sont possibles et données dans Newman (1967) par :

$$F_x = \left\langle \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_{\infty}} dl \mathcal{E}^2 n_1 + \rho \iint_{S_{\infty}} ds (\Phi_n \Phi_x + P_r n_1) \right\rangle \quad (30a)$$

$$F_y = \langle \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_\infty} dl \mathcal{E}^2 n_2 + \rho \iint_{S_\infty} ds (\Phi_n \Phi_y + P_r n_2) \rangle \quad (30b)$$

$$M_z = \langle \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_\infty} dl \mathcal{E}^2 n_6 + \rho \iint_{S_\infty} ds [\Phi_n (x \Phi_y - y \phi_x) + P_r n_6] \rangle \quad (30c)$$

Dans (30), " $\langle \cdot \rangle$ " signifie qu'on prend la valeur moyenne pendant une période. L'intérêt de cette formulation est que le potentiel de vitesse  $\Phi$ , la pression  $P_r$ , ainsi que l'élévation de surface libre  $\mathcal{E}$  sont évalués sur la surface à l'infini  $S_\infty$  et son intersection avec la surface libre moyenne  $\Gamma_\infty$  où leur expression asymptotique dans le champ lointain peuvent être utilisées. La précision numérique offerte par cette formulation de champ lointain est bien meilleure que celle par la formulation de champ proche (29). Mais, elle s'applique seulement aux composantes horizontales des efforts de dérive. Dans le cas de corps multiples en interaction hydrodynamique, elle ne peut donner accès aux efforts sur chaque corps séparément.

## 4.2 Nouvelles formulations de champ proche et de champ intermédiaire

La formulation de champ proche (29) et celle de champ lointain (30) sont obtenues par les approches différentes et leurs apparences sont bien distinctes. Pour les composantes horizontales des efforts, il devrait y avoir un lien entre les deux formulations. Très récemment, les analyses fondées sur l'utilisation de deux variantes du théorème de Stokes données dans Dai (1998) ont été réalisées par Chen (2004). Deux nouvelles formulations de champ proche sont obtenues et données par :

$$\mathbf{F} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} dl [2\mathcal{E}(\mathbf{Xn})\mathbf{k} - \mathcal{E}^2 \mathbf{n}] + \frac{\rho}{2} \iint_H ds [(\nabla\Phi\nabla\Phi)\mathbf{n} + 2\nabla\Phi_t(\mathbf{Xn})] \quad (31a)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} dl [2\mathcal{E}(\mathbf{Xn})(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k}) - \mathcal{E}^2(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n})] + \frac{\rho}{2} \iint_H ds [(\nabla\Phi\nabla\Phi)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n}) + 2(\mathbf{r}\wedge\nabla\Phi_t)(\mathbf{Xn})] \quad (31b)$$

pour la première et

$$\mathbf{F} = \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} dl [(\Phi\Phi_z - g\mathcal{E}^2)\mathbf{n} + (\Phi\Phi_n - 2\Phi_t\mathbf{Xn})\mathbf{k}] + \frac{\rho}{2} \iint_H ds [\nabla(\Phi\Phi_n) + 2\nabla\Phi_t(\mathbf{Xn})] \quad (32a)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} dl [(\Phi\Phi_z - g\mathcal{E}^2)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n}) + (\Phi\Phi_n - 2\Phi_t\mathbf{Xn})(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k})] + \frac{\rho}{2} \iint_H ds [\nabla(\Phi\Phi_n)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n}) + 2(\mathbf{r}\wedge\nabla\Phi_t)(\mathbf{Xn})] \quad (32b)$$

pour la seconde.

La première nouvelle formulation (31) est essentiellement similaire à celle d'origine (29) mais porte des améliorations intéressantes comme les termes associés aux mouvements du corps ( $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{R}$ ) qui disparaissent ainsi que le terme associé au déplacement vertical dans l'intégrale de ligne qui ne donne qu'une contribution aux composantes verticales des efforts.

La seconde formulation (32) est intéressante dans le sens que le premier terme dans l'intégrale de ligne ne donne pas de contribution aux efforts de dérive tandis que le second terme est une composante verticale. Il reste seulement l'intégrale sur la carène pour les composantes horizontales des efforts de dérive ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_z$ ). Or, l'intégrand de l'intégrale sur  $H$  comprend les dérivées doubles du potentiel de vitesse qui ne sont pas très faciles à calculer avec une bonne précision pour un point sur la carène.

Ensuite, nous considérons un domaine  $D$  limité par la surface de la carène  $H$  dans sa position moyenne, une surface de contrôle  $C$  entourant le corps et la partie de la surface libre  $F$  limitée par l'intersection  $\Gamma$  de  $H$  avec  $z=0$  et celle  $\Gamma_c$  de  $C$  avec  $z=0$ . L'application du théorème de Green dans ce domaine  $D$ , la première nouvelle formulation (31) devient :

$$\mathbf{F} = \rho g \oint_{\Gamma} dl \mathcal{E}(\mathbf{Xn})\mathbf{k} + \rho \iint_H ds [\nabla\Phi(\mathbf{X}_t\mathbf{n}) + \nabla\Phi_t(\mathbf{Xn})] - \rho \iint_F ds [(\Phi_z\nabla\Phi + \mathcal{E}\nabla\Phi_t) - (\mathcal{E}\Phi_{zt} + \nabla\Phi\nabla\Phi/2)\mathbf{k}] + \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma_c} dl \mathcal{E}^2 \mathbf{n} + \frac{\rho}{2} \iint_C ds [2\Phi_n\nabla\Phi - (\nabla\Phi\nabla\Phi)\mathbf{n}] \quad (33a)$$

$$\mathbf{M} = \rho g \oint_{\Gamma} dl \mathcal{E}(\mathbf{Xn})(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k}) + \rho \iint_H ds \mathbf{r}\wedge[\nabla\Phi(\mathbf{X}_t\mathbf{n}) + \nabla\Phi_t(\mathbf{Xn})] - \rho \iint_F ds [\mathbf{r}\wedge(\Phi_z\nabla\Phi + \mathcal{E}\nabla\Phi_t) - (\mathcal{E}\Phi_{zt} + \nabla\Phi\nabla\Phi/2)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k})] + \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma_c} dl \mathcal{E}^2(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n}) + \frac{\rho}{2} \iint_C ds [\Phi_n(\mathbf{r}\wedge\nabla\Phi) - (\nabla\Phi\nabla\Phi)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n})] \quad (33b)$$

qui, à première vue, semble plus compliquée que la première formulation de champ proche (31) ou que celle d'origine (29). Une analyse plus approfondie nous révèle des propriétés très importantes. Tout d'abord,

l'intégrale sur la carène  $H$  ne donne pas de contribution aux efforts de dérive. L'intégrale de ligne de flottaison ne concerne que les composantes verticales des efforts. De même, l'intégrale sur la zone de surface libre  $F$  limitée par la ligne de flottaison  $\Gamma$  et l'intersection  $\Gamma_c$  de la surface de contrôle avec la surface libre, ne donne que des composantes verticales parce que le premier terme intervenant dans l'intégrale sur  $F$  est nulle pour les efforts de dérive. En résumé, nous pouvons réécrire (33) comme :

$$\mathbf{F} = \rho g \oint_{\Gamma} dl \mathcal{E}(\mathbf{Xn})\mathbf{k} + \rho \iint_F ds (\mathcal{E}\Phi_{zt} + \nabla\Phi\nabla\Phi/2)\mathbf{k} + \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma_c} dl \mathcal{E}^2\mathbf{n} + \frac{\rho}{2} \iint_C ds [2\Phi_n\nabla\Phi - (\nabla\Phi\nabla\Phi)\mathbf{n}] \quad (34a)$$

$$\mathbf{M} = \rho g \oint_{\Gamma} dl \mathcal{E}(\mathbf{Xn})(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k}) + \rho \iint_F ds (\mathcal{E}\Phi_{zt} + \nabla\Phi\nabla\Phi/2)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{k}) + \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma_c} dl \mathcal{E}^2(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n}) + \frac{\rho}{2} \iint_C ds [\Phi_n(\mathbf{r}\wedge\nabla\Phi) - (\nabla\Phi\nabla\Phi)(\mathbf{r}\wedge\mathbf{n})] \quad (34b)$$

ce qui donne les six composantes des efforts de dérive. En particulier, les trois composantes horizontales sont données par l'intégrale de ligne le long de l'intersection  $\Gamma_c$  de la surface de contrôle  $C$  avec  $z = 0$  et l'intégrale sur  $C$  :

$$F_x = \frac{\rho K_0}{4} \oint_{\Gamma_c} dl \phi\bar{\phi}n_1 + \frac{\rho}{4} \iint_C ds [\phi_n\bar{\phi}_x + \bar{\phi}_n\phi_x - \nabla\phi\nabla\bar{\phi}n_1] \quad (35a)$$

$$F_y = \frac{\rho K_0}{4} \oint_{\Gamma_c} dl \phi\bar{\phi}n_2 + \frac{\rho}{4} \iint_C ds [\phi_n\bar{\phi}_y + \bar{\phi}_n\phi_y - \nabla\phi\nabla\bar{\phi}n_2] \quad (35b)$$

$$M_z = \frac{\rho K_0}{4} \oint_{\Gamma_c} dl \phi\bar{\phi}n_6 + \frac{\rho}{4} \iint_C ds [\phi_n(X\bar{\phi}_y - Y\bar{\phi}_x) + \bar{\phi}_n(X\phi_y - Y\phi_x) - \nabla\phi\nabla\bar{\phi}n_6] \quad (35c)$$

avec  $(X, Y) = (x - x_0, y - y_0)$  et  $\bar{\phi}$  la complexe conjuguée de  $\phi$ .

La formulation (35) fait intervenir le potentiel de vitesse et ses dérivées sur la surface de contrôle  $C$  et l'intersection  $\Gamma_c$ . Nous l'appellerons la formulation de *champ intermédiaire* en référence à celle de champ proche et celle de champ lointain. Elle est obtenue à partir de celle de champ proche (29) et devient celle de champ lointain (30) si on déplace la surface de contrôle vers l'infini ( $C \rightarrow S_\infty$ ). A l'infini, on peut utiliser les expressions asymptotiques du potentiel de vitesse pour une formulation encore plus simple. Lorsqu'on place la surface de contrôle à la position de la carène ( $C \rightarrow H$ ), on retrouve la formulation présentée dans Molin & Hairault (1983) qui avait été obtenue à partir du théorème de quantités de mouvements.

A une certaine distance de la carène, le potentiel de vitesse et ses dérivées sont calculés avec une bonne précision numérique. La précision numérique des efforts offerte par la formulation de champ intermédiaire est donc équivalente à celle de champ lointain et meilleure que celle de champ proche. En effet, cette surface de contrôle peut être près du corps à une distance équivalente à la taille d'une facette. La cinématique de l'écoulement à cette distance est déjà moins sensible à la finesse de maillages utilisés pour représenter la carène. De plus, la forme de la surface de contrôle est arbitraire. Par conséquent, nous pouvons choisir un parallélépipède qui est simple à mettre en oeuvre et peut être générée automatiquement par le code de résolution.

Un autre avantage important est que cette formulation de champ intermédiaire permet de calculer les efforts de dérive sur chaque corps séparément, dans le cas de corps multiples en interaction hydrodynamique. Dans ce cas, la surface de contrôle est parallélépipède entourant d'un des corps. En utilisant (35) sur la surface de contrôle et son intersection avec la surface libre nous obtenons les efforts de dérive sur le corps, tout comme la formulation de champ proche mais avec une précision numérique qui s'aligne sur celle de la formulation de champ lointain.

## 5 Applications numériques

Afin de vérifier cette formulation de champ intermédiaire, nous considérons le cas d'un cylindre vertical de section elliptique posé sur le fond marin de profondeur  $h$ . Le ratio entre le petit axe et le grand axe  $A = h$  est de 0.2. Différents maillages composés de 400 à 2400 facettes sur un quart de la surface cylindrique ont été générés. Celui contenant 400 facettes sur 1/4 de la carène avec la surface de contrôle est présenté sur la partie gauche de la Figure 2. Sur la partie droite, les efforts de dérive  $F_y/(\rho g A a_0^2/2)$  dans une houle oblique d'une incidence  $\beta = 15^\circ$  obtenus par les formulation de champ proche, intermédiaire et lointain sont présentés. Les résultats obtenus via la formulation de champ proche avec des maillages composés de 400, 800, 1600 et 2400 facettes ne semblent pas converger, alors que ceux obtenus en utilisant la formulation de champ intermédiaire ou celle de champ lointain sont très proches pour tous les maillages (seuls les résultats avec le maillage de 400

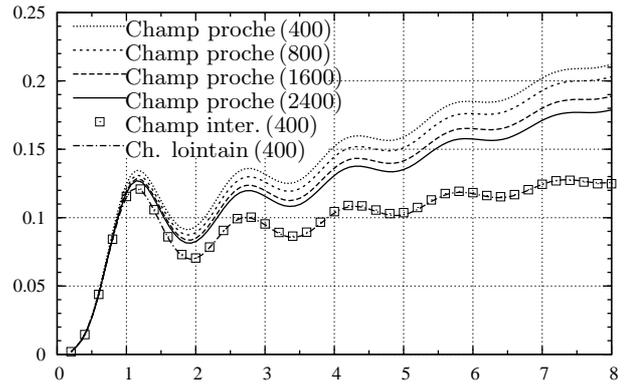
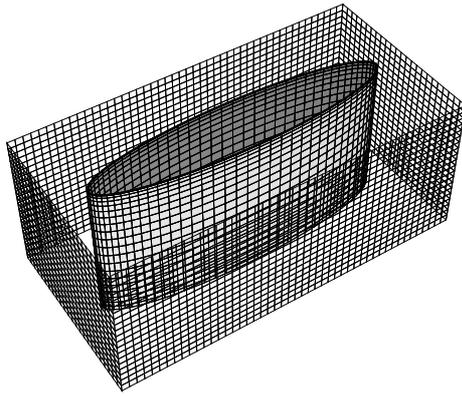


Figure 2: Maillage du cylindre & surface de contrôle (gauche) et efforts de dérive  $F_y$  for  $\beta=15^\circ$  (droit)

facettes sont présentés). Nous constatons un excellent accord entre les résultats obtenus via la formulation de champ intermédiaire et ceux via la formulation de champ lointain. Ces résultats sont aussi en excellent accord avec ceux de Krokstad (1991) qui utilise une méthode semi-analytique. Cet exemple confirme que la formulation de champ intermédiaire est bien supérieure à celle de champ proche et qu'elle offre un moyen fiable et efficace d'évaluer les efforts de dérive.

Le second exemple concerne deux barges à couple de même dimension ( $L \times B \times T = 2.47 \times 0.6 \times 0.18\text{m}$ ) avec les mêmes propriétés mécaniques ( $z_G = 0.20/\text{quille}$  et rayons de giration  $= 0.187/0.527/0.527\text{m}$ ) libre dans une houle de face. Le maillage des barges et de la zone entre les barges espacés de  $0.116\text{m}$  où on applique une valeur de dissipation  $\epsilon$  sont présentés sur la partie gauche de la figure 3. l'élévation de la surface libre est mesurée le long de la ligne centrale entre les barges. Les essais ont été réalisés dans le bassin d'Océanide (Rippol,

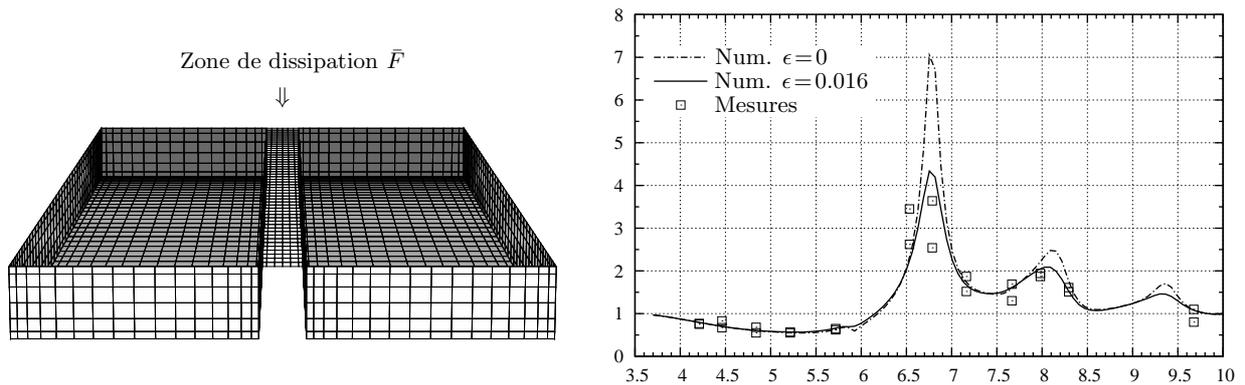


Figure 3: Maillage des barges & zone de dissipation (left) et élévation au centre d'intervalle (right)

2004). Les résultats numériques avec deux valeurs du paramètre  $\epsilon=0$  et  $0.016$  et les valeurs mesurées d'essais sont tracés sur la partie droite de la figure avec la fréquence de houle (rad/s) en abscisse. Nous constatons des élévations de surface libre importantes aux trois fréquences de houle correspondant aux fréquences de "résonance hydrodynamique" dues aux interactions hydrodynamiques entre les corps. Les résultats avec  $\epsilon=0$  (sans amortissement) sont beaucoup plus élevés que les valeurs mesurées tandis que les résultats avec  $\epsilon=0.016$  sont en bon accord. En comparant les courbes de résultats numériques correspondant à  $\epsilon=0$  et  $0.016$ , nous remarquons que l'influence du paramètre  $\epsilon$  est localisée près des fréquences de résonance hydrodynamique.

Pour le troisième exemple, nous avons choisit un navire Wigley et une barge placés côte à côte tels qu'étudiés par Kashiwagi (2004). Les deux corps ont les dimensions principales ( $L \times B \times T = 2 \times 0.3 \times 0.125\text{m}$ ). et la distance entre les lignes centrales est de  $1.097\text{m}$ . Ils sont fixes pendant les essais et soumis à une houle de travers. Le maillage de deux corps est présenté sur la partie gauche de figure 4. Une zone rectangulaire de la surface libre entre les deux corps est modélisée automatiquement. Sur cette zone, deux valeurs  $\epsilon=0$  (sans amortissement) et  $\epsilon=0.016$  sont utilisées. Sur la partie droite de la figure, on montre les deux surfaces de contrôle entourant séparément les deux corps. Les efforts de dérive dans une houle de travers venant du côté du navire Wigley sont évalués et comparés avec les mesures de Kashiwagi et al. (2004). Les résultats en utilisant la formulation de champ intermédiaire sont présentés sur la figure 5, avec dans la partie gauche les efforts  $F_y/(\rho g L a_0^2/4)$  sur le navire Wigley et dans la partie droite les efforts  $F_y/(\rho g L a_0^2/4)$  sur la barge. L'abscisse est le nombre d'onde réduit  $K_0 L/2$  dans les cas. De plus, les efforts de dérive sur le navire Wigley

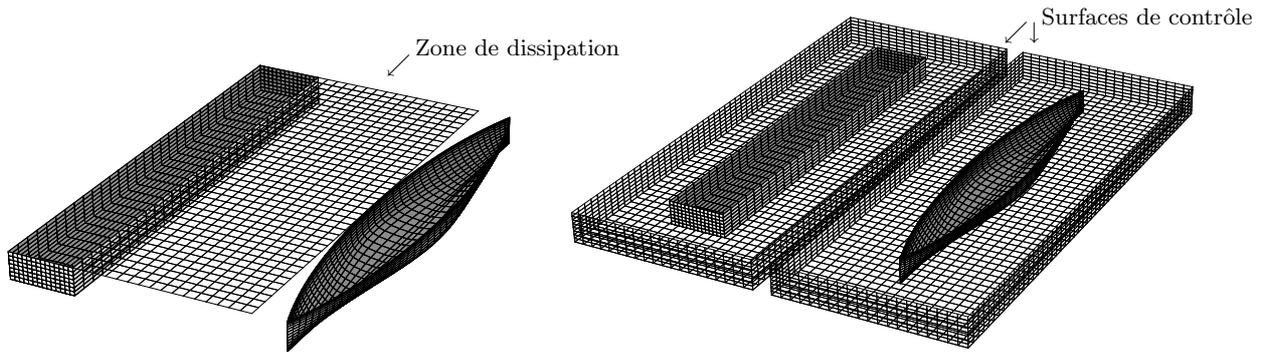


Figure 4: Maillage des deux navires & zone de dissipation (gauche) et maillages de surfaces de contrôle (droit)

seul et ceux sur la barge seule sont présentés par les traits discontinus sur les deux parties de la figure. On voit que les résultats numériques correspondant au paramètre  $\epsilon = 0$  sont en bon accord avec les mesures, sauf pour le nombre d'onde proche de  $K_0L/2 \approx 4.71$  où les valeurs d'efforts sont importantes. Par contre, la courbe en traits continus représentant les résultats numériques avec  $\epsilon = 0.016$  est plus proche de mesures expérimentales. En dehors d'une zone limitée autour de  $K_0L/2 \approx 4.71$ , les deux séries de résultats numériques sont très proches l'une de l'autre. Ceci démontre les effets importants de l'interaction entre les deux corps et le rôle joué par le paramètre  $\epsilon$  pour simuler des effets dissipatifs. Il est remarquable que les efforts sur le navire

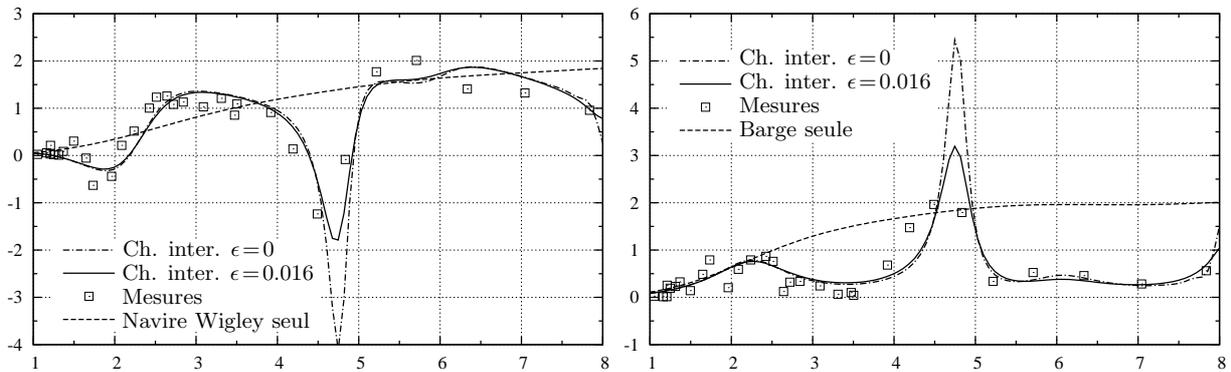


Figure 5: Effort de dérive  $F_y$  sur le navire Wigley (gauche) et efforts de dérive  $F_y$  sur la barge (droit)

Wigley à la houle deviennent négatifs pour un nombre d'onde de houle proche de  $K_0L/2 \approx 4.71$  tandis que les efforts sur la barge *sous la houle* gardent le même signe mais avec une amplitude importante. La somme des efforts sur le navire et la barge reste positive sur toute la plage de fréquences. Ceci montre une fois de plus que l'interaction hydrodynamique entre les corps multiples est très importante et qu'elle peut créer des forces répulsives d'amplitude élevée entre les corps. Pour une grande fréquence de houle, la barge en aval du navire supporte moins d'efforts que quand elle est seule dû à la présence du navire en amont qui produit un effet d'écran. A la limite de fréquence infinie, les efforts sur la barge doivent être nuls tandis que ceux sur le navire sont les mêmes que quand il est soumis seul à une houle de travers.

## 6 Conclusion

La notion du fluide presque parfait est adoptée et élaborée en développant des conditions aux limites sur la surface libre et sur la carène. La condition aux limites sur la surface libre est augmentée d'un terme associé à un paramètre résultant de l'introduction d'une force dissipative interne dans le fluide. La condition aux limites sur la carène est modifiée en introduisant un terme associé à un deuxième paramètre qui représente une réflexion partielle de la paroi - une sorte de dissipation due aux frottements sur la paroi. Les équations intégrales sont établies suivant ces modifications. Par rapport à un système d'équations intégrales classique qui s'écrit seulement sur la surface de carène, nous avons ajouté les équation dans la zone de la surface libre où le terme dissipatif est appliqué. La modification de l'équation intégrale sur la carène est directe pour prendre en compte le terme de réflexion partielle. Les valeurs de ces deux petits paramètres ne peuvent être données, a priori, mais peuvent être bien déterminées par comparaison avec les résultats d'essais ou avec les résultats de simulations de type CFD fondées sur les équations de Navier-Stokes. L'introduction de ces

termes additionnels dans une méthode de singularités fondée sur la théorie de l'écoulement potentiel capte qualitativement le mécanisme de dissipation dans le fluide et améliore amplement la précision de prédiction comme démontré par les exemples numériques. Cette méthode de singularités résultant de ces nouveaux développements pour prendre en compte les effets dissipatifs du fluide peut devenir un outil très important dans la pratique pour les études de conception.

Dans la deuxième partie du document, nous présentons un résumé des analyses de Chen (2004) sur les formulations des efforts du second ordre. En particulier, nous avons introduit la nouvelle formulation de champ intermédiaire qui enrichit la liste des formulations existantes (champ proche et champ lointain). Celle-ci présente les avantages cumulés des formulations précédentes : la convergence et la précision numériques offertes par la formulation de champ lointain, et l'accès aux efforts sur chaque corps individuel de la formulation de champ proche. Les résultats numériques montrent qu'elle est robuste et efficace pour l'évaluation des efforts du second ordre, d'autant mieux qu'elle est implémentée dans la nouvelle méthode de singularités en prenant en compte les effets dissipatifs.

## Références

- [1] CHEN X.B. (1988) Etude des réponses du second ordre d'une structure soumise à une houle aléatoire, *Ph.D. Thesis, Univ. Nantes, ENSM*.
- [2] CHEN X.B. (1993) "Evaluation de la fonction de Green du problème de diffraction/radiation en profondeur d'eau finie - une nouvelle méthode rapide et précise", Actes des 4e Journées de l'Hydrodynamique, Nantes (France), pp.371-84.
- [3] CHEN X.B. (1994) Approximation on the quadratic transfer function of low-frequency loads, *Proc. 7th Intl Conf. Behaviour Off. Structures, BOSS'94*, **2**, 289-302.
- [4] CHEN X.B. (2004) New formulations of the second-order wave loads, *Rapp. Technique, NT2840/DR/XC*, Bureau Veritas, Paris.
- [5] CHEN X.B. (2004) Hydrodynamics in Offshore and Naval Applications - Part I, *Keynote lecture in the 6th Intl Conf. HydroDynamics*, Perth (Australia).
- [6] DAI Y.S. (1998) Potential flow theory of ship motions in waves in frequency and time domain, *The Express of the National Defense Industries*, Beijing.
- [7] GUÉVEL P. (1982) Le problème de diffraction-radiation - Première partie : Théorèmes fondamentaux, *ENSM, Univ. Nantes*.
- [8] JAUNET J.P., TESSIER F. & PETITJEAN F. (1984) Behaviour at sea of interconnected structures, *Proc. 3rd Intl Congress on Marine Techn*, Athens.
- [9] KASHIWAGI M. (2004) Wave drift forces on two ships in close proximity, *Proc. Joint Intl. Conf. OCEANS'04 & TECHNO-OCEAN'04*, Kobe, 578-84.
- [10] KASHIWAGI M., ENDO K. & YAMAGUCHI H. (2004) Wave drift forces and moments on two ships arranged side by side in waves, *Submitted to J. Ocean Engng*.
- [11] KELLOGG O.D. (1929) Foundations of potential theory, *Springer*.
- [12] KROKSTAD J.R. (1991) Second-order loads in multidirectional seas, *Ph D. Thesis, NTH, Univ. Trondheim*.
- [13] MALENICA Š. & CHEN X.B. (1998) On the irregular frequencies appearing in wave diffraction-radiation solutions, *Intl J. Offshore Polar Engg*, **8** 2, 110-14.
- [14] MOLIN B. & HAIRAUT J.-P. (1983) On second-order motion and vertical drift forces for three-dimensional bodies in regular waves, *Proc. Intl Workshop on Ship & Platform Motions*, Berkeley, 344-62.
- [15] MOLIN B. (2002) Hydrodynamique des structures offshore *Editions Technip*.
- [16] NEWMAN J.N. (1967) The drift force and moment on ships in waves, *J. Ship Res.*, **11**, 51-60.
- [17] OGIWIE T.F. (1983) Second-order hydrodynamic effects on ocean platforms, *Proc. Intl Workshop on Ship & Platform Motions*, Berkeley.
- [18] PINKSTER J.A. (1980) Low frequency second order wave exciting forces on floating structures, *H. Veenman En Zonen B.V. - Wageningen*, The Netherland.
- [19] RIPPOL T. (2004) Navires à couple, *Rapport d'essais C04.2.013, GIS HYDRO, Océanide*, 2004.